

高等学校試用教科書



10493

材料力学

CAILIAO LIXUE

下 册

南京工学院力学教研组編

人民教育出版社

高等学校試用教科书



材 料 力 学

CAILIAO LIXUE

下 册

南京工学院力学教研组編

人 民 教 育 出 版 社

本书是南京工学院力学教研组编写的，于1960年9月由人民教育出版社出版。1961年3月間經清华大学、唐山铁道学院、南京工学院、大连工学院、西安交通大学、天津大学、北京航空学院、华中工学院、西北工业大学等校材料力学教研组的有关教师略作修改后改分上、下两册再版。

本书分为基本内容与专题两部分，基本内容包括：拉伸，压缩，扭转，剪切，应力，状态理论，实验应力分析，强度理论，弯曲，组合变形，压杆稳定和动载荷等共十五章。专题部分有柔索，杆件，极限承载能力的计算，变形解法求变形及解超静定杆系，接触应力，薄壁容器、厚壁圆筒，旋转圆盘及材料在高温时的性质等共七章，以便不同专业根据具体情况选用。

本书可作为高等工业学校动力、电机等类专业“材料力学”课程的试用教科书，也可供其他专业师生和工程技术人员参考。

另外单行出版了本书的增补部分，以满足学时较多的机械类专业采用本书作教材的需要。

簡 装 本 說 明

目前850×1168毫米規格紙張較少，本书暫以787×1092毫米規格紙張印刷，定价相应减少20%。希鉴諒。

材 料 力 学

下 册

南京工学院力学教研组編

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

统一书号 K15010·1034 开本 787×1092 1/32 印張 8 5/16

字数 210,000 印数 58,001—93,000 定价 (7) 洋 0.80

1960年9月合訂本第1版(共印30,000册)

1961年6月第1版 1962年3月北京第4次印刷

下册目录

第十一章 超靜定梁	237
§ 11-1. 概述	237
§ 11-2. 超靜定梁的解法	238
§ 11-3. 連續梁・三矩方程	241
第十二章 組合变形时杆的强度計算	253
§ 12-1. 概述	253
§ 12-2. 斜弯曲	254
§ 12-3. 弯曲与拉伸或压縮的組合	259
§ 12-4. 偏心压縮(拉伸)	263
§ 12-5. 扭轉及弯曲的組合	270
第十三章 压杆的稳定	278
§ 13-1. 概述	278
§ 13-2. 临界力的确定——欧拉公式	282
§ 13-3. 欧拉公式的应用范围・临界应力的經驗公式	288
§ 13-4. 压杆的实际計算	291
§ 13-5. 纵横弯曲的概念	298
§ 13-6. 稳定計算的意义及其发展	300
第十四章 重复应力作用下构件的强度計算	303
§ 14-1. 概述	303
§ 14-2. 应力循环・持久极限	305
§ 14-3. 对称循环持久极限的測定	309
§ 14-4. 不对称循环下的持久极限・持久极限曲綫	313
§ 14-5. 影响零件持久极限的主要因素	318
§ 14-6. 在重复应力下零件受单向拉压、弯曲或扭轉时的强度校核	324
§ 14-7. 在重复应力及复杂应力状态下的强度校核	330
第十五章 动載荷	335
§ 15-1. 动載荷問題的概念	335
§ 15-2. 等变速运动杆件的应力計算	337
§ 15-3. 等速旋轉杆件的应力	340
§ 15-4. 变加速运动杆件的应力	343

§ 15-5. 振动应力的计算	346
§ 15-6. 一个自由度系统的自由振动	348
§ 15-7. 旋轉軸的共振・临界轉速	353
§ 15-8. 一个自由度的有阻尼强迫振动	357
§ 15-9. 汽轮机叶片振动问题的概念及經驗公式	364
§ 15-10. 冲击应力的计算方法	366
§ 15-11. 杆受冲击时的应力计算	370
§ 15-12. 减低冲击应力的措施	373
§ 15-13. 冲击时材料机械性质的实验研究	374

