俄罗斯数学
教材选译

复变函数论方法

(第6版)

□ M. A. 拉夫连季耶夫　Б. В. 沙巴特　著
□ 施祥林　夏定中　吕乃刚　译

高等教育出版社
Higher Education Press

图字：01-2005-5574 号

图书在版编目(CIP)数据

复变函数论方法：第 6 版 /(俄罗斯)拉夫连季耶夫，
(俄罗斯)沙巴特著；施祥林，夏定中，吕乃刚译.
—2 版.—北京：高等教育出版社，2006.1
ISBN 7-04-018398-6

Ⅰ.复… Ⅱ.①拉…②沙…③施…④夏…⑤吕…
Ⅲ.复变函数论－教材 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 141188 号

策划编辑 张小萍 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 王凌波
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京外文印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版 次	1956 年 10 月第 1 版
开 本	787×1092 1/16		2006 年 1 月第 2 版
印 张	37.75	印 次	2006 年 1 月第 1 次印刷
字 数	770 000	定 价	68.00 元

物 料 号 18398－00

序

从上世纪 50 年代初起，在当时全面学习苏联的大背景下，国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材。这些教材体系严密，论证严谨，有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础，培养了一大批优秀的数学人才。到了 60 年代，国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材，但还在很大程度上保留着苏联教材的影响，同时，一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用。客观地说，从解放初一直到文化大革命前夕，苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用，起了不可忽略的影响，是功不可没的。

改革开放以来，通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材，大家眼界为之一新，并得到了很大的启发和教益。但在很长一段时间中，尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革，引进却基本中断，更没有及时地进行跟踪，能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少，事实上已造成了很大的隔膜，不能不说是一个很大的缺憾。

事情终于出现了一个转折的契机。今年初，在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上，有数学家提出，莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材，建议将其中的一些数学教材组织翻译出版。这一建议在会上得到广泛支持，并得到高等教育出版社的高度重视。会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论，大家一致认为：在当前着力引进俄罗斯的数学教材，有助于扩大视野，开拓思路，对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要。《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下，经数学天元基金资助，由高等教育出版社组织出

版的。

经过认真选题并精心翻译校订，本系列中所列入的教材，以莫斯科大学的教材为主，也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材。有大学基础课程的教材，也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书。有些教材虽曾翻译出版，但经多次修订重版，面目已有较大变化，至今仍广泛采用、深受欢迎，反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力，对我们也是一个有益的借鉴。这一教材系列的出版，将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来，对推动我国数学课程设置和教学内容的改革，对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才，可望发挥积极的作用，并起着深远的影响，无疑值得庆贺，特为之序。

李大潜

2005 年 10 月

第 1 版序

在我们已出版的书籍中，复变函数论的完善的教材，都是供数学专业的学生们用的，而其他的教材通常仅讲些这理论的初步知识。可是，近来在物理学中和在技术科学中，需要更深入细致地应用复变函数理论，其方法得到愈来愈广的普及。要从数学专业用的教材中汲取这方面所必须的知识，对于一个不是学数学的人来说是有困难的，而在一般的初等教材中所讲的那些知识，又嫌不够。

补足所指出的这个缺陷，便是本书的目的。有一些人是由于复变函数论在物理问题与技术问题上的应用，因而对它感到兴趣的，我们的任务就是在这本书里给他们叙述一些复变函数论的基本方法。这本书可以给大学力学系、物理系与应用物理系的学生，以及高等技术学校中具有足够数学训练的研究生作教材用。我们假定读者已经熟悉了包含在 B.И. 斯米尔诺夫的《高等数学教程》* （国家技术理论书籍出版社，1949）的首二卷范围内的数学分析基本课程。有些地方，我们也引用 Γ.M. 菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》** （卷 1—3，国家技术理论书籍出版社，1947—1949）。

在第一章中叙述了复变函数论的全部基本概念，因之读此书时可以不依赖这门学科的其他教材。而就叙述方面说，第一章也与其他各章有些不同——它写得更概括些，更简洁些。这时我们已考虑到，对于第一章的材料方面，已经有许多通俗易懂的书了。

