

考研

系列丛书

2000年

研究生入学考试

主编 王学理 (东北大学) 富景隆 (哈尔滨工业大学)

数 学

应试指南



NEUPRESS

东北大学出版社

2000 年研究生入学考试 数学应试指南

主 编 王学理 富景隆
副主编 刘玉柱 李建华 沙秋夫

江苏工业学院图书馆
藏书章

东北大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

2000 年研究生入学考试数学应试指南/王学理, 富景隆主编. —沈阳: 东北大学出版社, 1999.4

ISBN 7-81054-260-5

I. 2...

II. ①王... ②富...

III. 数学-考试-研究生

IV. O1

内容简介

贴近考试, 本书将大纲要求的内容分成三篇二十六讲, 每讲包括内容提要、客观题、主观题、综合题、复习题和答案六个部分, 第四篇为模拟试卷。

本书采用归类分析的方法向读者介绍方便快捷的解题方法, 尤其重视综合运用所学知识能力的训练。模拟试题由参加过多年全国考研命题的富景隆先生编写, 颇具实用性和真实感。

本书的读者对象是准备参加全国硕士研究生入学考试的朋友们, 本书亦可供其他工科院校本科生参考, 也是高校数学教学工作者不可多得的教学参考书。

© 东北大学出版社出版

(沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号 邮政编码 110006)

丹东印刷厂印刷

新华书店总店北京发行所发行

开本: 787×1092 1/16 字数: 877 千字 印张: 34.25

印数: 1~10000 册

1999 年 4 月第 2 版

1999 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑: 柳毅

责任校对: 冯伟

封面设计: 唐敏智

责任出版: 秦力

定价: 35.00 元

序 言

以全国硕士研究生入学考试数学考试大纲为依据，我们为准备报考研究生的朋友们编写了这本“应试指南”。其目的是帮助读者在较短的时间内将浩如烟海的数学问题进行条分缕析，将所学知识融会贯通，力争考试胸有成竹，有望金榜题名。

全书共四篇。依次为高等数学、线性代数、概率论与数理统计、模拟试卷。前三篇共含二十六讲，每讲包含内容提要、客观题、主观题、综合题、复习题、答案等六个部分。第四篇为模拟试题，由多年参加全国考研命题的富景隆教授编写，此篇的十一套试题颇具针对性，很有实用价值。四篇编者依次为王学理和沙秋夫、李建华、刘玉柱、富景隆。该书由王学理、富景隆担任主编。

为真正能对应试者起到指导作用，每讲都将所涉猎内容分成若干类，每一类型都选择典型例题，介绍一些方便快捷的解题方法。这些方法大都是编者在长期教学中呕心沥血之所得，作起题来往往简明速效。读者阅后会有清心明快、柳暗花明之感。建议读者能独立完成书中所给习题，若能真正通读本书，相信入学考试之数学成绩一定会令您满意。

本书的读者对象是准备参加全国硕士研究生入学考试的青年朋友。本书亦可作为在校本科生之数学学习辅导书，对于从事高校数学教学工作的同仁也是一本较好的教学参考书。

由于编者水平所限与时间仓促，疏漏与不妥之处在所难免，希望得到读者与同仁的批评与帮助。

编 者

1999年2月18日

目 录

第一篇 高等数学

第一讲 一元函数的极限.....	1
第二讲 一元函数导数与微分的运算	20
第三讲 一元函数的连续性与可导性	37
第四讲 微分中值定理与导数的应用	53
第五讲 不定积分	68
第六讲 定积分的运算及其应用	88
第七讲 向量代数与空间解析几何.....	118
第八讲 多元函数的微分运算与应用.....	134
第九讲 重积分的运算及其应用.....	157
第十讲 曲线积分与曲面积分的运算及其应用.....	180
第十一讲 无穷级数.....	209
第十二讲 常微分方程.....	235
总复习题一.....	256

第二篇 线性代数

第一讲 行列式.....	260
第二讲 矩 阵.....	282
第三讲 向 量.....	309
第四讲 线性方程组.....	335
第五讲 特征值和特征向量.....	356
第六讲 二次型.....	385
总复习题.....	403