第二部分 專題

第十六章 柔索	377
§ 16-1. 概述	377
§ 16-2. 受均布载荷的单跨小垂度柔索	377
§ 16-3. 柔索受一个附加集中载荷时的计算	388
§ 16-4. 柔索受温度变化的影响	387
§ 16-5. 柔索的精确计算	390
第十七章 杆件极限承载能力的计算	393
§ 17-1. 概述	393
§ 17-2. 超静定杆系的极限承载能力	395
§ 17-3. 圓軸扭轉时的极限承载能力	398
§ 17-4. 直杆弯曲时的极限承载能力	400
第十八章 用变形能法求变形及超静定杆系的计算	405
§ 18-1. 概述	405
§ 18-2. 杆变形时变形能的计算	406
§ 18-3. 卡氏定理	407
§ 18-4. 莫尔定理	414
§ 18-5. 功的互等定理及位移互等定理	417
§ 18-6. 超静定杆系・正则方程	419
§ 18-7. 弹性中心法	423
第十九章 接触应力	433
§ 19-1. 概述	433
§ 19-2. 接触应力的计算公式	434
§ 19-3. 接触体的强度检查	439
第二十章 薄壁容器	441
§ 20-1. 概述	441

§ 20-2. 薄壁壳体的薄膜理论.....	441
§ 20-3. 圆筒形容器盖的计算公式.....	446
第二十一章 厚壁圆筒及旋转圆盘.....	451
§ 21-1. 概述.....	451
§ 21-2. 厚壁圆筒的应力计算.....	451
§ 21-3. 组合筒.....	457
§ 21-4. 等厚度旋转圆盘.....	464
§ 21-5. 等强度旋转圆盘.....	469
第二十二章 材料在高温时的性质.....	472
§ 22-1. 概述.....	472
§ 22-2. 高温对金属材料机械性质的影响.....	472
§ 22-3. 蠕滑·蠕滑曲线.....	475
§ 22-4. 蠕滑许用应力的确定.....	480
§ 22-5. 应力松弛.....	485
結論.....	489

第十一章 超靜定梁

§ 11-1. 概述

在前面几章里,我們討論了靜定梁。所謂靜定梁,就是指仅由靜力学的平衡条件就能决定其反力的梁。但在工程上,有时为了减少梁的撓度和应力,从而节省材料,常常需要增加某些支座。这样它的約束反力就不能单凭靜力方程就能求得。例如图 11-1, *a* 所示的电机轉軸,当考虑其弯曲变形时,就成为如图 11-1, *b* 所示的梁。此梁共有四个約束反力,但靜力方程只有三个,因之反力就不能单由靜力方程求得。又如图 11-2, *a* 所示的电杆上的木担及图 11-3, *a* 中挂街道电钟的伸臂杆,

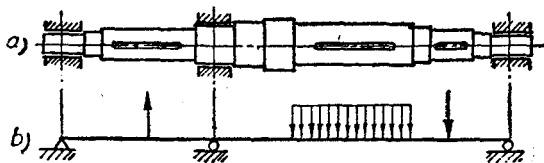


图 11-1.

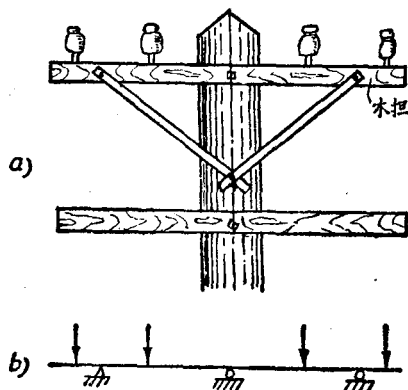


图 11-2.

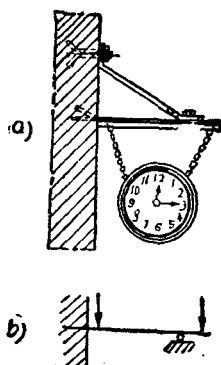


图 11-3.