其余的各章讲复变函数论在应用上具有重大意义的各种方法。除叙述方法外，

* 中译本，人民教育出版社，1952。

** 中译本，高等教育出版社，2005。

还附有大量的例题。如果读者在研究了关于某种方法的一些例题之后，已经通晓了这一方法，那么关于这方法的另外一些例题，可以先不读——等引用到这些例题时再回过来读它们，这样比较好一些。

书中也包含了把复变函数论应用到各种物理问题上去的大量例子。不应当那样想，以为我们是说，电机学上的例子只对于电机工作者有意义，流体力学上的例子只对力学工作者有意义。其实，对于某一个问题而说明的那些方法，常常可以有效地用来解决含有其他物理内容的类似问题。通晓了函数论在物理学不同领域中的应用的那些原理，可以帮助读者在以后的工作中，把书中就别的领域所陈述的那些方法，使用于他自己的领域中。

我们处处设法避免过于繁复的枝节证明，有时为了要叙述直观起见，还有意地容许若干不严格的地方。为了简便起见，有一些命题，在证明它们时，所用到的条件，比它所需要的更强一些；有些命题则只是叙述一下而不加证明。

最后，我们认为我们应该愉快地对 M.B.凯尔迪什院士表示衷心的感谢，他曾慎重地审阅了全部原稿，并且给予了许多十分宝贵的忠告和指示。

M.A.拉夫连季耶夫

Б.В.沙巴特

1951 年于莫斯科

第 5 版序

这一版是本书的策划者、我的永不忘怀的导师米哈依尔·阿列克赛耶维奇·拉夫连季耶夫(1900。11。1—1980.10.15)逝世后出的第一版。这位近代卓越学者、学科的组织者和青年的教育者为自己的祖国服务并献出了一生。他属于那些以自己名字和事业让人民引以为傲的队伍中的一员。

米哈依尔·阿列克赛耶维奇在著名的“鲁津派”里开始自己的科研活动,这是一个由 H.H.鲁津领导的莫斯科数学学派,但是不久他就走自己的路。最初他在拓扑学领域进行研究,以后从事微分方程研究,随后是复变函数论的研究。在这一领域获得奠基性的结果之后,他成为重要的、举世闻名的专家之一,苏联函数论学派的带头人。

米哈依尔·阿列克赛耶维奇创造性工作的突出特点是,他有惊人的把抽象数学研究与实际问题结合起来的能力。20 世纪 30 年代初,他在中央气体流体动力学研究所工作,为发展飞机制造业和创建水翼船做了许多工作。他与自己的学生、后来成为苏联科学院院长的 M.B.凯尔迪什一起完成了许多工作。他在有限深度液体表面上的急流和波的科学著作得到了广泛的应用。在伟大的卫国战争年代,米哈依尔·阿列克赛耶维奇深入研究了独创的聚能装药的流体动力学理论,这一理论开始时专家不相信,但是后来得到了广泛承认。在战后年代他创建了用爆破焊接金属和定向爆破的理论基础。米哈依尔·阿列克赛耶维奇是 1973 年在麦迪奥用爆破建立防泥石流坝的倡议者和科学顾问,这座坝挽救了阿拉木图。

米哈依尔·阿列克赛耶维奇在国家科学组织事业中的功绩是巨大的。他曾是苏联科学院西伯利亚分院数学研究所所长和苏联科学院副院长、斯捷克洛夫数学研究所副所长、精密机械学和计算技术研究所所长、苏联科学院数学物理学部院士书记。

他与С.А.列别捷夫、М.В.凯尔迪什院士一起是创建苏联计算技术的发起者，在他的领导下开展了程序设计方面的工作。

根据米哈依尔·阿列克赛耶维奇的倡议，在С.Л.索波列夫和С.А.克里斯蒂安诺维奇院士支持下，1957年在新西伯利亚建立了新的巨大的科研中心——科学院西伯利亚分院。米哈依尔·阿列克赛耶维奇成为它的第一任院长。他在这一职位上工作二十年左右。米哈依尔·阿列克赛耶维奇·拉夫连季耶夫走遍了从伊尔库茨克到楚科奇、从迪克森岛到千岛群岛整个西伯利亚和远东地区以后，成为纯洁贝加尔湖水、保存西伯利亚森林和大江大河的充满激情的捍卫者。米哈依尔·阿列克赛耶维奇的活动对西伯利亚和远东地区的科学发展起到了决定性作用。