第三篇 概率论与数理统计

第一讲 随机事件与概率.....	406
------------------	-----

第二讲	一维随机变量及其分布·····	424
第三讲	二维随机变量及其概率分布·····	437
第四讲	随机变量的数字特征·····	454
第五讲	大数定律与中心极限定理·····	468
第六讲	数理统计的基本概念·····	474
第七讲	参数估计·····	480
第八讲	假设检验·····	489

第四篇 模拟试卷

第一套	数学一模拟试卷—I·····	496
第二套	数学一模拟试卷—II·····	500
第三套	数学一模拟试卷—III·····	504
第四套	数学一模拟试卷—IV·····	508
第五套	数学一模拟试卷—V·····	512
第六套	数学一模拟试卷—VI·····	516
第七套	数学二模拟试卷—I·····	521
第八套	数学二模拟试卷—II·····	525
第九套	数学二模拟试卷—III·····	529
第十套	数学二模拟试卷—IV·····	533
第十一套	1999 年数学一试卷·····	538

第一篇 高等数学

第一讲 一元函数的极限

一、内容提要

(一) 主要定义

1. $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon$, 则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限 (也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a), 记成 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

极限不存在时, 说 $\{x_n\}$ 发散.

2. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记成 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

注 在此定义中, $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 - \delta < x < x_0$, A 称为 $f(x)$ 的当 $x \rightarrow x_0 - 0$ 时的左极限, 记成

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A, \text{ 或 } f(x_0 - 0) = A, \text{ 类似可以定义右极限 } f(x_0 + 0).$$

3. $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记成 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

读者可以自己给出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的定义.

4. $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量, 记成 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$. 无穷大量简称为无穷大.

读者可以自己给出 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 等的定义.

注 当 $x \rightarrow x_0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时结论都成立时, 以后简记成 $\lim$. 以 0 为极限的量称为无穷小量. 无穷小量简称为无穷小.

5. 若 $\lim \alpha(x) = \lim \beta(x) = 0$, 且 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记成 $\alpha(x) = o(\beta(x))$; 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小; 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C (C \neq 0)$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小, 记成 $\alpha(x) = O(\beta(x))$, 当 $C = 1$ 时, 称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷小, 记成 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(二) 主要定理与公式

1. 若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则有

$$\lim [f(x) + g(x)] = A + B, \lim [f(x)g(x)] = AB$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

2. 极限存在准则

I 单调有界数列必有极限.

II 若 $x_n \leq y_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

(准则 II 亦称夹逼准则, 对于函数也成立)

3. 在同一过程中的有界变量与无穷小的乘积是无穷小; 有限个无穷小的和是无穷小.

注 (1) 等价无穷小具有传递性: 设 α, β, γ 为同一过程的无穷小, 若 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$, 则 $\alpha \sim \gamma$;

(2) 等价无穷小在求极限过程中可以进行如下替换: 在同一极限过程中, 若 $\alpha \sim \bar{\alpha}, \beta \sim \bar{\beta}$, 且 $\lim \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ 存在, 则 $\lim$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

4. $\lim f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha(x)$, 此处 $\lim \alpha(x) = 0$.

5. 洛比达(L'Hospital) 法则 $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ (或 ∞), $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞ ,

则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

6. 两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

7. 若在 $U(x, \delta)$ 内 $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq 0$ ($A \leq 0$).

8. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ ($A < 0$), 则必有 $U(x, \delta)$ 使在此邻域中 $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

注 若 $A = f(x_0)$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 此时结论亦真.

9. 若极限存在, 则其值必然唯一.

10. 任何有界数列都有收敛的子数列.

(三) 结论补充

1. 若 $\lim \varphi(x) = 0$, 则 $\lim \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1.$

2. 若 $\lim \varphi(x) = \infty$, 则 $\lim \left[1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)} = e.$

3. 若 $\lim \varphi(x) = 0$, 则 $\lim [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e.$

注 以上三条中的 $\varphi(x)$ 不等于 0.

4. $a > 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x, x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, a^x - 1 \sim x \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$).

