医学基础系列教材

YIXUE JICHU XILIE JIAOCAI

医学物理实验

YIXUE WULI SHIYAN

主编 李宾中 副主编 曾林泽 张益珍

四川大学出版社

医学基础系列教材

（供基础、临床、预防、口腔、法医、检验、护理等医学类专业用）

医学物理实验

主　编　李宾中

副主编　曾林泽　张益珍

四川大学出版社

责任编辑：王　锋
责任校对：韩　果
封面设计：罗　光
责任印制：李　平

图书在版编目（CIP）数据

医学物理实验／李宾中主编．—成都：四川大学出版社，2004.1
ISBN 7-5614-2758-1

Ⅰ．医…　Ⅱ．李…　Ⅲ．医用物理学－实验－医学院校－教材　Ⅳ．R312-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 002293 号

书名　**医学物理实验**

主　编	李宾中
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号（610065）
印　刷	华西医科大学印刷厂
发　行	四川大学出版社
开　本	787mm×1 092mm　1/16
印　张	10
字　数	214 千字
版　次	2004 年 2 月第 1 版
印　次	2004 年 2 月第 1 次印刷
印　数	0 001～3 000 册
定　价	15.00 元

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。电话：85408408/85401670/85408023　邮政编码：610065
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回出版社调换。
◆网址：www. scupress. com. cn

前　言

物理学是自然科学中最重要、最活跃的带头学科之一，也是许多新兴学科、交叉学科和新技术产生、成长、发展的基础和前导。

物理实验的思想、方法、技术和装置常常是自然科学研究和工程技术发展的新起点，而高新技术的发展，又不断推动着实验物理研究手段、方法和装备的改进，加大着人类对物质世界认识的深度和广度。

物理学的大多数定律都建立在严格的实验基础之上，即使在已有物理知识的基础上，通过大胆假设和逻辑推理建立起来的物理学新理论，也必须通过实验来验证。物理实验课教学还担负着培养学生的基本操作技能、独立进行科学实验的能力和良好的科研作风的任务。所以，物理实验课教学是物理学教学中不可或缺的重要组成部分。

我们根据全国医用物理学教学大纲的基本精神，借鉴国内兄弟院校的相关经验，并考虑到近年来物理学教学内容的新进展，编写了这本实验教材。本教材系统地介绍了物理实验的基本方法和基本技能，适当增加了与医学关系密切的新内容。各实验都有明确的目的和要求，并有简明扼要的实验原理和操作步骤，对数据的处理和误差的计算作出了严格的规范，这有利于学生自学，也有利于培养学生独立思考、分析和解决实际问题的能力。考虑到各校实验设备状况的不同，在教材编写过程中对实验内容进行了一定的取舍。

本教材主要供高等医学院校中临床医学、儿科、口腔、卫生、卫生检验、医学检验、预防医学、中医等专业使用，也可供中等卫生学校的师生参考。

本教材由李宾中（川北医学院）主编，曾林泽（川北医学院）、张益珍（四川大学）任副主编。参加编写工作的还有李宜贵（四川大学）、薛晋惠（川北医学院）、雍杰（川北医学院）等同志。胡旭（川北医学院）为本书绘制了大部分插图。

由于编者的知识和能力有限，加之时间仓促，教材中的缺点和错误在所难免，恳切希望读者给予批评指正。

编　者

2003 年 11 月

目 录

第一章　绪　论

科学实验是科学理论的源泉，是工程技术和应用的基础。作为未来的高级人才，不仅应具备深厚的理论知识基础，而且还应具有较强的从事科学实验的能力，这才能适应科学技术飞速发展和社会不断进步的需要。

由于物理学所研究的规律在自然界中具有最基本、最普遍的意义，从而决定了物理学是各门科学技术的基础。现代医学广泛运用物理学的原理、方法和技术，物理学已成为现代医学不可缺少的基础。因此，医学生应该学好物理学，做好物理实验，在科学实验能力和方法上得到系统的训练和培养，为学习后续课程和将来从事专业工作打下坚实的基础。