还在大学生年代米哈依尔·阿列克赛耶维奇就从事过教学活动。他在喀山大学教过书，并且在革命后的最初几年就在那里学习过。迁到莫斯科后，他在鲍曼高等技术学校、化工技术学院、莫斯科大学教过数学。在20世纪40年代末米哈依尔·阿列克赛耶维奇与П.Λ.卡皮采和Л.Д.兰道院士一起是在莫斯科大学内设立技术物理系的倡议者，这个系的使命是培养科学技术新领域的专门技术干部。这个系后来改组成莫斯科技术物理学院，它为国家培育出了许多第一流专家。

米哈依尔·阿列克赛耶维奇多年献身精神的活动获得国内外高度评价。他曾被授予社会主义劳动英雄称号、列宁和国家奖金获得者和一系列自己祖国和其他国家的最高奖励，曾担任苏联最高苏维埃代表二十多年。他曾是许多外国科学院、科学机构和社团的名誉成员，国际数学家联合会副主席。

我是在技术物理学院米哈依尔·阿列克赛耶维奇领导下工作的时候，产生了创作本书的想法。它的基础是米哈依尔·阿列克赛耶维奇的复变函数论的讲稿。书连续出了四版，并且已翻译成法文、德文、中文和越文。

在第五版中实际上保留了米哈依尔·阿列克赛耶维奇生前出版的各版的内容。

Б.В.沙巴特
1986年于莫斯科

第 6 版序

复变函数论是数学的重要组成部分。共形映射方法是它的基本工具,共形映射的概念是在物理学的研究中产生的,并且是一种可操作性的方法。所讨论的理论与函数论有紧密的联系。复变函数论的方法可应用于物理学、流体动力学和气体动力学、电气技术中所进行的计算,也可用于其他实际目的。本教材不仅包含理论内容,而且还列举了大量应用科学技术领域中不同领域的例子。

本教材第二章和第四章专门阐述了共形映射及其实际应用。在第二章中介绍了共形映射理论的基本原理,并给出了例子。第四章叙述了分析的变分原理,它能够判定在映射区域的边界改变时映射是如何改变的,并给出了它们用于具体应用问题的例子。第三章讨论与复变函数论有关系的主要物理概念。第一章建立在调和函数分析和平面向量场势能研究的基础上。作者列举了边值问题的提出和求解的例子,它们是在流体动力学和气体动力学、弹性理论中利用柯西型积分性质的边值问题,还进一步讨论了把复变函数应用于偏微分方程。本书对函数论应用于数学分析(第四章)和特殊函数(第七章)以及对它们的重要应用给予很大的关注。第六章专门讨论包括拉普拉斯变换和其他变换在内的算子方法的基本理论,在这一章中给出了大量利用它解微分方程和与这些方程有关的物理、力学、电气技术问题的例子。

本教材基于 M. A. 拉夫连季耶夫的复变函数论的讲稿,由 Б. В. 沙巴特补充、整理。本书已连续出版五次,并且被译成多种欧洲文字和东方文字。

第六版实际上与前几版没有本质上的差异。

编者

目　录

第一章　基本概念

在这一章里，要介绍复变函数论的所有基本概念：函数、函数的导数、积分等等．读者就会看到，在实变函数分析中已熟悉的这些概念的普通定义，几乎全无变更地保留着，但是它们的内容却有了很重要的改变．例如，通常用平面上曲线来表示函数的几何图示法，已经不再存在了，代替它的是那把函数看做平面点集的映射的概念（第 4 目）．复变函数的可微条件显得比实变函数的可微条件要严格得多（第 5 目）．例如，从函数在复变数范围内的可微条件，就必然地会得出所有各阶导数的存在（第 17 目）以及函数的许多性质，这些性质在实变函数分析中是极不常有的（第 14、15 以及其他诸目）．