考慮它們彎曲變形時，就分別簡化成為如圖 11-2, *b* 及 11-3, *b* 所示的梁。它們的約束反力也多於靜力方程的數目。這些由於約束反力的數目多於靜力方程的數目，因而不能單由靜力方程就能求得其反力的梁，稱為超靜定梁。顯然，在第八章中圖 8-3, *c* 所示的發電廠中的匯流條，也是超靜定的。

在超靜定梁中，都有超過維持其靜力平衡所必須的約束。這種約束常稱為多余約束，相應的反力常被稱為多余反力。這裡所謂“多余”，是從維持剛體平衡的必要性的觀點來看。實際上，從工程技術的觀點來看，它們不但不是“多余”，而且是必要的。這樣可以減少撓度及應力，從而節省材料。圖 11-1, *b*，11-2, *b* 及 11-3, *b* 所示的超靜定梁都有一個多余反力，稱為一次超靜定梁。顯然，圖 11-4 所示的梁是三次超靜定梁。

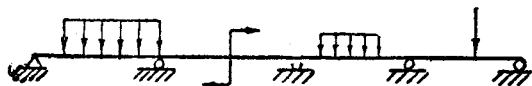


圖 11-4.

對於超靜定梁，和靜定梁一樣，不論是在強度或剛度計算中，往往需要先求出反力。本章將介紹求超靜定梁反力的基本方法。

§ 11-2. 超靜定梁的解法

在第三章中我們已經知道：解拉伸與壓縮的超靜定問題時，可以根據結構變形的幾何關係，列出所需的補充方程。這裡在解超靜定梁時，也可以採用類似的方法，也就是根據梁的變形條件，列出足夠的補充方程，連同靜力學的平衡方程，以求出梁的反力。

現在，就圖 11-5, *a* 中所示的超靜定梁 *AB*，來說明如何根據變形條件來列出補充方程。這梁有一多余反力。如果以反力 *B* 為多余，就是認為圖 11-5, *a* 中的超靜定梁，是由圖 11-5, *b* 中的靜定梁加了一個多

余支座(約束)而成的。这样去掉了多余約束后得到的靜定梁(图11-5, b), 称为原来超靜定梁的靜定基。

就图 11-5 中的梁來說, 要想求出超靜定梁的反力, 需要在靜定基上加上均布載荷 q 及多余反力 B (图 11-5, c), 使它成为与原来超靜定梁(图 11-5, a)相符的体系。但是这还不够, 在图 11-5, a 中的 B 点, 不能沿着垂直于梁軸的方向移动, 而在图 11-5, c 中的梁却有这种可能。为了使这两个梁完全一致地工作, 必須对后者加上一个限制的条件, 即靜定基在載荷 q 及反力 B 的作用下, 截面 B 的撓度等于零, 即

$$y_B = 0,$$

这就是用来决定多余反力 B 的变形条件。

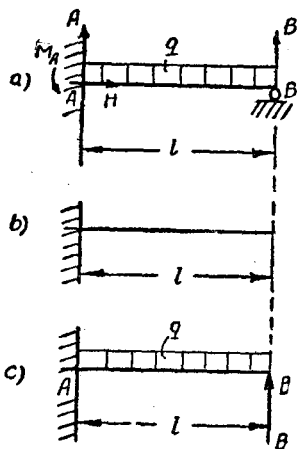


图 11-5.

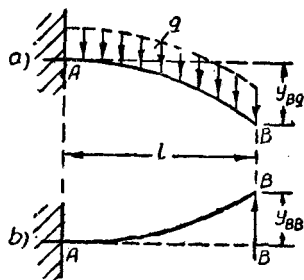


图 11-6.

