各类成人高考复习指导丛书

数学

第二分册 理科用

FX

高等教育出版社

各类成人高考复习指导丛书

数　　学

第二分册——理工农医类通用

孙成基　主编

高等教育出版社

目　录

第十三章　数列的极限与数学归纳法

[本章要求]

1. 理解数列极限的概念

2. 掌握数列极限的四则运算法则，并能求一些数列的极限.

3. 掌握无穷递缩等比（即公比 q 的绝对值小于 1）数列的求和公式及其简单应用.

4. 理解数学归纳法的证明原理，能用数学归纳法证明一些与自然数有关的命题.

[内容提要]

1. 数列的极限

(1) **定义**　对于一个无穷数列 $\{a_n\}$，如果存在一个常数 A，无论预先指定多么小的正数 ε，都能在数列中找到一项 a_N，使得这一项后面的所有项与 A 的差的绝对值都小于 ε（即当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立），就把常数 A 叫做数列 $\{a_n\}$ 的**极限**，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$.

常数数列的极限就是这个数本身.

(2) 数列极限的四则运算

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=B$，那么，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=AB;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}\quad (B\neq 0).$$

在乘法的极限运算中，特别有

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = cA \quad (c\text{ 为常数}).$$

(3) 无穷递缩等比数列

等比数列 a, aq, aq^2, $\cdots$, 在 $|q|<1$ 时，叫做**无穷递缩等比数列**．在无穷递缩等比数列中，前 n 项和 S_n 当 $n\to\infty$ 时的极限叫做这个无穷递缩等比数列的**和**，用符号 S 表示，并且有

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-q}.$$

2．数学归纳法

数学归纳法是数学中一种重要的证明方法，常用来证明与自然数 n 有关的数学命题．用数学归纳法证明的一般步骤是：

(1) 先验证命题当 n 取第一个值 N(例如 $N=1$ 或 $N=2$ 等)时，这个命题的结论是正确的；

(2) 假定命题当 n 取值为某一个自然数 k(即 $n=k$)时，这个命题的结论是正确的，在这个假设下证明 $n=k+1$ 时，这个命题的结论也正确．

在完成了这两个步骤以后，就可以断定，命题对于从 N 开始的所有自然数 n 都成立．

数学归纳法中，第一步是递推的基础，第二步是递推的根据，两步缺一不可．

[例题及解题指导]

例 1 证明数列 $\{q^n\}$ 的极限为 0，其中 $|q|<1$

证明 $|a_n-0|=|q^n|=|q|^n$.

对于任意给定的正数 ε，要使 $|q|^n<\varepsilon$，只要两边取以 10 为底的对数

$$n\lg|q|<\lg\varepsilon,$$

只要

$$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}. \qquad ①$$

这时只需取 $\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$ 的整数部分，设它为 N. 于是第 N 项后面所有的项与0的差的绝对值都小于正数 ε. 因此，根据数列极限的定义，数列 $\{q^n\}$ 的极限是0，其中 $|q|<1$.

说明 上面证明中，由于 $|q|<1$, $\lg|q|<0$. 从而不等式①的不等号改变方向.

例2 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}$.

因为 $$\lim_{n\to\infty}1=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)=1.$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

说明 (1)中利用差的极限运算法则归结为求常数数列与数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的极限,而已知$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的极限为0. (2)中因有无穷多项,所以不能用极限运算法则.本题利用等差数列求和的办法计算.

例3 (1) 求无穷递缩等比数列

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1},\ 1,\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1},\ \cdots$$

的和.

(2) 化$0.4\dot{7}$为分数.

解 (1) 因为

$$a=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1},\quad q=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}.$$

所以

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{5+3\sqrt{3}}{2}.$$

(2) $0.4\dot{7}=0.4777\cdots=\frac{4}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots$

$$=\frac{4}{10}+\frac{\frac{7}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{4}{10}+\frac{7}{90}$$

$$=\frac{4\times 9+7}{90}=\frac{43}{90}.$$

说明 本题 (1) 中由相邻的两项容易算出无穷递缩等比数列的公比. (2) 中化成分数以后，从第二项起也容易看出是一个公比为 $\frac{1}{10}$ 的无穷递缩等比数列.

例 4 顺次连结边长为 1 的正方形各边的中点，得一小正方形，再顺次连结这个小正方形各边的中点，得一更小的正方形，如此无限继续下去，求所有这些正方形(包括原来的大正方形)的周长之和.

解 第一个正方形 (原来的正方形) 的周长为 4, 第二个正方形的周长为 $4\times\frac{\sqrt{2}}{2}$, 第三个正方形的周长为 $4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, …, 第 n 个正方形的周长为 $4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$, 如此无限继续下去, 得到无穷递缩等比数列

$$4,\ 4\times\frac{\sqrt{2}}{2},\ 4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,\ \cdots,\ 4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1},\ \cdots,$$

其公比 $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$. 所以这个无穷递缩等比数列的和为

$$4+4\times\frac{\sqrt{2}}{2}+4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\cdots+4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}+\cdots$$
$$=\frac{4}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{8}{2-\sqrt{2}}=4(2+\sqrt{2}).$$

答: 所有这些正方形的周长之和为 $4(2+\sqrt{2})$.