在 18 世纪，数学家们已经把复数和复变函数用在他们的研究工作中了．特别伟大的是 18 世纪大数学家欧拉（Leonhard Euler，1707—1783）的贡献，他应当算做是复变函数论的一个缔造人．在欧拉的那些卓越的著作中，详细地研究了初等复变函数，其中包含了对数函数、指数函数、三角函数和反三角函数（1740—1749）；在这些著作中还给出了函数的可微条件* (1755）和复变函数积分法的基础（1777）．欧拉也曾把复变函数论应用于各种的数学问题，并且开始把它们应用到流体力学（1755—1757）与地图制图学（1777）上．

在欧拉之后，他所发现的那些结果和方法，被继续发展、改进和系统化．在 19 世纪的前半叶，复变函数论已经成为数学分析中一个最重要的部分了．其中主要的功绩

* 达朗贝尔（J. d'Alembert）在 1752 年从流体力学上的设想出发，也已得到了这些条件．但是只有在欧拉的著作中，才第一次弄清楚了它们的一般特性．

属于柯西(Augustin Cauchy,1789—1857)和魏尔斯特拉斯(Karl Weierstrass,1815—1897),他们发展了积分的计算和用级数表示函数的理论;还有黎曼(Bernhard Riemann,1826—1866),他论证了函数论的几何问题和它们的应用.

§1 复数

为了使读者方便,我们在这里先叙述一些有关于复数的概念、复数的运算和复数的几何表示的主要定义和基本事实*.

1. 复数 像 $x+iy$ 形状的式子叫做**复数**,其中 x 与 y 都是实数,而 i 则是一个符号,叫做**虚数单位**. x 与 y 两数分别叫做复数 $x+iy$ 的**实数部分**与**虚数部分**,用记号

$$x=\operatorname{Re}(x+iy),\ y=\operatorname{Im}(x+iy) \tag{1}$$

来表示. 特别是,在 $y=0$ 时,$x+i0$ 可以看做同实数 x 相同;而在 $x=0$ 时,$0+iy$ 就简记作 iy,叫做**纯虚数**.

我们来规定在复数集合里的相等概念与基本运算. 两个复数 x_1+iy_1 与 x_2+iy_2 当且仅当

$$x_1=x_2,\ y_1=y_2$$

时,我们方说这两个复数**相等**,记作

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2. \tag{2}$$

还有,如果 $x_1=x_2$ 而 $y_1=-y_2$,那么复数 x_1+iy_1 就称做是与 x_2+iy_2 **共轭**的,并用符号 $\overline{x_2+iy_2}$ 来表示. 因此,

$$\overline{x+iy}=x-iy. \tag{3}$$

现在我们给出复数的运算的定义.

(1) 加法 复数

$$z=z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \tag{4}$$

叫做 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 这两个复数的**和** z_1+z_2. 从定义可直接得出下面的加法定律:

1) 交换律: $z_1+z_2=z_2+z_1$,

2) 结合律: $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$.

如果 z_1 与 z_2 两数都是实数(即,$y_1=y_2=0$),则定义(4)就与实数的加法定义相符合.

---

* 第一次提到"虚数",把它作为负数的平方根,还是在 16 世纪的事[卡丹(G. Cardano),1545]. 到 18 世纪中叶为止,复数仅是偶然地出现在个别数学家的著作里[牛顿,伯努利(N. Bernoulli),克莱罗(A. Clairaut)]. 第一篇复数理论的论文是欧拉用俄文发表的("Алгебра",Петербург,1763,以后这书被译成外国文字并且出了许多版);符号"i"也是欧拉所创用的. 复数的几何表示则是在 18 世纪末的事[丹麦人韦塞尔(C. Wessel)].

加法可以有逆运算：对任何两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$，总可以找出一个复数 z，使 $z_2+z=z_1$. 这个复数 z 叫做 z_1,z_2 两复数的**差**，用符号 z_1-z_2 来表示. 显然

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2). \tag{5}$$

(2) 乘法 复数

$$z=z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2) \tag{6}$$

叫做 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 这两个复数的**积**，记作 z_1z_2.