一、医学物理实验的目的、任务和要求

物理学是一门实验科学。物理实验教学与物理理论教学具有同等重要的地位，它们既有深刻的内在联系，又有各自的任务和作用。医学物理实验既是医学物理学的重要组成部分，又由于它本身特有的目的和任务而具有相对独立性。

1. 医学物理实验的教学目的和任务

（1）通过对实验现象的观察、分析和对物理量的测量，学习物理知识，加深对物理学原理的认识和理解；使学生掌握基本的实验方法、实验技能和基本物理量的测量原理及方法，正确合理地使用仪器，为后继课程的学习打下牢固的基础。

（2）培养与提高学生的科学实验能力。注重培养并逐步提高学生对实验现象的观察和分析能力，以及理论联系实际的综合分析能力。这其中包括：能够通过阅读实验教材或资料，做好实验前的准备；能够借助教材或仪器说明书正确使用常用仪器；能够运用物理学理论对实验现象进行初步的分析和判断；能够正确记录和处理实验数据，绘制曲线，说明实验结果，撰写合格的实验报告。

（3）培养与提高学生的科学实验素养。要求学生具有理论联系实际和实事求是的科学作风，严肃认真的工作态度，主动研究的探索精神，遵守纪律、团结协作和爱护公物的优良品德。

物理实验是一门实践性课程，学生在教师指导下通过主动、独立地完成实验课题来增长知识，提高能力。因而，上述教学目的的达到水平在很大程度上取决于学生自己的主动精神和努力程度。希望同学们积极思考、认真学习，学好物理实验课。

2. 医学物理实验的教学要求

为达到教学目的，完成好物理实验，应该做到以下几点：

(1) 课前预习。实验前必须预习实验内容，做好实验准备工作。通过预习实验教材、参考资料，弄清实验目的、实验原理和仪器性能，了解实验要求及实验中应特别注意的问题。在此基础上，写出简要的预习报告，内容包括：实验名称、目的、仪器、简要的原理和计算公式、记录测试数据的表格，以及简单的电路图或光路图等。

(2) 实验操作。在动手操作前应首先认识和熟悉有关仪器，了解使用方法。实验要按步骤进行。在正式获取实验数据之前，要把仪器设备调试到最佳工作状态。要明确每一步操作的意义，切忌盲目操作。要认真观察实验现象，正确记录数据。实验中若出现不正常情况，应及时请教老师，不要自己随意处理。实验完毕，应将仪器设备整理复原后方可离开实验室。

(3) 撰写实验报告。做完实验后，应及时处理实验数据，根据要求，写出实验报告。实验报告包括以下内容：①实验名称、日期；②实验目的；③仪器设备；④简要的实验原理、计算公式及必要的示意图；⑤简要的操作步骤；⑥数据记录及处理（包括实验曲线）；⑦实验讨论。实验报告应力求文字简练、通顺，数据齐全，图表规范正确。

二、重视物理实验的观察

实验的观察是实验过程中内容最丰富、思想最活跃、最具有特色的部分。通过观察，由表及里、由此及彼，丰富测量数据的物理内涵。一个实验素养高的实验者善于从观察中去感觉、思考、分析、总结、认识和发现问题。

任何事物和规律都是通过相应的现象表现出来的，实验就是通过对这些现象的观察和测量来认识它们的，所以，整个实验过程离不开观察。是否重视实验观察也反映了实验者的实验素养。观察所得信息越全面、越客观，对事物及其规律的认识就越深刻、越正确。

物理学史上一系列著名的发现，都源于物理学家们丰富的知识和高超的实验素养。他们善于通过实验观察获得重要发现，或是抓住偶然机遇凭着敏锐的洞察力取得意外的发现。例如，牛顿对苹果落地现象的观察，促使他思考，并发现了万有引力定律。一个有准备、有目的、有设想的实验者与一个盲目的实验者在实验素养和实验收获上是有天壤之别的。