说明 这是一个无穷递缩等比数列的应用题，解决此类题要注意: (1) 判断数列是否为一个无穷递缩等比数列，即公比的绝对值是否小于 1. (2) 确定首项在本例中为原来的正方形.

例 5 用数学归纳法证明

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

证明 (1) 当 $n=1$ 时，左边是 $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$，右边是

$$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

所以等式当 $n=1$ 时是成立的.

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立：

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

下面来证明 $n=k+1$ 等式成立：

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据(1)、(2)，等式对于所有自然数 n 都能成立.

说明 用数学归纳法证明一个等式，关键在证明第(2)步，即证明 $n=k+1$ 等式成立，为此需要用到归纳假设，即 $n=k$ 的等式，然后在这个等式两端同加上第 $k+1$ 项，整理后看其是否符合 $n=k+1$ 等式的形式.

例 6 用数学归纳法证明

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

证明　(1) 当 $n=1$ 时,

$$左边=\frac{1}{2}+\cos x=\frac{2\sin\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}x+2\sin\frac{1}{2}x\cos x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}x+\sin\frac{3}{2}x+\sin\left(-\frac{1}{2}x\right)}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\sin\frac{3}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

$$右边=\frac{\sin\frac{3}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

所以 $n=1$ 时等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立, 即

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos kx$$

$$=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

下面我们要证明 $n=k+1$ 等式成立:

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos kx+\cos(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}+\cos(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}x\right)+2\sin\frac{1}{2}x\cos(k+1)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(k+\frac{3}{2}\right)x-\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\sin\left[(k+1)+\frac{1}{2}\right]x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据(1)、(2)知，等式对于所有自然数 n 都成立.

例 7 若 $n\in \boldsymbol{N}$，且 $n\geqslant 2$，则 n^5-n 能被 5 整除.

证明 (1) 当 $n=2$ 时，$2^5-2=30$ 能被 5 整除.

(2) 假设当 $n=k$ 时，k^5-k 能被 5 整除. 我们来证明 $n=k+1$，$(k+1)^5-(k+1)$ 能被 5 整除. 事实上，

$$\begin{aligned}(k+1)^5-(k+1)&=k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1-k-1\\&=(k^5-k)+5k(k^3+2k^2+2k+1),\end{aligned}$$

由归纳假设 k^5-k 能被 5 整除，又 $5k(k^3+2k^2+2k+1)$ 能被 5 整除，所以它们的和也能被 5 整除. 这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也是正确的.

根据(1)和(2)知，n^5-n 能被 5 整除，其中 $n\geqslant 2$.

说明 在使用数学归纳法证题时，要注意有些命题不是从 $n=1$ 开始来验证的，而是根据题目所给的条件或题意从某一个自然数开始(也有些命题从零开始成立).

例 8 求证：凸 n 边形的内角和等于$(n-2)\pi$.

证明 (1) 当 $n=3$ 时，三角形内角和为$(3-2)\pi=\pi$，所以命题正确.

(2) 假设 $n=k$ 时命题正确，即 k 边形内角和为 $(k-2)\pi$. 下面证明 $n=k+1$，$k+1$ 边形内角和为$[(k+1)-2]\pi$.

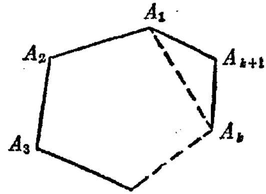

图 13-1

事实上，设$A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}$是 $k+1$ 边形(如图 13-1). 连 A_1A_k，则把 $k+1$ 边形分成两部分，一个是 k 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_k$，另一个是三角形 $A_1A_kA_{k+1}$，所以，$k+1$ 边形的 $k+1$ 个内角和等于

$$(k-2)\pi+\pi=[(k-2)+1]\pi=[(k+1)-2]\pi.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时命题亦正确.

根据(1)和(2)知，命题对于自然数 $n(n\geqslant 3)$是正确的.

说明 本题中开始成立的自然数 3 是根据题意来确定的. 因为 $n<3$ 时，命题没有意义. 另外，用数学归纳法证明几何问题时，最好辅之以图，这样比较直观.

练习二十二

A 组

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+3\right)$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{4n-1}{n}\right)$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n}{n+2}\right)$.

2．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100n}{n^2+1}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$.

3．求下列无穷递缩等比数列的和：

(1) $16,\ -4,\ 1,\ -\dfrac{1}{4},\ \cdots$；

(2) $\dfrac{8}{9},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{8},\ \cdots$；

(3) $\sqrt{\dfrac{3}{2}},\ \sqrt{\dfrac{2}{3}},\ \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}},\ \cdots$；

(4) $1,\ -x,\ x^2,\ -x^3,\ \cdots\quad(|x|<1)$.

4．已知无穷递缩等比数列的和等于 12.5，而它的前两项的和等于 12，写出这个数列的前五项.

5．用数学归纳法证明：

(1) $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$；

(2) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$；

(3) $3^{4n+2}+5^{2n+1}(n\in \boldsymbol{N})$能被 14 整除.

