中学数学复习题演算

（解析几何、微积分、概率部分）

江苏人民出版社

中学数学复习题演算

（解析几何、微积分、概率部分）

南京师范学院数学系编写组

江苏人民出版社

中学数学复习题演算

（解析几何、微积分、概率部分）

南京师范学院数学系编写组

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行　　扬州印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　印张6.5　字数137,000

1982年2月第1版　1982年2月第1次印刷

印数 1—31,600册

书号：7100·148　　定价：0.47元

责任编辑　何震邦

编 者 的 话

中学数学是培养学生具有参加社会主义革命和建设，以及学习现代科学技术所必需的基础知识的一门重要学科。通过数学教学，要求学生具有正确、迅速的运算能力，逻辑思维能力，空间想象能力，以及分析问题和解决问题的能力。学生对数学概念的理解是否深透，对公式的掌握是否熟练，定理的推导合理与否，运算方法的巧妙和拙劣、正确与错误等，无不在演题过程中反映出来。所以，演算和论证足够数量的数学题是掌握和巩固数学基础知识和基本技能的途径和关键。基于上述考虑，我们编写了这套《中学数学复习题演算》，供高中毕业生和具有高中文化水平的知识青年复习中学数学知识时选用，也可给中学数学教师指导学生复习时参考。

这套《中学数学复习题演算》按《全日制十年制学校中学数学教学大纲（试行草案）》精神，蒐集了国内、国外从二十年代至今的各类试题，数学刊物和复习资料上的例题、习题，共七百余题。分三册出版：1.代数部分；2.平面几何、立体几何、三角部分；3.解析几何、微积分、概率部分。选入的复习演算题多数为典型生动有一定难度的习题，也有一定数量有启发性的在运算技能技巧方面有特色的习题。考虑到实际演算的需要，本书的演题有详解、简解、一题多解等多种形式，也有少数只作简单提示。这些都是为了便于读者在学习解题方法的过程中，巩固数学基础知识，开阔解题思路，掌握演题技能技巧，从而达到举一反三，触类

旁通的目的。

这三册《中学数学复习题演算》由沈超、涂世泽、胡光惠、吴蔚先、王不平、苏起凡、金炳陶、王庆福、蒋纯淀、陈永林、葛福生编写。蔡绍稷、王庆福绘制了全部插图。限于编者水平，在内容选择上难免不够完备，缺点错误更在所难免，欢迎广大读者批评指正。

南京师范学院数学系编写组

一九八〇年十月

目　　录

第四部分　平面解析几何

一、平面直角坐标系

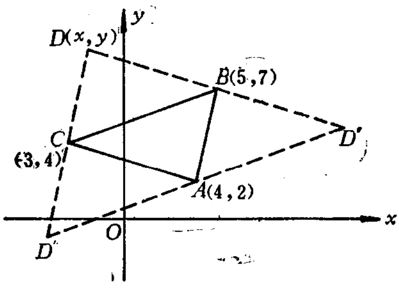
1. 已知一平行四边形的三个顶点$A(4,2)$、$B(5,7)$和$C(-3,4)$，求第四顶点D的坐标。

解法一　利用两点距离公式。

设D点的坐标为(x,y)，

则有

$$\begin{cases}\sqrt{(x-5)^2+(y-7)^2}=\sqrt{(4+3)^2+(2-4)^2}\,,\\ \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(5-4)^2+(7-2)^2}\,.\end{cases}$$



(1题图)

解之得D点的坐标为$(-2,9)$。

同理可得另外符合条件的两点为$D'(-4,-1)$和$D''(12,5)$。

解法二　利用斜率公式。

从$k_{CD}=k_{AB}$，$k_{BD}=k_{AC}$，得

$$\begin{cases}\dfrac{y-4}{x+3}=\dfrac{7-2}{5-4},\\[2ex] \dfrac{y-7}{x-5}=\dfrac{4-2}{-3-4}.\end{cases}$$