实验观察在整个实验过程中是十分重要的，希望同学们在实验中要十分重视实验观察，力争做到全面、准确地观察，并注意思考、分析、总结，以求有所发现。

三、测量误差与实验数据处理

物理实验的定性观察和定量测定是不可分割的两个方面，为了揭示物理量间的内在

数量关系，需要运用测量器具对物理量进行测量。在实际测量中，总会有误差。随着科学技术的发展，虽然可以将误差控制得愈来愈小，但误差仍然不可避免。

误差理论是计量科学的重要组成部分。本课程仅就物理实验中要涉及的误差理论的基本知识作一介绍，以使同学们对误差理论有一个基本认识，并能将这种认识运用于实验数据的处理中。

误差贯穿于实验过程的始终，因此，在整个实验过程中都必须考虑误差的影响并控制好各个环节的误差，以得到最佳的实验结果。希望同学们高度重视误差理论的学习和实验数据的处理，提高实验素养。

（一）测量与误差的基本知识

1. 测量

在日常生活、生产、工作以及科学实验等活动中，常常需要定量地确定某些量，即测量。所谓测量就是将待测量与同类已知标准量进行比较，所得的倍数即是待测量的测量值，其单位是标准量的单位。比如，测量某一物体的长度，就是将该物体长度的测量值与标准量（米）进行比较，其倍数就是该物体的长度，单位是标准量（米）。

测量从形式上可分为直接测量和间接测量两类。

直接测量是指将待测量直接与同类已知标准量进行比较，直接得出测量值的一种测量方式。它不必进行任何物理及数学函数的运算，用量具或仪表直接读出测量值。如用米尺测量物体的长度，用量筒测量液体的体积，用天平测量物体的质量，用万用电表测量电流或电压，用钟表计时等等，这些测量都属直接测量。

间接测量是指通过直接测量与被测量有物理关系或数学函数关系的其他量，再经运算后得到待测量的测量值的一种测量方式。实际上，大多数的物理量都不能直接测量，而只能间接测量。如测量物质的密度，测量某矩形的面积，测量火车的运行速度，测量光波的波长等等，这些测量都属间接测量。

无论直接测量还是间接测量都可分为单次测量和多次测量。多次测量又分为等精度测量和不等精度测量。实验中对同一待测量，用同一仪器（或精度相同的仪器），在同一实验条件下进行的多次测量称为等精度测量，否则，称为不等精度测量。等精度测量得到的各个测量值的可靠性是相同的。

2. 误差

每一个物理量都是客观存在的事实，在一定条件下，具有不以人的意志为转移的固定值，这个客观存在的固定值就是该物理量的真实值，简称真值。任何测量，不管仪器多么精密，测量方法多么完善，测量进行得多么仔细，测量结果与被测物理量的真值之间总会有一定的差异。这种测量值与被测量真值之间的偏差称为测量误差，简称误差。

设待测量的真值为 A，测量值为 X，则其误差 ΔX 为

$$\Delta X = X - A \tag{0-1}$$

误差不但反映了测量值偏离真值的大小，而且还反映了是偏大还是偏小。

值得指出的是：被测量的真值是指在一定条件下，被测量客观存在的真实大小，它是一个理想概念，通常包括：理论真值、公认真值、计量学约定真值和标准器相对真值。但是在多数情况下，特别是在研究性的实验中，被测量的真值往往都是未知的，实验的目的就是采用科学的方法测得其“真值”，探索其规律。

任何测量所得到的数据都包含一定的误差，没有误差的测量是不存在的。因此，有必要进一步研究误差的性质、产生的原因，以便采取措施来减小误差，获得最佳的实验结果。

根据误差的性质和产生的原因，可将误差分为：系统误差、偶然误差和过失误差等。

（1）系统误差。系统误差是指在对同一被测量的多次测量中，保持相对恒定或以可预知方式变化的测量误差。系统误差的特征是：在同一条件下，多次测量同一被测量时，误差的绝对值和方向保持恒定；或在条件改变时，误差的绝对值和方向按一定规律变化。例如，计时的秒表走快或走慢；游标卡尺存在零位误差时，其读数总是偏大或偏小；万用电表没有校准时，其读数也总是偏大或偏小；等等。