从定义可得出下面的乘法定律：

1) 交换律： $z_1z_2=z_2z_1$,

2) 结合律： $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$,

3) 分配律(对于加法的)：

$$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3.$$

如果 z_1 与 z_2 两数都是实数(即，$y_1=y_2=0$)，即定义(6)就同普通的乘法定义相符合. 在 $z_1=z_2=i$ 时，从乘积的定义就有

$$i\cdot i=-1. \tag{7}$$

容易看到，公式(6)也可用下面的方法得出：先照普通的代数法则将 x_1+iy_1 与 x_2+iy_2 相乘，再用 -1 来代替乘积 $i\cdot i$. 还可看出，复数 $z=x+iy$ 乘它的共轭数所得的积，永远不会是负的. 实际上从(6)式便有

$$z\bar{z}=x^2+y^2\geqslant 0. \tag{8}$$

乘法也可以有逆运算，不过要所给的乘数不等于零. 设 $z_2\neq 0$，便可求得这样的一个复数 z，使 $z_2z=z_1$；按照公式(6)，为了求出 z，需要解方程组

$$\left.\begin{aligned} x_2x-y_2y=x_1,\\ y_2x+x_2y=y_1,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

当 $z_2\neq 0$ 时，这方程组总有一个唯一的解，因为它的系数行列式是 $x_2^2+y_2^2>0$. 这个数 z 叫做 z_1 与 z_2 两数的**商**，用符号 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 来表示. 解出方程组(9)，我们便得到

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{10}$$

显然，公式(10)也可由将分数 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的分子与分母各乘以 $\bar{z}_2$ 而得到.

(3) 整次乘幂 n 个相等的数 z 的乘积叫做数 z 的 n **次乘幂**，用符号 z^n 来表示：

$$z^n=\underbrace{z\cdots z}_{n\text{个}} \tag{11}$$

其逆运算——求方根——规定如下：如果 $w^n=z$，则 w 就叫做数 z 的 n **次方根**(用符号 $\sqrt[n]{z}$ 来表示，在 $n=2$ 时，就简写成 $\sqrt{z}$). 在下面我们将看到，对于任何一个复数 $z\neq$

0,它的 n 次方根$\sqrt[n]{z}$有 n 个不同的值.

现在我们可以把等式(7)写成 $i^2=-1$ 的形式,而对于虚数单位 i,便有

$$i=\sqrt{-1} \tag{12}$$

(这里$\sqrt{-1}$表示它所可能取的两个值中的一个).

2. 几何表示 我们考虑笛卡儿坐标平面 xOy,并用坐标为(x,y)的点来表示复数 $z=x+iy$.这时实数就用 x 轴(这条轴今后将称做实轴)上的点来表示,而纯虚数则用 y 轴(今后称做虚轴)上的点来表示.特别如,虚轴上的点$(0,1)$就用来表示虚数 i.

容易看出,用这个方法,在 xOy 平面上每一个具有坐标(x,y)的点,就都与一个完全确定的复数 $z=x+iy$ 相对应,反过来也是这样.所以,在全部复数与平面上一切点之间的这个对应关系是一一对应的关系.因此今后我们对复数与平面上的点这两个概念,将不再加以区别,例如说"点 $1+i$","顶点为 z_1,z_2,z_3的三角形"等等.

再者,平面上的每一个点(x,y)都对应于一个完全确定的向量——这个点的向径,而在平面上的每一向径,也都对应于一个完全确定的点——这向径的终点(图 1).所以今后我们也将用平面上的向径形式来表示复数.

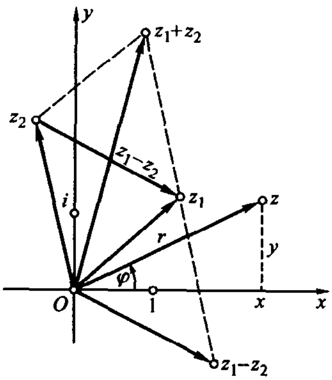

图 1

复数的加法与减法运算的几何意义,从图 1 中可以看得很清楚:两个复数 z_1与 z_2的和与差,都可用向量来表示,即分别等于由 z_1与 z_2这两个向量所构成的平行四边形的两条有向对角线.

