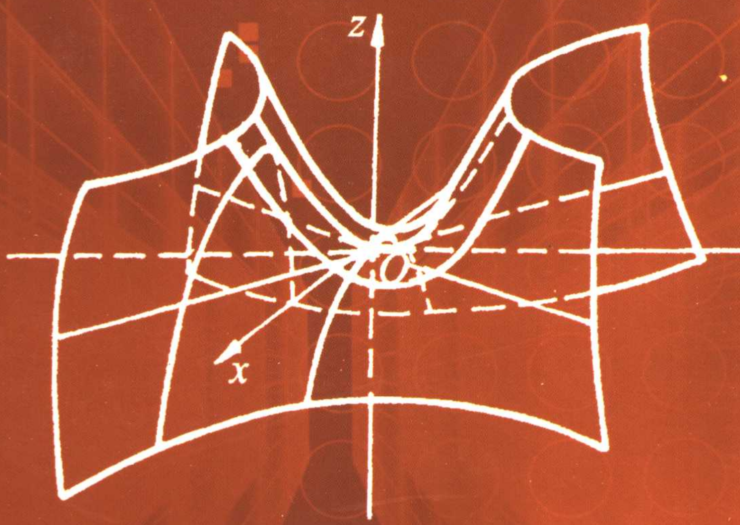
● 大学数学考研辅导系列

大学数学总复习

——高等数学分册

上海交通大学数学系 编



上海交通大学出版社

●大学数学考研辅导系列

大学数学总复习

——高等数学分册

上海交通大学数学系　编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书是上海交通大学具有丰富经验的教授、专家编写的《大学数学总复习》高等数学分册。书中每章分三部分：内容要点、典型例题、自测题(附有解答)。本书共编入400余道具有示范作用的题目，还编入了2000～2005年全国硕士研究生入学考试高等数学试题(数学一)及参考解答。

本书可供报考高等工科院校硕士研究生的考生学习参考，也可供一般本科生、大学数学教师学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学总复习. 高等数学分册/上海交通大学数学系编. —上海：上海交通大学出版社，2005
ISBN 7-313-04114-4

Ⅰ. 大...　Ⅱ. 上...　Ⅲ. 高等数学—高等学校—自学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 090094 号

大学数学总复习
——高等数学分册
上海交通大学数学系　编
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030)
电话：64071208　出版人：张天蔚
立信会计出版社 常熟市印刷联营厂印刷　全国新华书店经销
开本：880mm×1230mm　1/32　印张：14.625　字数：418 千字
2005 年 9 月第 1 版　　2005 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—4 050
ISBN 7-313-04114-4/O·179　定价：22.00 元

前　言

上海交通大学是我国“211 工程”与“985 工程”重点投资建设的百年高等学府，“起点高、基础厚、要求严、重实践、求创新”是交大的办学传统。同时，上海交通大学是全国 6 个工科数学教学基地之一，近几年来，学校组织高水平的教授、专家有计划地编写课程大纲和高质量的教材，狠抓教学质量，使我校学生具有扎实的数学基础。多年来，上海交大的学生参加历次国内外高校数学竞赛，亦无不获奖，取得优异成绩。上海交通大学对学生数学基础的要求以及对学生数学素质的培养在逐年提高，数学系的教师也逐渐积累了丰富的数学教学经验。

值得一提并引以自豪的是，自恢复高考后，在全国工科硕士研究生和工程硕士研究生入学考试中，上海交大的考生（其中相当数量是上海交大的学生）的数学平均成绩，年年名列前茅。每年考研前，许多上海本地甚至外地的考生踊跃参加上海交大数学系举办的辅导班。数学系的教师还经常到外地办班，受到广大考生的欢迎。现根据上海交大的规定，今后数学系不再举办考研的数学辅导班。为了帮助广大考生报考研究生，使他们顺利地通过硕士研究生入学数学考试这一关，上海交通大学数学系组织了本系既具有丰富教学经验，又熟悉硕士研究生入学数学考试要求的教授，群策群力来编写《大学数学总复习》一书，以帮助广大考生全面地进行数学复习。