产生系统误差的原因是：① 器具误差与调整误差。由于测量器具本身具有的误差所引起的误差，以及由于测量前未能将测量器具或被测对象调整到正确位置或状态所引起的误差，如砝码的质量不准、仪表的零点不准或零点漂移等。② 理论误差与方法误差。由于测量理论的近似或测量方法的不完善所引起的误差，如公式的近似性较差，达不到理论要求的条件。③ 环境误差。由于实际环境条件与所要求的环境条件不一致所引起的误差，如环境温度、接触电阻、空气浮力等的影响。④ 人员误差。由于测量人员主观因素和操作技术所引起的误差，如测量人员个人的生理和心理特点及操作特点造成的读数总是偏大或偏小。

对系统误差应设法减小或消除。为此，应选用精度较高的仪器，改进实验的设计并改变测量者读数的不良习惯。

（2）偶然误差。偶然误差是指在对同一量的测量过程中，以不可预知方式变化的测量误差，也叫随机误差。偶然误差的特征是其随机性，测量值比真值时而偏大时而偏小，时正时负，其变化不可预知。单次测量的数据所包含的偶然误差是不可预知的，但多次测量所得的大量数据中所包含的偶然误差是服从一定的统计规律的。常见的情况是测量值比真值偏大或偏小的几率相等，小误差比大误差出现的几率大，绝对值很大的误差出现的几率小。

产生偶然误差的原因主要是人们感观（如听觉、视觉、触觉等）的分辨力不尽相同，表现为每个人的估读能力不一致；周围环境因素的偶然变化（如环境温度、气流、气压等的波动，杂散电磁场的干扰），以及其他不可预测的次要因素的影响。偶然误差是不可避免的，也是无法控制的，但因为偶然误差的出现服从一定的统计规律，所以可以通过增加测量次数，取平均值的办法来减小偶然误差。

（3）过失误差。过失误差是指由于测量者粗心大意，或发生实验条件突变，或因实验方法错误而引起的误差，也叫粗差。这种误差应当而且能够通过端正实验者的实验态度，改进实验方法而加以克服。在科学实验中，应将粗差剔除，以提高测量的可靠性。刚进入实验阶段的学生，由于缺乏实验经验，容易出现粗差。因而，学生应在教师指导下，不断总结经验，提高实验素养，努力防止粗差的出现。

实验中，通常用"精密度"这个概念来反映偶然误差的大小程度，用"正确度"来反映系统误差的大小程度，用"准确度"来综合评定测量数据的精密度与正确度。"准确度"有时也简称为"精度"。

3. 偶然误差的估算

系统误差和过失误差可以通过采取适当的措施来减小或消除，但测量值中包含的偶然误差是不可避免的。

偶然误差符合正态分布的统计规律，它具有：单峰性、有界性、对称性和抵偿性等特性。1795年德国物理学家高斯从数学上推导出了偶然误差出现的概率密度函数——高斯分布函数，也叫正态分布函数，即偶然误差符合正态分布规律。

理论上，在消除系统误差后，通过对被测量无穷多次的等精度测量所得的测量值列求算术平均值，即可得到其真值，其数学表达式为

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

误差理论中，常用标准误差来量度偶然误差散布的情况，标准误差的数学表达式为

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - A)^2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2} \qquad (0-2)$$

即标准误差是无穷多次测量所产生的偶然误差的方均根值。

实际上，测量不可能进行无限多次，只能是有限次，因此要确定真值和标准误差是不可能的。然而，根据统计学知识可知，有限次测量的测量值是从无限次测量结果（总体）中抽出的一个样本，样本在一定程度上必然带有总体的信息，因此，可以利用样本来估计总体分布的两个特征值：真值和标准误差。

（1）真值的最佳估计值——算术平均值。即使在实验中已将系统误差消减到可以忽略的程度，通过等精度测量得到的一系列测量值（x_1，x_2，…，x_n）依然会含有偶然误差。偶然误差有一个极其重要的特性：抵偿性，即在一系列等精度测量中，由于每次测量值的误差时大时小，时正时负，所以误差的算术平均值随着测量次数 n 的无限增加而趋于零。

在测量条件不变时，如果对待测量进行了 n 次等精度测量，获得了 n 个测量值 x_1，x_2，…，x_n，则该列测量值的算术平均值为

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \quad (i = 1,2,\cdots,n) \qquad (0-3)$$