B　组

1．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$.

2．求证：把一个无穷递缩等比数列各项平方所得的数列也是一个无穷递缩等比数列.

3．一个无穷递缩等比数列的和等于 2，它的各项平方和所成的无

穷递缩等比数列的和等于 $1\frac{1}{3}$，写出这两个无穷递缩等比数列的前三项.

4. 等边三角形 ABC 的面积等于 1，连结这个三角形各边的中点得到一个小三角形，又连结这个小三角形各边中点得到一个更小的三角形，如此无限继续下去，求所有这些三角形的面积和.

5. 正方形的边长为 $2a$，取这个正方形各边中点组成第二个正方形，再取第二个正方形各边中点组成第三个正方形，这样无限做下去，求所有这些正方形的周长及面积和.

6. 在边长为 1 的正三角形 ABC 各边上取分各边为 $m:n$ 的点 A_1，B_1，C_1 连成一正三角形 $A_1B_1C_1$，在 $\triangle A_1B_1C_1$ 各边也各取分各边为 $m:n$ 的点 A_2，B_2，C_2 连成一正三角形 $A_2B_2C_2$，这样无限做下去，求 $\triangle ABC$ 所包含的所有这些正三角形之面积的和. 若使这个和最小，求 $m:n$.

7. 用数学归纳法证明:

(1) $$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)};$$

(2) $$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)};$$

(3) $$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}.$$

排列、组合，二项式定理，复数

第十四章　排列、组合与二项式定理

[本章要求]

1．理解乘法原理和加法原理．

2．掌握排列、组合及有关的概念．

3．掌握排列数、组合数的计算公式及有关组合数的两个性质．

4．能解有关排列、组合的简单应用题．

5．掌握二项式定理、二项展开式的性质和通项公式．

[内容提要]

1．排列与组合

(1) 两个原理

1) 加法原理　完成某一事件可以有n种办法，在第一种办法中有m_1种方法，在第二种办法中有m_2种方法，…，在第n种办法中有m_n种方法．那么完成这一事件共有

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法．

2) 乘法原理　完成某一事件需要分成n个步骤，做第一步有m_1种方法，做第二步有m_2种方法，…，做第n步有m_n种方法．那么完成这一件事共有

$$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种不同的方法。

(2) 排列与组合概念的对照表

<table>
<tr><th></th><th>排　　列</th><th>全排列</th><th>组　　合</th></tr>
<tr><td>定义</td><td>从 n 个不同元素中，任取 $m(m\leqslant n)$ 个，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。
从 n 个不同元素中取出 m（$m\leqslant n$）个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 P_n^m 表示（或记为 A_n^m）。</td><td>n 个不同元素全部取出的排列，叫做 n 个不同元素的全排列，用 P_n 表示（或记为 P_n）</td><td>从 n 个不同元素中，任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。
从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用 C_n^m 表示。</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">与元素的顺序有关</td><td>与元素的顺序无关</td></tr>
<tr><td>公式</td><td>1. 基本公式
(1) $P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$
(2) $P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$
规定 $0!=1$
2. 性质
(1) $P_n^m=nP_{n-1}^{m-1}$
(2) $P_n^m=(n-m+1)P_n^{m-1}$</td><td>$P_n^n=n!$
$=1\cdot2\cdot3\cdots n$
（或 $P_n=n!$）</td><td>1. 基本公式
(1) $C_n^m=\dfrac{P_n^m}{P_m^m}$
$=\dfrac{n\cdots(n-m+1)}{m!}$
(2) $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$
规定 $C_n^0=1$
2. 性质
(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$
(2) $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$</td></tr>
</table>

2. 二项式定理

(1) 二项式定理

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n\quad(n\in N).$$

等式右边的式子叫做$(a+b)^n$的二项展开式.

(2) 通项公式

$(a+b)^n$的二项展开式的通项公式是$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$. 而$(a-b)^n$的二项展开式的通项公式用$T_{r+1}=(-1)^rC_n^ra^{n-r}b^r$比较方便.

(3) 二项展开式的性质

1) a的指数由n逐项递减1直到0, b的指数由0逐项递增1直到n.

2) 系数依次为C_n^0, C_n^1, C_n^2, $\cdots$, C_n^n.

3) 如果二项式的幂指数是偶数,那么展开式的项数是奇数,展开式中间一项的系数最大;如果二项式的幂指数是奇数,那么展开式的项数是偶数,中间两项的系数最大.

4) 在二项展开式中,与首末两端"等距离"的两项的系数相等.

[例题与解题指导]

例1 计算:

(1) $P_{10}^3-7P_{10}^2$;　　(2) C_{100}^{98}.

解 (1)
$$P_{10}^3-7P_{10}^2=10\times9\times8-7\times10\times9=10\times9\times(8-7)=90\times1=90.$$

(2)
$$C_{100}^{98}=C_{100}^2=\frac{100\times99}{1\times2}=4950.$$

说明 (2)用到性质$C_n^m=C_n^{n-m}$. 一般地说, 当$m>\frac{n}{2}$