本书分两册，一册为高等数学分册，一册为线性代数、概率论与数理统计分册。其中每一章分三个部分：一是内容要点，包括考试要求和基本内容与基本题型，主要介绍考纲中规定的考试内容，指明了重点、难点和认知层次以及基本的概念、方法、公式和定理，并列举了与内容相呼应的一些基本例题，以便读者理解和掌握相关内容；二是典型例题部分，通过典型例题，给出恰当的分析，指出解题的思路和方法，经过推导、论证和计算，扩大思路，开阔眼界，融会贯通，以提高读者分析问

题和解决问题的能力，同时更具体地展示了考试内容的深度、广度以及读者所应具备的知识和能力；三是自测题(附有解答)，目的是使读者通过自测练习进一步熟悉考试题型，巩固、理解和掌握基本概念、基本方法。书末附有近几年全国研究生入学数学考试的试题(数学一)及解答。

本分册为高等数学分册，内容包括：一元函数的微积分、多元函数的微积分、向量代数和空间解析几何、微分方程以及无穷级数。这些都是高等院校《高等数学》传统的基本内容，也是硕士研究生必须具备的基础知识。显然对于广大考生来说，学好这些内容是十分重要的。

为了学好并掌握这些内容，必须对基本概念、基本理论和基本方法有较全面的理解，并能准确而灵活地运用。参考一些典型的题目及其解析过程，并独立地思考和演算一些题目，是达到这些目标的有效方法之一。

本分册编入了400余道具有典型示范作用的高等数学题目，涵盖了高等数学的基本概念、基本方法和考试内容。全书内容充实，概念清楚，重点突出，简明扼要，清晰易懂，层次分明，合理运用“推导”与“归纳”的方法，通过典型例题，教会读者如何思考和分析，使读者从不同内容的内在联系上体会数学思维和应用的精髓，同时加强分析问题和解决问题的综合能力的培养与训练。

参加本分册编写的有郑麒海、裘兆泰、王承国、李铮等副教授和孙薇荣等教授。郑麒海和裘兆泰两位副教授进行了统稿。本书不仅适用于数学考研，而且对广大本科生及有志于学习高等数学的读者，也能起到很好的指导作用。笔者希望本书的出版能帮助读者用不太长的时间，花费不很多的精力，对所学过的高等数学起到复习、巩固和提高的作用。希望它是一把钥匙，能为广大读者打开成功之门；是一座桥梁，能引导广大读者顺利通向成功之路。

因时间紧迫，本书错误疏漏之处在所难免，在此编者诚恳地希望广大读者提出宝贵的意见。

编　者

2005年8月

于上海交通大学

目　　录

1 函数 极限 连续

1.1 内容要点

1.1.1 考试要求

① 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系式.

② 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

③ 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

④ 掌握基本初等函数的性质及其图形.

⑤ 理解极限及函数左、右极限的概念，弄清函数极限的存在与左、右极限之间的关系.

⑥ 掌握极限的性质及四则运算法则.

⑦ 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

⑧ 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

⑨ 理解函数连续性的概念(包括左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

⑩ 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

1.1.2 基本内容

（一）函数

A. 函数的定义

设 I 为数集，f 是 $I\to\mathbb{R}$ 的映射，则称 f 是定义在 I 上的函数，记为

$$f:I\to\mathbb{R},$$

或
$$y=f(x),\ x\in I.$$

B. 函数的性质

(1) 有界性

设函数 $f(x)$，$x\in I$，若 $\exists M>0$，对 $\forall x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 f 在 I 上有界.（又若 $\exists M\in\mathbb{R}$，对 $\forall x\in I$，恒有 $f(x)\leqslant M$，称 f 在 I 上有上界；若 $\exists N\in\mathbb{R}$，对 $\forall x\in I$，恒有 $f(x)\geqslant N$，称 f 在 I 上有下界.）

(2) 单调性

设函数 $y=f(x)$，$x\in I$，若对 I 上 $\forall x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 f 在 I 上单调增加；若将上式改为 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 f 在 I 上严格单调增加.

相仿，若对 I 上 $\forall x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 f 在 I 上单调减少；若将上式改为 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 f 在 I 上严格单调减少.

在区间 I 上严格单调的函数必定存在反函数.