而各次测量值的（绝对）误差为

$$\Delta x_i = x_i - A \tag{0-4}$$

式中 A 为被测量的真值，x_i 为第 i 次测量值。由（0-4）式知，对 n 次测量的（绝对）误差求和得

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - nA$$

上式两边各除以 n，可得 n 次测量（绝对）误差的算术平均值为

$$\overline{\Delta X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - A = \overline{X} - A \tag{0-5}$$

由偶然误差的特性可知，当测量次数 $n \to \infty$ 时，误差的算术平均值 $\overline{\Delta X}$ 也趋于零，即 $\overline{\Delta X} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \to 0$，于是（0-5）式变为

$$\overline{X} \to A \tag{0-6}$$

由上式可知，在系统误差消减到可以忽略的情况下，多次测量的算术平均值 $\overline{X}$ 是真值 A 的最佳估计值。最佳估计值也叫近真值，它是最可能接近被测量真值的值。若测量次数无限增加，算术平均值就将无限接近真值。

（2）标准误差的最佳估计值——标准偏差。在实际测量中经常引入偏差的概念，也称残余误差。偏差是指在测量列（x_1，x_2，…，x_n）中的某一个测量值 x_i 和该测量列的算术平均值 $\overline{X}$ 之差，即

$$\Delta u_i = x_i - \overline{X} \tag{0-7}$$

它与各次测量值的误差概念（0-4）式是有区别的。我们把 n 次测量偏差的绝对值的算术平均值称为算术平均偏差，表示为

$$\overline{\Delta U} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\Delta u_i| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{X}| \tag{0-8}$$

实际中还经常用到另一个概念——标准偏差。根据数理统计理论，等精度的测量列 x_1，x_2，…，x_n 的标准偏差（贝塞尔法）为

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \Delta u_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2} \tag{0-9}$$

上式也称为贝塞尔公式，是计算测量结果不确定度时很有用的公式。标准偏差表征对同一被测量作 n 次有限测量时，其结果的分散程度。

由（0-2），（0-7）和（0-9）式经必要的数理推导，可得

$$\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta u_i^2} \approx \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}$$

显然，当 $n \to \infty$ 时，由上式可得

$$S \to \sigma \tag{0-10}$$

所以 S 是从有限次测量中计算出来的对总体标准误差 σ 的最佳估计值。S 也称为实验标准偏差或样本标准偏差。

算术平均偏差与标准偏差都可作为测定值误差的量度。它们都表示在一列多次测量的数据中，各个数据之间分散的程度。如果算术平均偏差与标准偏差较大，则各数据之间差别较大，这说明测量不精密，偶然误差较大。

必须指出，误差是测量值与真值之差，而偏差是测量值与平均值之差，这两者是有区别的。但当测量次数很多时，在仪器精确可靠的条件下，算术平均值很接近于真值。我们不必去区分偏差与误差的细微差别，在后面的叙述中，有时没有加以区别。

4. 测量结果的表示

测量与误差形影相随，一般情况下误差不可能确切知道。为了完善地说明测量结果，在报道被测量数值的同时，还应示出测量结果的可信赖程度。实验测量结果的最终表达式，必须具有数值、数值的可信程度和单位，这些是实验结果的三要素。通常把测量结果表示为如下的简洁形式：

$$X = \overline{X} \pm U \tag{0-11}$$

式中，X 代表被测量值，$\overline{X}$是被测量值真值的最佳估计值（算术平均值），U 是测量结果的不确定度，用于表示测量结果的准确程度，可以用算术平均偏差或标准偏差来表示。在更一般的情况下，甚至还应说明 U 对应的概率。

测量不确定度是衡量测量质量的一个重要指标。测量结果的不确定度划出了最佳估计值附近的一个范围，真值以一定概率落在其中。不确定度越小，标志着测量的可信赖程度越高；不确定度越大，标志着测量的可信赖程度越低。