注 由 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$ 立刻得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}.$

7. 若 $\lim \alpha(x) = \lim \beta(x) = \lim A(x) = \lim B(x) = 0$. 且 $\alpha(x) \sim A(x), \beta(x) \sim B(x)$, 则有 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{A(x)}{B(x)}$ 和 $\lim [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}} = \lim [1 + A(x)]^{\frac{1}{B(x)}} = e^{\lim \frac{A(x)}{B(x)}}.$

注 分母 $\beta(x), B(x)$ 不能取 0.

8. 不为零的无穷小的倒数为无穷大, 无穷大的倒数为无穷小.

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n > m \\ \infty, & n < m \end{cases}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax + b}{ax + c} \right)^{hx+k} = e^{\frac{(b-c)h}{a}}$$

11. 皮亚诺(Peano) 代换法

在求极限过程中, 可视情况将某些函数用它的马克劳林展开式来代替, 主要有:

$$(1) \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$(2) \quad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n}x^n + o(x^n).$$

$$(3) \quad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

$$(4) \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

$$(5) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

12. 设 $\lim \varphi(x) = 1, \lim \psi(x) = 0$, $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 可导, 且 $\lim \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\psi'(x)}$ 存在, 则

$$\lim \varphi(x)^{\frac{1}{\psi(x)}} = \exp \lim \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\psi'(x)}.$$

13. 设 $\lim \alpha = \lim \beta = 0$, 且 $\alpha - \beta \neq 0$, 则

$$\ln(1+\alpha) - \ln(1+\beta) \sim 2(\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{1+\beta}) \sim \alpha - \beta$$

14. 设 $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}$ 均为 $x \rightarrow x_0$ 的无穷小, 且 $\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$, 又 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = C (C \neq -1)$, 则 $\alpha + \beta \sim \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$.

15. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left[a + \frac{k}{n}(b-a)\right] \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx$.

二、客观题

(一) 填空题

【例 1】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x-2) - \ln(x+1)] = [\quad]$.

【解】 应填 -3. 因为

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^x = \ln \exp \left(\frac{-2-1}{1} \right) \cdot 1 = -3.$$

【例 2】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^p} = \frac{1}{2}$, 则 $p = [\quad]$.

【解】 应填 3. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^p}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(\cos x)x^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^{p-1}}.$$

故 $p-1=2$, 因此 $p=3$.

【例 3】 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - x \sin \frac{1}{x} \right) = [\quad]$.

【解】 应填 $\frac{1}{6}$. 因为可令 $\frac{1}{x} = t$. 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}t^3}{t^3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

【例4】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (1+t^2)e^{t^2-x^2} dt = [\quad]$.

【解】 应填 $\frac{1}{2}$. 因为应用洛比达法则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2-x^2} dt}{xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x^2)e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

练习 1-1

1 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{x^2 \int_{\frac{\pi}{6}}^x \sin t dt}{x - \frac{\pi}{6}} = [\quad]$.

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x} = [\quad]$.

3 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2^x}{\ln(1+2x)} - \frac{1}{\ln(1+2x)} \right] = [\quad]$.

4 $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} = [\quad]$.

5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^4}}{\ln(1+2x)} = [\quad]$.

6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9-x^2}}{\sin^2 x} = [\quad]$.

7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = [\quad]$.

8 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \cdot \cot x = [\quad]$.

9 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x - x}{2x + \cos x} = [\quad]$.

10 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{1 - 2\tan x} = [\quad]$.

(二) 选择题

【例1】 下列各式不正确的是 [].

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$;

(B) $\lim_{x \rightarrow 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0$;

(C) $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$;

(D) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

【解】 应选择 A. 因为 B, C 都是正确的, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

【例2】 设 $0 < a < b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = [\quad]$.

(A) a ; (B) b ; (C) 1 ; (D) $a+b$.

【解】 应选择 B. 因为 $\sqrt[n]{a^n + b^n} = b \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}$, 故原极限值为 b .

【例3】 求下列极限时, 能使用洛比达法则的是 [].

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$;

(B) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$;

(C) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$;

(D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$.

【解】 应选择 D. 因为此极限为 $\infty \cdot 0$ 型, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

C 不存在, 注意 $x \rightarrow \infty$ 包含 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ 两种情形. A, B 不满足洛比达法则的条件.

【例4】 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是[].

- (A) 无穷小; (B) 有界的, 但非无穷小;
(C) 无界的, 但非无穷大; (D) 无穷大.

