

数学物理丛书



一般相对性量子场论

(二)

李国平 郭友中 著

湖北人民出版社

数学物理丛书



一般相对性量子场论

(二)

李国平 郭友中著

湖北人民出版社

内 容 提 要

本书的主要内容有：转化概念、所用单位制、时空位标、张量与矩阵的混合使用以及标准双曲型 *Riemann* 空间的介绍，自旋空间、同位旋空间以及某些场方程在一般相对性量子场论中的推广。

读者对象是数学物理学方面的研究工作者和高等院校的师生。

数学物理丛书 一般相对性量子场论

(二)

李国平、郭友中著

湖北人民出版社出版 湖北省新华书店发行

沔阳县印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 4.75印张 99,000字

1981年6月第1版 1981年6月第1次印刷

印数：1—1,800

统一书号：13106·44 定价：0.74元

序

本书的主要材料是作者自 1958 年以来,从事数学物理研究的部分工作总结。初稿完成于 1960 年前后,由于稿件散失,重又进行了部分整理和删节,分成三个分册。

第一分册原是一篇论文,主要是提出特殊(相对性)向一般(相对性)的转化原则,为了强调这一方法,因而自成一册。

第二分册的内容,既仍是为第三分册作准备,也是第一分册的不同观点的补充和继续,为了保持各自的独立性,某些章节略有交叉。

作为绪论的第一章简略地介绍了从微粒子内外运动的矛盾中提出的新模型和一些转化概念;第二章选定物理单位以简化复杂的运算;第三章中介绍了时空位标;第四章讨论张量和矩阵的混合使用问题,给出了张量的矩阵表示和 Hermite 张量及逆张量等概念,澄清了容易发生混淆的地方;第五章建立标准双曲型 Riemann 几何学;第六、七两章专门论述描述微粒子广延性的自旋空间和同位旋空间在一般相对性量子场论中的推广;第八章强调场量的非对易性,指出特殊相对性量子场论中,有些作者推广场方程和能冲量张量为一般相对性时出现的原则错误;第九章利用书中已知的知识,介绍某些一般相对性量子场方程的具体形式。原来作为第一分册预备知识的纤维丛理论,因限篇幅将移作《近代数学丛书》之一,另作介绍。

新理论的介绍及其对微粒子的产生、消失和相互 作用 的研究则是第三分册的内容。

基本粒子理论正在不断发展,这一领域的研究工作一直很活跃,已经积累了大量的试验成果和理论文献,涉及的范围很广,本书介绍的只是某些数学物理方法,且是著者工作过的部分。限于思想和业务水平,谬误不当之处,敬希读者指正。

著 者

1980 年

目 录

序

第一章	绪论	1
§ 1.1	特殊向一般的转化	1
§ 1.2	场	2
§ 1.3	量子化·宏微转化	5
第二章	物理单位	11
§ 2.1	绝对 Gauss 单位制	11
§ 2.2	新单位制	13
第三章	时空位标	17
§ 3.1	类空超曲面	17
§ 3.2	Lorentz 群	20
§ 3.3	局部位标系	23
第四章	张量与矩阵的混合使用	31
§ 4.1	矩阵	31
§ 4.2	张量的矩阵表示	34
§ 4.3	张量	42
第五章	标准双曲型 Riemann 空间	47
§ 5.1	双曲型空间的概念	47
§ 5.2	Christoffel 符号	48
§ 5.3	Riemann 曲率张量和 Ricci 张量	51
§ 5.4	协变微商	54