下面將說明如何借助于变形条件来列出补充方程, 从而求出梁的反力。

以 y_{Bq} 及 y_{BB} 分別表示均布載荷 q 及集中力 B 单独作用时, 靜定基 B 端的撓度(图 11-6)。由迭加原理知

$$y_B = y_{Bq} + y_{BB}.$$

因此变形条件可写成

$$y_{Bq} + y_{BB} = 0. \quad (a)$$

由表 10-2, 可知

$$y_{Bq} = -\frac{ql^4}{8EJ} \quad \text{及} \quad y_{BB} = +\frac{Bl^3}{3EJ}.$$

代入方程 (a) 便得补充方程

$$-\frac{ql^4}{8EJ} + \frac{Bl^3}{3EJ} = 0.$$

由此, 得

$$B = \frac{3}{8}ql.$$

这里正号表示所得的反力 B 与图 11-5 及图 11-6 中所设的方向一致。

多余反力求得后, 其余反力由静力方程就可求得, 即

$$A = \frac{5}{8}ql,$$

$$H_A = 0,$$

$$M_A = \frac{1}{8}ql^2.$$

当所有反力求出后, 就可按静定梁的办法, 画出这梁的剪力图及弯矩图(图 11-7, b 及 c)。

对于图 11-5 中的梁, 也可取另外一个反力, 例如 M_A 作为多余。这时静定基就如图 11-8, b 所示。与上面情况类似, 可得变形条件为

$$\theta_A = \theta_{Aq} + \theta_{AM_A} = 0.$$

由表 10-2, 可知

$$\theta_{Aq} = -\frac{ql^3}{24EJ} \quad \text{及} \quad \theta_{AM_A} = +\frac{M_A l}{3EJ}.$$

代入上式即得所需的补充方程, 从而解得

$$M_A = \frac{1}{8}ql^2.$$

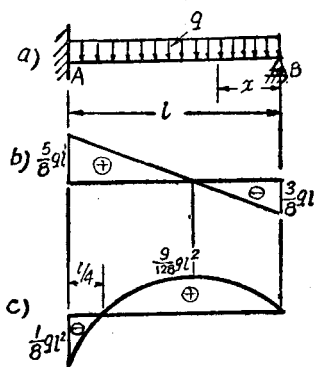


图 11-7.

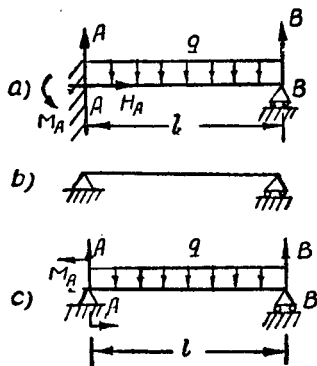


图 11-8.

其余的反力就可按静力方程求得了。

同理也可将反力 A 作为多余。但是反力 H_A 不能作为多余，因为由原来超静定梁的平衡条件 $\sum x = 0$ ，可得 $H_A = 0$ 。可见 H_A 可由静力方程求得，因而它是维持平衡所必要的，而不是多余的了。

以上举了一个一次超静定的例子，这时总可以得到一个补充方程，由此可求得一个多余反力。假使梁是 n 次超静定的，显然按照同样的办法，可以得到 n 个补充方程。在每一个补充方程中，将同时出现 n 个多余反力。解这些补充方程，就可得到所有的多余反力。但是当 n 较大时，要想从补充方程求解所有的多余反力，就显得相当麻烦。这时宜按下节的方法进行。

§ 11-3. 連續梁 · 三矩方程

在工程上，常遇到具有两个以上支座的梁，这种梁称为連續梁（图 11-1, b, 11-2, b 及 11-4）。連續梁的末端，有时用铰链支座，有时也用固定端或自由端。

今以图 11-9, a 所示的連續梁为例子，来说明解题的方法。梁除一

端是固定鉸鏈支座外,其余的都是活动鉸鏈支座。显然对于这种梁,超靜定的次数适与中間支座的数目相等。图 11-9 中所示的連續梁是四次超靜定。

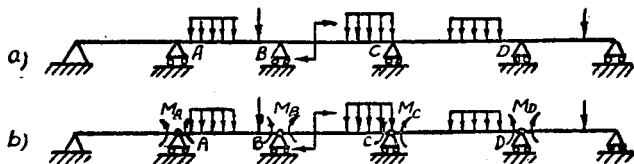
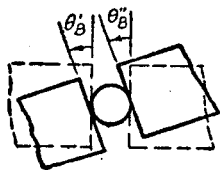


图 11-9.