(3) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$，其定义域 $D(f)$ 是以原点对称的.若对 $\forall x\in D(f)$，恒有 $f(-x)=f(x)$，称 f 为偶函数；若对 $\forall x\in D(f)$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，称 f 为奇函数.

(4) 周期性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在非零常数 T，使对 $\forall x\in D$，有

$f(x+T)=f(x)$，则称 f 是周期函数，T 是 f 的一个周期.

（二）极限

A. 极限的概念

① $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n>N$，有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立，则称数列 $\{x_n\}$ 的极限为 A，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

② $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

另外，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A;$$

而 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

定理 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

③若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，$\forall|x|>X$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，$\forall x>X$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$；

若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，$\forall x<-X$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

定理 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

④ 函数极限与数列极限的关系(Heine 定理)：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件：对任一满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，且 $x_n \neq x_0$ 的数列$\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

B. 极限的性质

(1) 唯一性

若数列或函数其极限存在，则其极限是唯一的.

(2) 有界性

若数列或函数的极限存在，则该数列或函数分别是有界或局部有界.

(3) 保号性

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，若 $A > B$，则 $\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n > N$ 必有 $x_n > y_n$.

若 $x_n \geqslant y_n$(若 $x_n > y_n$) 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则 $A \geqslant B$.

读者可自行写出函数极限的保号性.

C. 极限的运算法则

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

① $\lim(f(x)\pm g(x)) = A\pm B$.

② $\lim(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$，$\Rightarrow \lim(f(x))^n = A^n$.

③ $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B\neq 0)$.

④ $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$ (当 n 为偶数时，A 需大于 0).

⑤ $\lim(f(x))^{g(x)} = A^B$ (这里需 A 大于零).

D. 极限存在准则

(1) 单调有界原理

若数列$\{x_n\}$满足 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} < \cdots$，且对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有 $x_n \leqslant M$，则数列$\{x_n\}$收敛.

同样，若数列$\{x_n\}$满足 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots$，且对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有 $x_n \geqslant m$，则数列$\{x_n\}$收敛．

(2) 夹逼定理

设 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim f(x) = \lim h(x) = A$，则

$$\lim g(x) = A.$$

E. 两个重要极限

(1) 重要极限之一

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

推广形式：

$$\lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e};$$

$$\lim_{\varphi(x) \to 0}(1 + \varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = \mathrm{e} \quad (\varphi(x) \neq 0);$$

$$\lim_{\varphi(x) \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} = \mathrm{e}.$$

(2) 重要极限之二

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

推广形式：

$$\lim_{\varphi(x) \to 0}\frac{\sin(\varphi(x))}{\varphi(x)} = 1 \quad (\varphi(x) \neq 0).$$

F. 无穷小与无穷大

以零为极限的函数称为无穷小．

无穷小的基本性质：

① 有限个无穷小之和为无穷小．

② 有界函数乘以无穷小为无穷小．

③ 有限个无穷小之积为无穷小．

在同一个极限过程中，若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大；反之若 $f(x)$ 是无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

G. 无穷小的比较

设 α，β 是两个同一个极限过程中的无穷小，若

① $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，称 α 是比 β 高阶的无穷小，记为 $\alpha=o(\beta)$.

② $\lim\frac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$，称 α 与 β 是同阶无穷小.

③ $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$，称 α 与 β 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

当 $x\to 0$ 时，有

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ 等等.

（三）连续

A. 连续的概念

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

若令 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，上式极限等价于

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

又若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，分别称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续或左连续.

定理 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 点既左连续又右连续.

函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内任一点都连续，称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

函数 $f(x)$在(a, b)内连续，在 $x=a$ 点右连续，在 $x=b$ 点左连续，称 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续.

B. 间断点及分类

若 $f(x)$在 x_0 点不连续，称 $f(x)$在 x_0 点间断，x_0 为 $f(x)$的一个间断点.

间断点可分为以下两类：

第一类间断点：左、右极限都存在的间断点. 进一步，如果 $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$，x_0 为 $f(x)$的跳跃间断点；如果 $f(x_0+0)=f(x_0-0)$，x_0 为 $f(x)$的可去间断点.

第二类间断点：除去第一类间断点以外的间断点，特别当左、右极限中至少有一个无穷大者，为无穷间断点.