§ 5.5	测地线	57
§ 5.6	规范位标系	64
第六章	自旋空间	71
§ 6.1	自旋空间的概念	71
§ 6.2	自旋协变微商	75
§ 6.3	曲率自旋量	78
§ 6.4	Ricci 恒等式	79
§ 6.5	几个特殊旋量	82
§ 6.6	自旋测地线与规范自旋位标系	84
§ 6.7	广义 Dirac 方程	87
§ 6.8	拟易位运算与拟 Hermite 共轭	89
第七章	同位旋空间	91
§ 7.1	同位旋空间的概念	91
§ 7.2	同位旋测地线与规范同位旋位标系	94
§ 7.3	基本同位旋矩阵	96
§ 7.4	第二类同位旋空间	97
§ 7.5	一个计算公式和随伴式	99
第八章	算符的非对易性	102
§ 8.1	场元乘积的不可交换性	102
§ 8.2	场方程、能冲量张量与守恒律	102
§ 8.3	角冲量张量算符	106
§ 8.4	总能冲量与总角冲量	109
§ 8.5	粒子数与电荷守恒	111
第九章	一般相对性量子场	115
§ 9.1	重力场	115
§ 9.2	重力波	120

§ 9.3	电磁场方程的一般形式	123
§ 9.4	自旋为零的场	131
§ 9.5	自旋为 1 的场	133
§ 9.6	自旋为 1/2 的场	136
§ 9.7	广义 π 粒子场	139
§ 9.8	核子在 $(\mathfrak{U})$ 中的原型	143

第一章 绪 论

§ 1.1 特殊向一般的转化

十九世纪及其以前建立起来的古典物理学成功地解释了低速宏观的物理现象。但是，古典物理学既对微观客体的波粒二重性无能为力，也对高速现象的 Lorentz 不变性束手无策。为了解决这一矛盾，物理学在二十世纪初经历了两次飞跃，产生了研究微观客体的量子论，其后发展而为量子力学，和研究高速现象的特殊相对论，其后发展而为一般相对论。

近半世纪以来，由于试验手段的进一步发展，在高速微观现象的研究中发现了一系列重要的特性，诸如微粒子的产生、消失和转化，都超出了量子力学和相对性古典物理学所能解释的范围。

首先是电磁场的量子，光子，由于静质量为零，很小的能量变化就会引起它的产生和消失，而电磁场理论的 Maxwell 方程本来就是特殊相性的，人们自然就想到将这一理论进行量子化来解释光子的行为。这样就产生了研究高速微观现象的量子场论。不同的量子场理论或模型描述不同的微粒子；不同量子场之间的相互作用反映不同微粒子间的相互作用和转化。

微粒子开始是被作为没有内部结构的数学点来描述的，可以称为点模型。点模型遇到自旋的困难，说明点描述与微

粒子广延性之间的矛盾。解决这一矛盾，坂田模型被推广为特殊相对性转子模型。1963年，De Broglie 等认为微粒子的运动应当分成内外运动，它们都是特殊相对性的，而且内运动仅作为运动学的性质加以考虑。为了区别内外运动，在数学上走了一段回头路，用推广三维 Euclid 空间的 Euler 角作为 Lorentz 群的表写工具，实际上这些努力还是没有达到预期的目的。微粒子理论在不断深化的过程中，未臻之处也是十分明显的。特别是不能反映微粒子在外场运动的一般相对性，这是非常令人遗憾的事情。

同年，我们提出新的内外场模型：微粒子的外运动用一般相对性量子场描述；内运动用特殊相对性量子场描述。两种运动的波函数结合而为微粒子的波函数，用内外运动的矛盾统一描述微粒子的特性和相互作用。这样，就需要有将特殊相对性量子场论的结果转化为一般相对性量子场论的结果的一般转化原则。本书的第一分册在很大的程度上是为这一目的服务的。

我们还知道，光子在经过太阳附近时的偏转角，在不同的时间曾测得完全不同的数据，似乎支持了反光子是与光子不同的粒子的例证。这样，在外运动为特殊相对性量子场的理论中简并了的光子以及其它的反粒子也就各有其自身的特征。关于内外场模型的理论，请参看本书第三分册。

§ 1.2 场

场是物质存在的一种形式。

古典质点力学研究具有有限自由度的物理系统，古典场

论研究具有无限自由度的物理系统。一般说来,一个具有无限多自由度的物理系统就称为一个(物理)场,自由度 $\Psi_\alpha(x)$ 称为场量或场函数, α 一般是离散指标,取值 1 至 N (例如在电磁场中, $N=4$), 变量 x 为某一流形上的连续统的点,可以看成是一个连续指标。在某定点 x 的场量起着有限自由度的质点力学系统中广义位标 q_i 的作用,而场方程则起着运动方程的作用,一般为 $\Psi_\alpha(x)$ 及其导数间的某种关系。