【解】 应选择 C. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2}$ 是无穷大量, 而 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$. 有界变量与无穷大的乘积并不一定是无穷大. 实际上, $\sin \frac{1}{x}$ 当 $x = \frac{1}{2k\pi}$ ($k = 1, 2, \dots$) 时, 其值为 0; 当 $x = \frac{1}{2k\pi + \frac{1}{2}\pi}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时, 其值为 1. 故当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 既不是无穷小量, 又不是无穷大量, 也不是有界变量. 它是无界的.

练习 1-2

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 的值是[].

- (A) 1; (B) ∞ ; (C) 0; (D) 不存在.

2 无穷大量与有界量的关系是[].

- (A) 无穷大量可能是有界量; (B) 无穷大量一定不是有界量;
(C) 有界量可能是无穷大量; (D) 不是有界量就一定是无穷大量.

3 下面运算正确的是[].

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0;$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x \sin \frac{1}{x}\right)'}{(\cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos x}{\sin x}$ 不存在, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在;

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{x}}{\cos x} = 1;$

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \cdot 1 = 1.$

4 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = []$.

- (A) 0; (B) 1; (C) 不存在; (D) ∞ .

5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{|x|} - 1}{x} = []$.

- (A) 1; (B) -1; (C) 0; (D) 不存在.

三、主观题

(一) 利用代数方法求极限

【例1】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!}$.

【解】 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 3k + 2 - 1}{(k^2 + 3k + 2)k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+2)!} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right] = \frac{3}{2}.$$

【例2】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right)}{(n+1) + 2(n+2) + \cdots + n(n+n)}.$

【解】 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right)}{n(1+2+3+\cdots+n) + (1+2^2+3^2+\cdots+n^2)}.$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] / \left(1 - \frac{1}{2} \right)}{n \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{12}{5}.$$

【例3】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})], \quad (|x| < 1).$

【解】 此题应设法变形, 否则很难计算. 可以乘以因子 $\frac{1-x}{1-x}.$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^n})}{1-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

【例4】 设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2^4} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}} \right)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$

【解】 可以从例2和例3的解法中得到启发:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) x_n = \left(1 - \frac{1}{2^4} \right) \left(1 + \frac{1}{2^4} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}} \right) = 1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}} \right) = \frac{4}{3}.$$

练习 1-3

1 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 [e^{(2+\frac{1}{n})} + e^{(2-\frac{1}{n})} - 2e^2],$ 提示: 提取 $e^{(2-\frac{1}{n})}.$

2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right].$

3 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 - 1}.$

4 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}.$

5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3 \sqrt[3]{3 \sqrt[3]{3 \cdots \sqrt[3]{3}}}} \quad (\text{共有 } n \text{ 个根号}).$

6 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{1+u^3}}{1+u}.$

7 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n} - n\pi).$

8 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-nx}}{1 + e^{-nx}} \quad (x < 0).$

9 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}.$

10 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$

(二) 利用定义或准则研讨极限

【例1】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}.$

【解】 令 $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n \quad (h_n > 0),$ 则

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 + \cdots + h_n^n > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2. \text{ 即 } 0 < h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则 $h_n \rightarrow 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

实际上, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ 可以看成极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x}$ 的一种特例, 即取 x 为正整数列, 而对于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x}$ 是很容易利用洛比达法则求得其极限的.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = e^0 = 1.$$

另外, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 是一个很重要的结论, 它在以后的学习中还会用到.

【例2】 已知 $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, $x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$, $\dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ($a > 0$).

【解】 这是一个单调增加且有界的数列, 显然 $x_{n-1} < x_n$;

又 $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$, 于是 $x_n^2 = a + x_{n-1}$.

$x_n = \frac{a}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n} < \frac{a}{\sqrt{a}} + 1 = \sqrt{a} + 1$, 故 x_n 有界.

由极限存在准则 I, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 不妨假定 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a + x_{n-1}), \text{ 得 } A^2 = a + A, \text{ 解得 } A = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}.$$

由于 $a > 0$, 故负值舍去. 最后得 $A = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$.

【例3】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$.