如果按前述方法,取某四个反力为多余,則可得到四个补充方程,而每一个补充方程中将同时包括四个多余反力,在实际計算中就比較麻煩。要想使計算簡便,最好是設法使补充方程中包含很少的未知項。假使我們能找到适当的靜定基,使我們只要研究其某一部分,就能够根据变形条件列出补充方程,在补充方程中就会出现很少的未知項。

我們可以取中間支座处截面上的弯矩 $M_A, M_B, M_C, \dots$ 等等作为多余未知項。这样得到的靜定基,显然是一系列的簡支梁(图 11-9, b)。为了使靜定基与原有連續梁(图 11-9, a)成为相符的体系,需要在靜定基上加上連續梁的原有載荷及力偶 $M_A, M_B, M_C, \dots$ 等等(图 11-9, b)①,并且比較二者的变形。

研究任一中間支座 B 处的变形。靜定基在这里有一个中間鉸,发生弯曲变形时,鉸的两侧截面可以分別轉动,其旋轉角各为 θ'_B 及 θ''_B (图 11-10)。但原有的連續梁弯曲时,在支座 B 处并未分开,可見这里有一个变形条件



$$\theta'_B = \theta''_B. \quad (a)$$

图 11-10.

要想得到补充方程,要求出 θ'_B 及 θ''_B 之值,

① 对靜定基來說,弯矩 $M_A, M_B, M_C, \dots$ 应该当作載荷看待。这些弯矩假定都是正的,这样算得的结果就可給出正确的符号。

代入上面式(a)。

图 11-9, b 中的靜定基是一系列的簡支梁, 所以 θ'_B 仅与 AB 段所受的力有关, θ''_B 仅与 BC 段所受的力有关。

現在用图解解析法来求 θ'_B 及 θ''_B 。与靜定基 AB, BC (图 11-11, a) 相对应的虛梁如图 11-11, b 所示。設 AB 段內梁的剛度为 EJ_1 , BC 段为 EJ_2 。將靜定基的弯矩图直接作为虛梁的載荷图。为方方便計, 把它們分为三部分繪出如图 11-11, b 所示。就左边跨度 l_1 來說, 其中

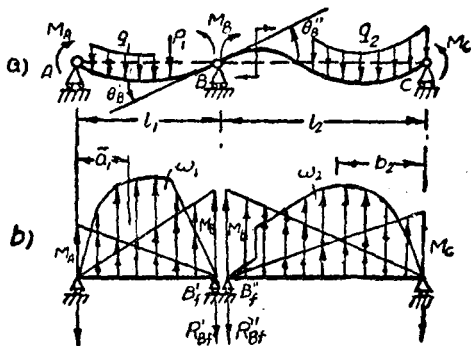


图 11-11.

含有曲綫的部分是載荷 P_1, q_1 等作用时的弯矩图, 面积为 ω_1 , 它的形心距左支座为 $\bar{a}_1$; 两个三角形部分是 M_A 及 M_B 分别单独作用时的弯矩图。由于弯矩都假定是正的, 所以虛載荷的方向都向上。由虛梁的平衡条件, 可求得支座反力

$$\begin{aligned} R'_{Bf} &= \omega_1 \frac{\bar{a}_1}{l_1} + \left(\frac{1}{2} M_A l_1 \right) \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} M_B l_1 \right) \frac{2}{3} \\ &= \frac{\omega_1 \bar{a}_1}{l_1} + \frac{1}{6} M_A l_1 + \frac{1}{3} M_B l_1, \end{aligned}$$

由此可得

$$\theta'_B = \frac{\theta'_{Bf}}{EJ_1} = \frac{R'_{Bf}}{EJ_1} = \frac{1}{6EJ_1} \left(6 \frac{\omega_1 \bar{a}_1}{l_1} + M_A l_1 + 2M_B l_1 \right). \quad (b)$$

同样可得

$$\theta_B'' = \frac{\theta_{Bf}''}{EJ_2} = \frac{-R_{Bf}''}{EJ_2} = -\frac{1}{6EJ_2} \left(6\omega_2 \bar{b}_2 + 2M_B l_2 + M_C l_2 \right). \quad (c)$$

将(b)及(c)两式代入变形条件(a), 化簡后得补充方程为

$$M_A \frac{l_1}{J_1} + 2M_B \left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} \right) + M_C \frac{l_2}{J_2} = -\frac{6\omega_1 \bar{a}_1}{l_1 J_1} - \frac{6\omega_2 \bar{b}_2}{l_2 J_2}. \quad (11-1)$$