场与任何其它物理系统一样是一些动力学可观察量(能量、动量与角动量等)的传递者,场方程就是传递的数学形式,因而是一种以时空位标为参数的对象之间的相互制约关系。

量子场论是从适当的场方程和相应的量子化规则来研究微粒子性质的理论。

相对论的对称原则指出,物理定律的数学形式必须是在正 Lorentz 变换下的协变方程,而 Lorentz 群除了张量表示外,还可以旋量表示。从数学上说,旋量是张量在概念上的一种推广,因而它们之间具有某些相似性。张量与旋量混合量的研究扩充了 Lorentz 协变方程的种类,使我们表述自然定律有了更多的自由。

但是,用张量,旋量或混合量表写的在正 Lorentz 变换群作用下协变的方程有无穷多种,而只有某些简单的场才是实际的物理场,因而有所谓简单性假定。这种假定当然不一定反映客观实际的规律性,而是在现有条件下,由于感性和理性认识不足,或处理方法和工具欠缺而作的一种手段。

一般假定场是定域性的,即场的状态,场与场的相互作用完全由特定的时空点上的场量及其导数所决定,而与该点的邻域无关。对于自由粒子,这一假设相当于前述没有内部

结构的点描述。为了克服这种片面性，已经有很多发展非定域性理论的工作。作为某种近似，定域性理论还是取得了不少的成就。

另一种简单性假定是要求孤立的场没有自相互作用。因而要求场方程是线性的，而且至多是二阶的。

场方程也可以通过变分原理来求得，基本要求还是相对论的对称原理(协变性)和简单性假设。

定义作用积分

$$W \equiv \frac{1}{ic} \int_R L dx,$$

这里 L 是场的 Lagrange 函数密度， $dx \equiv dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ ，积分区域 R 是某一有限或无限的时空区域。 i 是为了保证 L 为实数而引入的， c 的引入为的是使得 L 具有能量密度的量纲时， W 具有作用量的量纲。

至于 L 的结构，一般是根据推广的 Hamilton 原理来确定的。 L 是 Ψ_α 及其微商 $\partial_\mu \Psi_\alpha$ 的函数，当 $\Psi_\alpha \rightarrow \Psi_\alpha + \delta \Psi_\alpha$ ， $\delta \Psi_\alpha|_{\partial R} = 0$ (∂R 是包围 R 的超曲面) 时， $\delta W = 0$ ； W 的极值条件就是场方程。

当协变性与简单性要求满足时， $L(\Psi_\alpha, \partial_\mu \Psi_\alpha)$ 为双线性形式， $\delta W = 0$ 等价于 Euler-Lagrange 方程(组)：

$$\frac{\partial L}{\partial \Psi_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \Psi_\alpha} = 0. \quad (1.2.1)$$

当
$$L = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Psi \partial_\mu \Psi - \frac{1}{2} \lambda^2 \Psi^2$$

时，得到 Klein-Gordon 方程；当

$$L = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Psi_\gamma \partial_\mu \Psi_\gamma$$

时, 导致 Maxwell 方程; 当

$$L \equiv -\hbar c \bar{\Psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + \lambda) \Psi$$

时, 转化为 Dirac 方程(对 $\bar{\Psi}$ 变分)和其随伴方程(对 Ψ 变分); 当

$$L \equiv -\hbar c \bar{\Psi} (\beta_\mu \partial_\mu + \lambda) \Psi$$

时, 可得 Kemmer 方程.