【解】 $\frac{1+2+\dots+n}{n^2+n+n} \leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n+n} \leq \frac{1+2+\dots+n}{n^2+n+1}$,

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2+n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} = \frac{1}{2}$, 类似地 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2+n+1} = \frac{1}{2}$.

由夹逼准则 原式 $= \frac{1}{2}$.

【例4】 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_x^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt$.

【解】 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $1 - 2t^2 \leq \cos 2t \leq 1$. 所以当 $x > 1$ 时, 有

$$\int_x^1 \frac{1-2t^2}{4t^2} dt \leq \int_x^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq \int_x^1 \frac{1}{4t^2} dt$$

$$\text{即 } -\frac{3}{4x} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2x^2} \leq \frac{1}{x} \int_x^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4x}$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_x^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt = \frac{1}{4}.$$

练 习 1-4

1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots + \frac{1}{(2n)^3} \right)$.

2 $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

3 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a > 0$).

4 设 $x_1 > a > 0$, 且 $x_{n+1} = \sqrt{ax_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

5 设 $a_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n)^{\frac{1}{n}}$.

(三) 利用两个重要极限求极限

这里所说的两个重要极限是指 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

当然, 在解题过程中也可以利用其变形, 例如, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ 等.

【例1】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(x + \cos x^2) \ln(1+x)}$.

【解】 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + \cos x^2} \cdot \frac{2\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[2 \frac{\sin x}{x} + x \sin \frac{1}{x} \right] = 2.$

【例2】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$ ($a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$).

【解】 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3} \right)^{\frac{1}{a^x + b^x + c^x - 3} \cdot \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3} \cdot \frac{1}{x}}$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a^x - 1}{x} + \frac{b^x - 1}{x} + \frac{c^x - 1}{x} \right] = \frac{1}{3} (\ln a + \ln b + \ln c)$
 $= \frac{1}{3} \ln(abc)$

故原式 = $e^{\frac{1}{3} \ln(abc)} = (abc)^{\frac{1}{3}}.$

【例3】 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{2x+3}$.

【解】 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1} \right)^{\frac{2x+1}{2} \cdot 2+2}$
 $= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1} \right)^{\frac{2x+1}{2}} \right]^2 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1} \right)^2 \right) = e^2 \cdot 1 = e^2.$

【例4】 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{x+1} \right)^{\frac{4x}{x-1}}$.

【解】 原式 = $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\left(1 + \frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{x-1}} \right]^{\frac{4x}{x+1}}$
 $= \left[\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{x-1}} \right]^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x}{x+1}} = e^2.$

【例5】 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}$

【解】 注意到 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{\sin^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}t^2}{\sin^2 t} = -\frac{1}{2}$

令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

原式 = $\lim_{t \rightarrow 0} \left[1 + (\cos t - 1) \frac{1}{\cos t - 1} \right]^{\frac{\cos t - 1}{\sin^2 t} \cdot \cos^2 t} = e^{-\frac{1}{2}}$

练习 1-5

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}.$

3 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3 \sec x}.$

4 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{2x+1}.$

5 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x].$

6 设 a, b 为常数, 且 $a > 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{ax}) \ln\left(1 + \frac{b}{x}\right).$

(四) 利用等价替换求极限

【例 1】 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}.$

【解】 注意到 $x \rightarrow 1$ 时 $\sqrt[3]{x-1} \rightarrow 0, 2\sqrt[3]{x^2-1} \rightarrow 0$, 故

$$\ln(1 + \sqrt[3]{x-1}) \sim \sqrt[3]{x-1}, \arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1} \sim 2\sqrt[3]{x^2-1}.$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{2 \cdot \sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{x+1}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}.$$

此题若不利用等价无穷小替换, 则会遇到麻烦.

【例 2】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - e^{-x^2}}{\sin^4 2x}.$

【解】 这是呈 $\frac{0}{0}$ 型的未定式, 可以使用洛比达法则, 但是, 这样计算相当麻烦且很容易出现错误. 如果先做等价无穷小替换, 则会简洁得多.