在这一方程中, 包含着連續梁相邻三支座处的截面弯矩, 所以称为三矩方程。如連續梁各跨度的截面相等, 則 $J_1 = J_2$, 公式(11-1)将簡化为

$$M_A l_1 + 2M_B (l_1 + l_2) + M_C l_2 = -\frac{6\omega_1 \bar{a}_1}{l_1} - \frac{6\omega_2 \bar{b}_2}{l_2}. \quad (11-2)$$

公式(11-1)及(11-2)适用于任何載荷的情况。方程式右边的数值与已知載荷有关。表11-1中列举了几种常見的簡單載荷情况下的

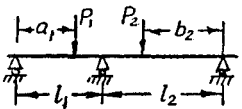
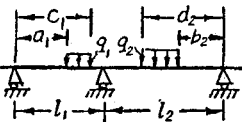
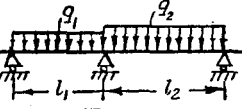
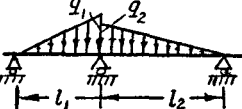
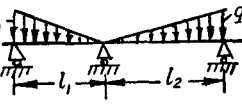
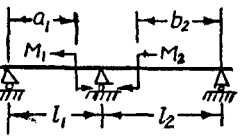
$\left(-\frac{6\omega_1 \bar{a}_1}{l_1} \right)$ 及 $\left(-\frac{6\omega_2 \bar{b}_2}{l_2} \right)$ 之值。

上面的公式(11-1)及(11-2), 是根据連續梁上任一中間支座B处的变形条件得来的。非常明显, 对于如图11-9, a所示的两端鉸支的連續梁, 所能写出的这种三矩方程的数目, 必将与中間支座的数目相等。这种梁两端的弯矩都为已知, 且都等于零, 各个中間支座截面上的弯矩都是未知的, 可見所能写出的三矩方程数目, 恰与多余未知弯矩的数目相等。所以这些未知弯矩可从这一組联立的三矩方程求得。

若将上述两端鉸支的連續梁的一端或两端的鉸鏈支座向內移动一段距离, 則梁将具有外伸臂。这时最外支座处截面上的弯矩就不再等于零, 不过仍是已知的, 其数值可由外伸臂上的載荷計算而得。由此可見, 三矩方程也可用来解一端或两端为自由端的連續梁(見例題11-2)。

假使連續梁的末端用固定端支座如图11-12, a。在这种情况下,

表 11-1. 三矩方程中 $\left(-\frac{6\omega_1\bar{a}_1}{l_1}\right)$ 及 $\left(-\frac{6\omega_2\bar{b}_2}{l_2}\right)$ 之值

載 荷	$-\frac{6\omega_1\bar{a}_1}{l_1}$	$-\frac{6\omega_2\bar{b}_2}{l_2}$
	$-\frac{P_1 a_1}{l_1} (l_1^2 - a_1^2)$	$-\frac{P_2 b_2}{l_2} (l_2^2 - b_2^2)$
	$-\frac{q_1 (c_1^2 - a_1^2)}{4l_1} (2l_1^2 - a_1^2 - c_1^2)$	$-\frac{q_2 (d_2^2 - b_2^2)}{4l_2} (2l_2^2 - b_2^2 - d_2^2)$
	$-\frac{q_1 l_1^3}{4}$	$-\frac{q_2 l_2^3}{4}$
	$-\frac{2q_1 l_1^3}{15}$	$-\frac{2q_2 l_2^3}{15}$
	$-\frac{7q_1 l_1^3}{60}$	$-\frac{7q_2 l_2^3}{60}$
	$-\frac{M_1 (3a_1^2 - l_1^2)}{l_1}$	$-\frac{M_2 (3b_2^2 - l_2^2)}{l_2}$

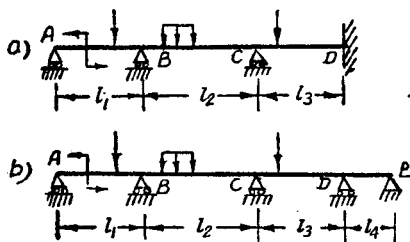


图 11-12.