利用变分原理还可以得到耦合场的方程, 这时

$$L \equiv L_1 + L_2 + L^*; \quad (1.2.2)$$

L_1, L_2 分别是自由场 Ψ 和 Φ 的 Lagrange 函数密度; L^* 是相互作用项, 与 Ψ, Φ 有关. 一般要求 L^* 为实的不变量(对正 Lorentz 变换), 所谓相互作用是定域性的, 在这里等于 L^* 仅由同一时空点 x 的场量 Ψ 和 Φ 所确定; 一般说, 非定域性的相互作用将有下面的形式

$$L^*(x) = \int G(x, x') f[\Psi(x), \Phi(x')] dx', \quad (1.2.3)$$

$G(x, x')$ 称为形状因子, 表征相互作用区域的扩展范围. 在定域性理论中

$$G(x, x') \equiv \delta(x - x'),$$

这时, 不存在超距作用, 因而严格服从在相对论意义下的因果性.

§ 1.3 量子化. 宏微转化

如果我们将场量 $\Psi_a(x)$ 看成 Schrödinger 的态函数, 看成粒子系综的几率振幅, 并以之作为几率权函数来计算物理可观察量, 用来对待 Klein-Gordon 方程就会产生负几率; 用

来对待 Dirac 方程就会产生负能。因此，以协变场方程为基础的这种量子理论陷入了困难。可以一般地证明：对张量场，总流（几率密度）是不定的；对旋量场，能量也是不定的。所以，场的量子化，应另辟途径，亦即适当地推广从古典力学到量子力学的量子化方法。

现在常用的量子化方法是 Heisenberg 的正则形式：首先，用 Hamilton 正则形式来刻画物理系统，然后把场量转化为 Hermite 场算符，并对算符引入适当的代数规则（对易关系或反对易关系）。例如，可以参见[1]的第二章。

在 Heisenberg 表象中，场方程是算符方程，它描述从一个时空点到另一时空点算符形式的变化，反映场的波动性。我们知道，在量子力学中，态函数是作几率解释的，关于它有不少争论，直到现在还没有完全解决。所以，在量子场论中，人们并不希图给场一种几率的解释。场的某种物理可观察量则是由场算符的某种组合形成的算符函数的特征值，这些特征值的离散性表征场的粒子性。

量子化前的场方程相应的不是 Schrödinger 方程，而是 Schrödinger 方程的原型 $T = \mathbf{p}^2/2m$ （在相对论的情况下是 $T = \mathbf{p}^2/2m + mc^2$ ）。这时，Schrödinger 方程相应于量子化后的场方程（算符方程），而态函数在单纯的场算符方程中是不出现的。它既非场量，又非场算符，而是场算符导出的一种算符定义域中的元素。算符定义域往往是某 Hilbert 空间（的子集），在 Heisenberg 表象中，态矢量（态泛函）是固定的。

物理可观察量与可观察量的可测值是两个不同的概念：前者由 Hermite 算符表征；而后者是它的特征值。并非所有的可观察量都是同时能够测量到的，只有那些具有共同特征

函数的可观察量才能同时测量到。一般说,特征函数(即态矢量或态泛函)相当于物理系统所处的态,也即是条件,是所测过程的背景和前提。当算符可对易的时候,它们的特征态是共同的,因而在这种特征态下,这些算符相应的物理可观察量可以同时测定。由最大数目相互可对易的算符所组成的集合称为可观察量的最大集,对该集算符的测量称为最大测量。这相当于在某一时刻,在相应的特征态下关于系统所能获得的最大程度的了解。

量子化程序是描述微观客体波粒二重性的一种手段。这种程序不能作为任何假定或先验性命题的证明。哪些物理量或几何量应该进行量子化和采用什么方式量子化只能由科学实验和人类对客观事物的认识来决定。正象 Newton 力学定律, Einstein 引力方程, Schrödinger 波动方程等等物理学规律不能象数学定理那样来证明一样,量子化程序也只是实践的一种总结,表述客观事物的一种方式。只有在实践肯定的某些基本事实存在的前提下,它才成为表征事物某些侧面的量的离散性(或分立性,粒子性,量子性)的数学手段。当实验还未充分,人类认识还不够完全时,对某些量进行量子化,以作为一种试探,期待实践进行检验,这在方法论上是容许的;但是,决不能以此为借口,不讲条件地对任何量都随心所欲地进行量子化,并用以论证本来就不存在的命题,这就是错误的,先验论的概念游戏,往往引出许多荒谬的奇谈怪论。