因为 $\sin^4 2x \sim (2x)^4$, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - e^{-x^2}}{(2x)^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 2xe^{-x^2}}{64x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + e^{-x^2}}{32x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2xe^{-x^2}}{64x} = -\frac{1}{32}. \end{aligned}$$

【例 3】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$

【解】 原式 $= \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(5 - \frac{4}{\cos x}\right)}{(3x)^2}$

$$= \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4 \sin x}{\cos^2 x}}{\left(5 - \frac{4}{\cos x}\right) \cdot 18x} = e^{-\frac{2}{9}}.$$

【例 4】 求 $\lim_{x \rightarrow 1} [1 + 3 \tan(x-1)]^{\frac{1}{\ln x}}.$

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} [1 + 3 \tan(x-1)]^{\frac{1}{\ln(1+(x-1))}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} [1 + 3(x-1)]^{\frac{1}{x-1}} = e^3.$$

注意 这里使用了前面内容提要中补充的公式, 利用此公式可以简化许多计算, 例如

1 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}.$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{\tan x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}} = e.$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)^{\frac{x}{\sin x - x}} \right]^{\frac{\sin x - x}{x^3}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

注意这里 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$, $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$.

【例 5】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(e^{2x} - x^2) - 2x}.$

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - \ln e^x}{\ln(e^{2x} - x^2) - \ln e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sin^2 x}{e^x}\right)}{\ln\left(1 - \frac{x^2}{e^{2x}}\right)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x / e^x}{-x^2 / e^{2x}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot (e^x) = -1.$$

练习 1-6

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x \tan x} - 1}.$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}.$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^3 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}.$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^3} - 1}{1 - \cos \sqrt{x - \sin x}}.$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x \sin x}.$$

$$6 \quad a > 0, a \neq 1, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} \right).$$

(五) 利用洛比达法则求极限

【例 1】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - 1 - t)^2 dt}{x \sin^4 x}.$

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - 1 - t)^2 dt}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{5x^4}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - x - 1)(e^x - 1)}{20x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{10x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{20x} = \frac{1}{20}.$$

【例 2】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}.$

【解】 这是 1^∞ 型未定式,

注意到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{1} = 0$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)^{\frac{x}{\sin x - x}} \right]^{\frac{\sin x - x}{x^2}} = e^0 = 1.$

【例 3】 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{ax})}{2x + 3} \quad (a < 0)$

【解】 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{ax})}{2x + 3} = 0$, 而

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^{ax})}{2x+3}$ 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 使用洛比达法则

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^{ax})}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{ae^{ax}}{1+e^{ax}}}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^2 e^{ax}}{2ae^{ax}} = \frac{a}{2}.$$

故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+2e^{ax})}{2x+3}$ 不存在.

【例4】 求 $\lim_{x \rightarrow +0} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解】 这是 ∞^0 型未定式, 仍须利用取对数方法化成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

$$\text{令 } y = (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}, \quad \ln y = \frac{1}{\ln x} \ln \cot x = \frac{\ln \cot x}{\ln x}.$$

当 $x \rightarrow +0$ 时, 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 应用洛比达法则

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \cot x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{1}{\cot x} \cdot \csc^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \left(-\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = -1.$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow +0} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}.$$

此题利用“结论补充”的公式 12 立刻有

$$\text{原式} = \exp \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\csc^2 x}{(\cot x) \cdot \frac{1}{x}} = \exp \lim_{x \rightarrow +0} \left(-\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = e^{-1}.$$

练习 1-7

- 1 $\lim_{x \rightarrow +0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}.$
- 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} (a, b > 0).$
- 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}.$
- 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \int_0^x \cos(t^2) dt}{\sin^{10} x}.$
- 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x - 1)^3}{\int_x^0 \tan(t^2) dt}.$

(六) 确定极限式中的常数

【例1】 求 a 值, 使 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \int_{-\infty}^a te^{2t} dt.$

$$\text{【解】 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^{\frac{x-a}{2a} \cdot 2a+a} = e^{2a},$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int_{-\infty}^a te^{2t} dt &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a te^{2t} dt \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} te^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t} \right) \Big|_c^a = \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{4} \right) e^{2a} \end{aligned}$$

$$\text{令 } e^{2a} = \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{4} \right) e^{2a} \text{ 得 } a = \frac{5}{2}.$$

【例2】 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1-x} = 5$, 求 a 与 b 的值.