（0-11）式的意义是被测量的真值以一定的概率存在于（$\overline{X}-U$）~（$\overline{X}+U$）范围之内。

测量结果的最终表达式亦可用相对不确定度 U_r 来表示，即

$$X = \overline{X}(1 \pm U_r) \tag{0-12}$$

式中 U_r 为相对不确定度，即

$$U_r = \frac{U}{\overline{X}} \tag{0-13}$$

它是测量列的不确定度 U 与算术平均值 $\overline{X}$ 的比值，表示不确定度的相对大小。

5. **直接测量的结果表达式和误差估算**

(1) 直接测量的最佳估计值。在直接测量中，对同一物理量应当进行多次测量，以减小偶然误差。若进行了 n 次测量，得到 n 个测量值 x_1，x_2，…，x_n，则该列测量值的算术平均值是该直接测量值的最佳估计值，由 (0-3) 式得

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{0-14}$$

(2) 直接测量的误差估算。单次直接测量的误差估算：在物理实验中，由于条件不许可，或测量准确度要求不高等原因，对一个物理量的直接测量只进行了 1 次。在这种情况下，可将仪器出厂检定书上或仪器上直接注明的仪器误差作为单次测量的误差。如果没有注明仪器误差，也可取仪器最小刻度的一半作为单次测量的误差。

多次直接测量的误差估算：一般情况下，为了减小偶然误差，在可能的情况下，都要进行多次测量。如果不区分偏差与误差的细微差别，则多次测量值的误差可用算术平均偏差来表示，由 (0-8) 式可得

$$\overline{\Delta X} = \frac{1}{n}(|x_1 - \overline{X}| + |x_2 - \overline{X}| + \cdots + |x_n - \overline{X}|) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{X}| \tag{0-15}$$

上述算术平均误差或标准误差都是以误差的绝对值来表示测定值的误差，称为绝对误差。它表示误差的绝对大小，$\overline{\Delta X}$ 也可称为平均绝对误差。测量结果的精度不仅与绝对误差有关，而且与待测量本身的大小有关。为此引入相对误差的概念，它表示误差的相对大小。用 E_r 表示相对误差，其定义为

$$E_r = \frac{\overline{\Delta X}}{\overline{X}} \tag{0-16}$$

如果是重复前人的实验，或有完善的理论值，则将算术平均值 $\overline{X}$ 与公认值 B（或理论值）进行比较，此时相对误差表示为

$$E_r = \frac{\overline{X} - B}{\overline{X}} \times 100\% \tag{0-17}$$

通常用百分数来表示相对误差，称为百分误差。

(3) 直接测量的结果表达式。在得到了直接测量的最佳估计值和误差后，我们就可以写出直接测量结果的最终表达式，由 (0-11) 和 (0-12) 式得

$$X = \overline{X} \pm \overline{\Delta X} \tag{0-18}$$

或

$$X = \overline{X}(1 \pm E_r) \tag{0-19}$$

6. **间接测量的结果表达式和误差计算**

物理实验中，大量的实验属于间接测量。只有在已知相关各直接测量的最佳估计值

及其误差后，才能计算间接测量的最佳估计值和误差。

设间接测量值 N 与直接测量值（x，y，z，…）之间有函数关系，其形式如下

$$N = f(x, y, z, \cdots) \tag{0-20}$$

上式中 N 不能直接测量，而 x，y，z，…可以直接测量。

（1）间接测量的最佳估计值。间接测量的算术平均值是其最佳估计值。把直接测量的最佳估计值代入函数关系式，即可算出间接测量的最佳估计值，即

$$\overline{N} = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \cdots) \tag{0-21}$$

例 0-1 用单摆测重力加速度 g 时，重力加速度 g 与摆长 l 和周期 T 之间的函数关系是

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

其中 g 是间接测量值，l 和 T 是直接测量值。求重力加速度的最佳估计值 $\overline{g}$。

解： 由（0-14）式可计算出 l 和 T 的最佳估计值 $\overline{l}$ 和 $\overline{T}$，然后由（0-21）式就可算出重力加速度 g 的最佳估计值 $\overline{g}$

$$\overline{g} = 4\pi^2 \frac{\overline{l}}{\overline{T}^2}$$

（2）间接测量的误差估算。由高等数学知识，通过对间接测量值与直接测量值之间的函数关系求全微分便可求出间接测量的误差传递与合成的基本规律。由（0-20）式，得

$$\mathrm{d}N = \frac{\partial f(x, y, z, \cdots)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x, y, z, \cdots)}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f(x, y, z, \cdots)}{\partial z}\mathrm{d}z + \cdots \tag{0-22}$$