在量子化程序中,场量转化为场算符并引入关于算符的代数规则这两个方面是统一的。没有一定的对易或反对易关系,往往还不足以刻划量子性。象量子力学一样,这种关系实际上即 De Broglie 关系,是实验基础上的总结。在物理学中,

物理上的考虑是根本的, 数学形式是技术性的. 已有的实践和理论指出: 张量场适于描述整数自旋的粒子(Bose 子), 它们服从 Bose-Einstein 统计, 相应的粒子数算符可以有任何非负整数的特征值, 它们宜于用对易关系进行量子化; 而旋量场适于描述半整数自旋的粒子(Fermi 子), 它们服从 Pauli 不相容原理, 粒子数算符只能取 0 或 1 为特征值, 它们遵守 Fermi-Dirac 统计, 宜于用反对易关系进行量子化.

物理上的对称性, 反映在数学上则是场方程或 Lagrange 函数对一定的位标变换的不变性; 群、半群、环和代数等都是反映不变性的数学工具. 时空的均匀性, 反映为场方程对时空位标的平移不变性; 空间的迷向性, 反映为场方程的空间位标的旋转不变性. 场方程的一种不变性, 对应于一种守恒律: 场方程对位标的规范不变性, 对应于电荷守恒律; 场方程对位标的平移不变性, 对应于动量和能量守恒律; 场方程对空间位标的旋转不变性, 对应于角动量守恒律; 场方程对空间的反射不变性, 对应于宇称守恒律. 各类守恒律在下面各章中可以找到具体的例证.

实验已经证明, 在弱相互作用中, 考虑全 Lorentz 群的不变性是不对的, 在这里宇称不一定守恒. 所以, 对场的基本要求要作适当的修改. 六十年代, 宇称在弱相互作用中不守恒的现象被李振道、杨振宁([2], 1956) 和吴健雄等([3], 1957) 发现以后, 弱相互作用的理论有了很大发展.

算符实际上也是一种(广义的)量. 函数是描述普通数量(或点)之间的变化关系的, 可以称为一级关系; 算符一般是描述函数之间的变化关系的, 可以称为二级关系; 算符函数, 算符关系(包括对易关系, 反对易关系和推广的微积分方程)是

描述算符之间的变化关系的,应该是三级关系了.一般说,一级,二级关系可以看成三级关系的特例.古典物理学的量子化,或宏微转化,成为量子物理学,在数学上相当于一级关系到三级关系的转化.可以借用形象化的说法来比喻:一级关系中,事物被作为点模型处理的量(数值、点)转化成三级关系中具有更复杂的内部结构的算符,因而能更确切地刻划物理对象的微观性质.一级关系基本上是古典分析数学研究的内容;二级和三级关系主要是泛函分析和拓扑学研究的对象.为了适应量子场论的需要,如上所述,要求将内容丰富的古典分析数学推广为泛函分析的内容.因此,我们提出古典分析数学泛函化的基本原则,免除逐一推广和证明之劳,这是专著^[6]的第十章的内容.

泛函分析在某种意义上是古典分析数学的推广,但又不都是简单的推广.它们有相似平行的方面(这对泛函分析的研究来说不是本质的困难工作),也有差别很大的方面,构成泛函分析的主攻方向.它注重用新的概念和方法来总结提炼古典分析的结果,用新的观点发掘古典分析在大量事实掩盖下的一些原理.关于泛函分析和拓扑空间的基本概念请参阅关肇直同志的书([4]和[5]).

为了从根本上解决目前量子场论所遇到的困难,最近有人大胆尝试,用上同调理论进行量子化的工作.同调代数改变着数学原来学科的面貌,不断带来各种新的成就.

参 考 文 献

- [1] 朱洪元,量子场论,科学出版社,1960.