末端截面上的弯矩非但不再等于零，而且是未知的。于是多余的未知弯矩的数目将多于中间支座的数目，因此还需要寻找补充方程。这种方程可由固定端的截面转角等于零得出。以图 11-12, a 中的连续梁为例，变形条件为

$$\theta_D = 0. \quad (d)$$

利用上面已得的式(b)，不难推知

$$\theta_D = \theta'_D = \frac{\theta'_{Df}}{EJ_3} = \frac{R'_{Df}}{EJ_3} = \frac{1}{6EJ_3} \left(\frac{6\omega_3 \bar{a}_3}{l_3} + M_C l_3 + 2M_D l_3 \right),$$

代入式(d)，化简，得补充方程：

$$M_C l_3 + 2M_D l_3 = -\frac{6\omega_3 \bar{a}_3}{l_3}. \quad (e)$$

讀者应知，这种补充方程，仍可由三矩方程得出。由于梁在固定端受有三个约束，因此可以认为固定端就相当于一个活动铰链支座和一个固定铰链支座所支承的一段，其跨度之长为无限小。于是根据原来的最外边跨度及这一无限短跨度，又可写出一个三矩方程。如就图 11-12, b 所示，可知

$$M_E = 0, \quad \omega_4 = 0,$$

而且

$$l_4 \approx 0.$$

代入公式(11-2)，所得的补充方程与上面的方程(e)完全相同。

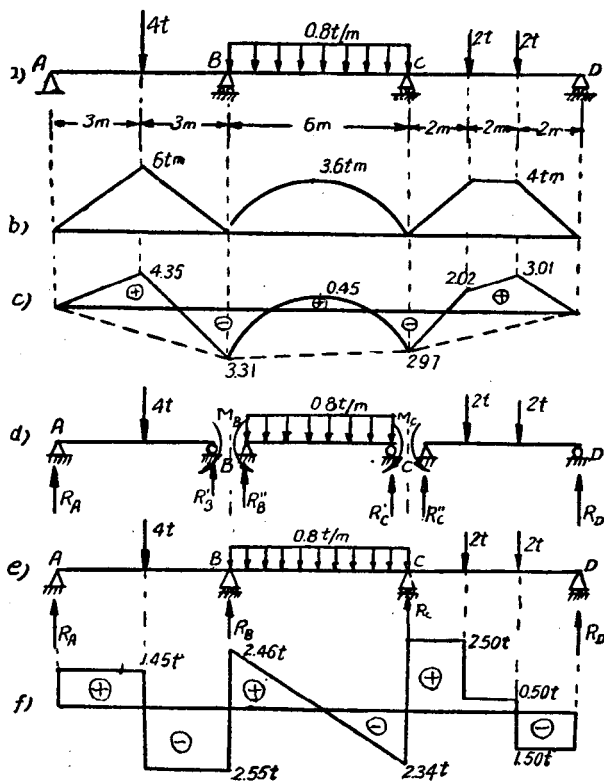
不难想到，对于两端固定的连续梁，仍可应用三矩方程来解。

根据一组三矩方程，就可解出所有支座截面的弯矩。当这些弯矩求出后，就可利用静定基求出所有的支座反力，并画出整个梁的剪力图和弯矩图。

例題 11-1. 試繪出圖 a 中所示連續梁的彎矩圖及剪力圖, 並求出各支座反力。

解: (1) 求支座彎矩

先繪出靜定基在已知載荷作用下的彎矩圖(圖 b)。由於各跨內的 M^0 圖都很簡單, 可直接利用公式(11-2)而不必使用表 11-1。



例題 11-1 圖

这个梁有三个跨度, 故可写出两个三矩方程如下:

$$\begin{aligned}
 & M_A \times 6 + 2M_B(6+6) + M_C \times 6 \\
 & = -6\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 6\right) \frac{3}{6} - 6\left(\frac{2}{3} \times 6 \times 3.6\right) \times \frac{3}{6}, \quad (a)
 \end{aligned}$$