C. 闭区间上连续函数的性质

(1) 零点定理

设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使 $f(\xi)=0$.

(2) 介值定理

设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，$f(a)=A$，$f(b)=B$，则对介于 A 与 B 之间任一实数 μ，在(a, b)内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\mu$.

(3) 最大值最小值定理

设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，则 $f(x)$在$[a, b]$上必能取得最大值 M 与最小值 m.

这就是说至少能找到两点 x_1 和 x_2，使 $f(x_1)=\max\limits_{x\in[a, b]} f(x)=M$，及 $f(x_2)=\min\limits_{x\in[a, b]} f(x)=m$，且对 $\forall x\in[a, b]$ 有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

(4) 有界性

若 $f(x)$在$[a, b]$上连续，则 $f(x)$在$[a, b]$上有界.

1.2 典型例题

(一) 选择题

例 1 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是(　　).

(A) 有界函数　　　　(B) 单调函数

(C) 周期函数　　　　(D) 偶函数

解 显然,$|x\sin x|$ 是偶函数,而 $e^{\cos x}$ 也是偶函数,故 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$ 是偶函数,所以选 D.

例 2 $f(x)=\sin x e^{-|x|}\ln|x|(-\infty<x<+\infty)$ 是(　　).

(A) 周期函数　　　　(B) 有界函数

(C) 单调函数　　　　(D) 偶函数

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^x}=0$,而 $\sin x$ 是有界函数,所以 $f(x)=\sin x e^{-|x|}\ln|x|$ 是有界函数,所以选 B.

例 3 设函数 $f(x)$ 连续,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则(　　).

(A) 当 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数时,$F(x)$ 必是以 T 为周期的周期函数

(B) 当 $f(x)$ 是单调函数时,$F(x)$ 必为单调函数

(C) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必为奇函数

(D) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必为偶函数

解 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$,首先当 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数时

$$F(x+T)=\int_0^{x+T}f(t)dt+C=\int_0^x f(t)dt+\int_x^{x+T}f(t)dt+C$$
$$=F(x)+\int_0^T f(t)dt\neq F(x),$$

故排除 A.

其次,当 $f(x)$ 是单调函数,例如 $f(x)=2x$,其一个原函数为 x^2+

C，显然不单调，故排除 B.

又当 $f(x)$ 是偶函数 $(f(-x)=f(x))$ 时

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=-\int_0^{x} f(-t)\mathrm{d}t+C$$
$$=-\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t+C,$$

显然仅当 $C=0$ 时，才是奇函数，又排除 C.

最后当 $f(x)$ 是奇函数 $(f(-x)=-f(x))$ 时

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=-\int_0^{x} f(-t)\mathrm{d}t+C$$
$$=\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t+C=F(x),$$

所以应选 D.

例 4 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a，b 是常数，则（　　）.

(A) $a=1,\ b=1$　　(B) $a=-1,\ b=1$

(C) $a=1,\ b=-1$　　(D) $a=-1,\ b=-1$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-(ax+b)(x+1)}{x+1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0,$$

得 $1-a=0$，$a+b=0$，即 $a=1$，$b=-1$，故选 C.

例 5 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1})$ 之值为（　　）.

(A) 0　　(B) 1

(C) ∞　　(D) 不存在

解 因为

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= -\lim_{x \to -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2},$$

原极限不存在,故选 D.

例 6 当 $x \to 0$ 时,函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是(　　).

(A) 无穷小　　(B) 无穷大

(C) 有界,但不是无穷小　　(D) 无界,但不是无穷大

解 取 $x_n = \frac{1}{n\pi}$,有 $f(x_n) = 0$,而取 $x'_n = \frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$,有 $f(x'_n) = \left(2n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$,当 $n \to \infty$ 时,$f(x'_n) \to \infty$,所以选 D.

例 7 设当 $x \to 0$ 时,$e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小,则(　　).

(A) $a = \frac{1}{2},\ b = 1$　　(B) $a = 1,\ b = 1$

(C) $a = -\frac{1}{2},\ b = 1$　　(D) $a = -1,\ b = 1$

解 因为 $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - (ax^2 + bx + 1)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 2ax - b}{2x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 2a}{2} = 0,$$