式中（$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$，…）是自变量（x，y，z，…）的微分，而 $\frac{\partial f(x, y, z, \cdots)}{\partial x}$，$\frac{\partial f(x, y, z, \cdots)}{\partial y}$，$\frac{\partial f(x, y, z, \cdots)}{\partial z}$，…是函数对各自变量（$x$，$y$，$z$，…）的偏导数。

当近似计算时，常将自变量微分（$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$，…）改写成（Δx，Δy，Δz，…），$\mathrm{d}N$ 改写为 ΔN，于是函数变化量 ΔN 与自变量变化量（Δx，Δy，Δz，…）之间的关系便可写成

$$\Delta N = \frac{\partial N}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial N}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial N}{\partial z}\Delta z + \cdots \tag{0-23}$$

这就是间接测量的误差传递与合成的基本公式。式中 ΔN 是间接测量值 N 的绝对误差，（Δx，Δy，Δz，…）是直接测量值（x，y，z，…）的绝对误差，$\frac{\partial N}{\partial x}\Delta x$，$\frac{\partial N}{\partial y}\Delta y$，$\frac{\partial N}{\partial z}$

Δz，…的各项叫做分误差；$\frac{\partial N}{\partial x}$，$\frac{\partial N}{\partial y}$，$\frac{\partial N}{\partial z}$，…为误差的传递系数。

实际处理实验数据时，首先由（0－15）式求出直接测量值的平均绝对误差（$\overline{\Delta x}$，$\overline{\Delta y}$，$\overline{\Delta z}$，…），然后由（0－23）式即可求得间接测量值的平均绝对误差$\overline{\Delta N}$

$$\overline{\Delta N} = \frac{\partial N}{\partial x}\overline{\Delta x} + \frac{\partial N}{\partial y}\overline{\Delta y} + \frac{\partial N}{\partial z}\overline{\Delta z} + \cdots \qquad (0-24)$$

将（0－21）和（0－24）式代入（0－16）式可求得间接测量值的相对误差

$$E_r = \frac{\overline{\Delta N}}{\overline{N}} = \frac{1}{\overline{N}}\left(\frac{\partial N}{\partial x}\overline{\Delta x} + \frac{\partial N}{\partial y}\overline{\Delta y} + \frac{\partial N}{\partial z}\overline{\Delta z} + \cdots\right) \qquad (0-25)$$

（0－24）和（0－25）式就是我们在实际处理间接测量数据时经常用到的间接测量值的平均绝对误差和相对误差的计算公式。

（3）间接测量的结果表达式。在得到了间接测量的最佳估计值和误差后，就可以写出间接测量结果的最终表达式。由（0－11）和（0－12）式并考虑到（0－21）、（0－24）和（0－25）式得

$$N = \overline{N} \pm \overline{\Delta N} \qquad (0-26)$$

或

$$N = \overline{N}(1 \pm E_r) \qquad (0-27)$$

例 0－2 已知圆柱体的体积 V、直径 d 和高 h 之间的函数关系是

$$V = \frac{\pi}{4}d^2h$$

其中，V 是间接测量值，d 和 h 是直接测量值。求体积 V 的最佳估计值 $\overline{V}$、平均绝对误差 $\overline{\Delta V}$ 和相对误差 E_r。

解：由（0－14）式可计算出 d 和 h 的最佳估计值 $\overline{d}$ 和 $\overline{h}$，然后由（0－21）式就可算出体积 V 的最佳估计值 $\overline{V}$，即

$$\overline{V} = \frac{\pi}{4}\overline{d}^2\,\overline{h}$$

由（0－15）式求出直接测量值 d 和 h 的平均绝对误差 $\overline{\Delta d}$ 和$\overline{\Delta h}$，然后由（0－24）式即可求得体积的平均绝对误差$\overline{\Delta V}$，即

$$\overline{\Delta V} = \frac{\pi}{4}(2\overline{hd}\,\overline{\Delta d} + \overline{d}^2\,\overline{\Delta h})$$