除了复数在笛卡儿坐标内的表示法外,复数在极坐标内的表示法,在以后也很有用.为了要用极坐标来表示复数,我们同通常一样,取 x 轴的正向半轴作为极轴,取坐标原点作为极点,于是,如果把点 z 的极径记作 r,极角记作 φ (图 1),那么就有

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{1}$$

极径 r 叫做复数 z 的**模**,用记号$|z|$来表示;极角 φ 叫做复数 z 的**辐角**,用记号 $\operatorname{Arg} z$ 来表示.复数的模是被唯一地确定了的:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0, \tag{2}$$

$z\neq 0$ 时它的辐角却可以相差 2π 的任何一个整倍数:

$$\varphi=\operatorname{Arg} z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}+2k\pi & (\text{Ⅰ,Ⅳ象限}),\\[2ex] \arctan\dfrac{y}{x}+(2k+1)\pi & (\text{Ⅱ,Ⅲ象限}),\end{cases} \tag{3}$$

在这里 arctan 表示 Arctan 的主值,即,大于$-\dfrac{\pi}{2}$而小于等于$\dfrac{\pi}{2}$的那个值,k 为任何整

数.除了用来表示辐角的全体值的那个记号 Arg 外,以后我们将用记号 arg 来表示 Arg 的值中的一个值,在必要时,并将特别预先说明所取的是哪一个值(参看第 6 节).

下面的这两个不等式很是明显(见图 1):

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\ |z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||. \tag{4}$$

在(4)中的等号,当且仅当 Arg $z_1=$ Arg z_2或其中之一为 0 时,方能成立.

从上一目中的定义(6)得出:当两个复数相乘时,它们的模相乘,而辐角则相加.实际上,我们有

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2\{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &\quad + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1)\} \\ &= r_1r_2\{\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\}. \end{aligned} \tag{5}$$

由此可见:在复数 z_1乘以 z_2的运算中,z_1的模正伸* 到$|z_2|$倍,此外,向量 z_1还旋转了(按照逆时针方向)角 arg z_2.特别,复数 z 乘以 i 化为向量 z 逆时针方向旋转一直角(没有延伸).

在图 2 中表示了乘积 $z=z_1z_2$的作法;为了得出 z,只要在线段 Oz_1(作底)上作一个三角形 Oz_1z,使它同三角形 $O1z_2$相似就行了.

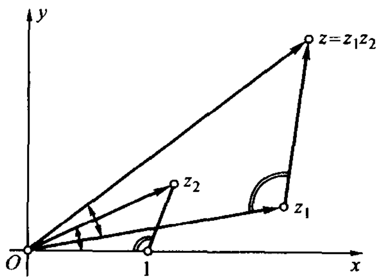

图 2

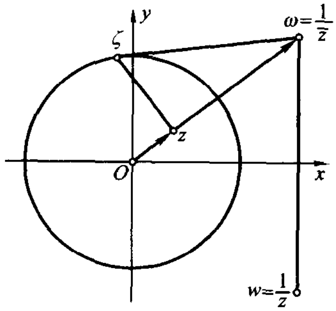

图 3

又,复数 z_1被 z_2除的运算,可以看做是 z_1乘以$\frac{1}{z_2}$,因此只要说明运算 $w=\frac{1}{z}$的几何意义就够了.首先假定$|z|<1$ (图 3).从 z 点作射线 Oz 的垂线,再经过这垂线与圆周$|z|=1$ 的交点,作这圆周的切线.对于这切线与射线 Oz 的交点ω,显然有

$$\text{Arg }\omega=\text{Arg }z,$$

而且由于直角三角形 $Oz\zeta$ 与$O\zeta\omega$ 是相似的,有$\frac{|\omega|}{|\zeta|}=\frac{|\zeta|}{|z|}$,又因为$|\zeta|=1$,故有

$$|\omega|=\frac{1}{|z|}.$$

---

* 如果$|z_2|<1$,那么实际上就是把$|z_1|$缩短到原长的$|z_2|$倍.