由（0－25）式可得体积的相对误差 E_r 为

$$E_r = \frac{\overline{\Delta V}}{\overline{V}} = 2\frac{\overline{\Delta d}}{\overline{d}} + \frac{\overline{\Delta h}}{\overline{h}}$$

在实际计算中发现，误差合成时起主要作用的常常只是其中一两项或少数几项分误差。当分误差对总误差的贡献很小时，例如占总误差的 1/10 以下，就可把这项分误差略去不计。考虑到这种情况，在实际测量时，对与主要分误差相关的直接测量值，也应使其有较高的精确度，而对其他直接测量值，其精度要求可低一些。表 0－1 列出了常用函数的误差传递合成公式。

表 0－1 常用函数关系的误差计算公式

函数关系 $N=f(x, y, z, \cdots)$	平均绝对误差 $\overline{\Delta N}$	相对误差 $E_r=\dfrac{\overline{\Delta N}}{\overline{N}}$
$N=x+y+z+\cdots$	$\overline{\Delta x}+\overline{\Delta y}+\overline{\Delta z}+\cdots$	$\dfrac{\overline{\Delta x}+\overline{\Delta y}+\overline{\Delta z}+\cdots}{\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\cdots}$
$N=x-y$	$\overline{\Delta x}+\overline{\Delta y}$	$\dfrac{\overline{\Delta x}+\overline{\Delta y}}{\overline{x}-\overline{y}}$
$N=x\cdot y\cdot z$	$\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{\Delta x}+\overline{x}\cdot\overline{z}\cdot\overline{\Delta y}+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{\Delta z}$	$\dfrac{\overline{\Delta x}}{\overline{x}}+\dfrac{\overline{\Delta y}}{\overline{y}}+\dfrac{\overline{\Delta z}}{\overline{z}}$
$N=x^n$	$n\cdot\overline{x}^{n-1}\cdot\overline{\Delta x}$	$n\dfrac{\overline{\Delta x}}{\overline{x}}$
$N=\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n}\cdot\overline{x}^{1/n-1}\cdot\overline{\Delta x}$	$\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\overline{\Delta x}}{\overline{x}}$
$N=\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{\overline{y}\cdot\overline{\Delta x}+\overline{x}\cdot\overline{\Delta y}}{\overline{y}^2}$	$\dfrac{\overline{\Delta x}}{\overline{x}}+\dfrac{\overline{\Delta y}}{\overline{y}}$
$N=\sin x$	$(\cos\overline{x})\cdot\overline{\Delta x}$	$(\cot\overline{x})\cdot\overline{\Delta x}$
$N=\cos x$	$(\sin\overline{x})\cdot\overline{\Delta x}$	$(\tan\overline{x})\cdot\overline{\Delta x}$
$N=\tan x$	$\dfrac{\overline{\Delta x}}{\cos^2\overline{x}}$	$\dfrac{2\overline{\Delta x}}{\sin 2\overline{x}}$
$N=\cot x$	$\dfrac{\overline{\Delta x}}{\sin^2\overline{x}}$	$\dfrac{2\overline{\Delta x}}{\sin 2\overline{x}}$
$N=\ln x$	$\dfrac{\overline{\Delta x}}{\overline{x}}$	$\dfrac{\overline{\Delta x}}{\overline{x}\ln\overline{x}}$

（二）有效数字

在实验中，对物理量进行测量，所得的测量值都是含有误差的，对这些数字不能任意取舍，应使其反映出测量值的准确度。在记录数据、计算以及书写测量值时，究竟应写出几位数字有严格的要求，要根据使用的器具、测量误差、实验结果的误差来确定。在物理实验中，无论是从仪器上直接读出的数据还是用于表示测量结果的数据，都要用有效数字表述。

实验的数据记录、数据运算以及实验结果的表达，都必须遵从有效数字的规则。