解之得$D(-2,9)$，同理可得其他二点。

解法三 利用定比分点公式。

因为平行四边形的对角线互相平分；线段AD、BC有同一中点，所以

$$\begin{cases}\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{5-3}{2},\\[2ex] \dfrac{y+2}{2}=\dfrac{7+4}{2}.\end{cases}$$

解之得$D(-2,9)$，同理可得其他二点。

解法四 利用面积公式

因为$ABDC$为平行四边形，即$\triangle BCD$、$\triangle ABC$与$\triangle ABD$的面积相等，所以

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ -3 & 4 & 1\\ 5 & 7 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1\\ 5 & 7 & 1\\ -3 & 4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 5 & 7 & 1\end{vmatrix},$$

解此方程组得$D(-2,9)$.同理可得其他二点。

注意：三角形面积公式中的行列式，三点的坐标必须按逆时针顺序排列

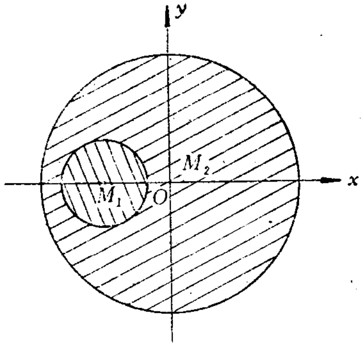
$$\begin{matrix} & C & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ A & \rightarrow & B\end{matrix}.$$

2. 从半径等于15厘米的均匀薄圆板上，挖去一个半径等于5厘米的小圆板。已知这个小圆板的圆心和原来圆板的圆心的距离等于8厘米，求所剩薄板的重心。

解 取原来圆板的圆心O为坐标原点，两圆连心线为x轴，建立直角坐标系如右图。设小圆的圆心M_1（-8，0），剩下的薄板的重心M_2（x,0），由小圆与挖去后的圆的质量比为

$$\frac{5^2\pi}{15^2\pi-5^2\pi}=\frac{1}{8},$$得

$\lambda=\dfrac{M_1O}{OM_2}=8$.由定比分点



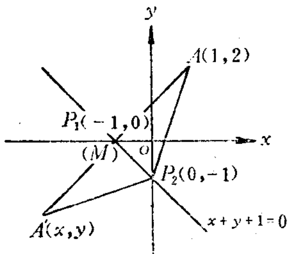
（2题图）

公式得$0=\dfrac{-8+8x}{1+8}$，解之得$x=1$。所以剩下薄板的重心在两圆连心线上，距原来圆板圆心1厘米处。

此题可以将M_2作为线段M_1O的外分点，读者可以自行研究。

3.求A（1，2）关于直线$x+y+1=0$的对称点$A'(x,y)$的坐标。

解法一 在直线$x+y+1=0$上任取两点，如P_1（-1,0），P_2（0,-1）。由于直线$x+y+1=0$上的点到A和A'两点的距离相等，得



（3题图）

$$\begin{cases}(x+1)^2+y^2=(1+1)^2+2^2,\\x^2+(y+1)^2=1^2+(2+1)^2.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x^2+2x+y^2=7, & (1)\\x^2+2y+y^2=9. & (2)\end{cases}$$

由(1) - (2)得

$$x = y - 1. \tag{3}$$

将(3)代入(2)，并整理得 $y^2 = 4$.所以$y = -2$（另一根$y = 2$是A点的纵坐标）.

再由(3)可得 $x = -3$，即A'点的坐标为$(-3, -2)$。

解法二 过A点垂直于直线$x + y + 1 = 0$的方程为

$$y - 2 = x - 1,$$

即

$$x - y + 1 = 0. \tag{4}$$

(4)和直线$x + y + 1 = 0$的交点M的坐标为$(-1, 0)$（此时正好是P_1点）。注意到M点是AA'线段的中点，于是有

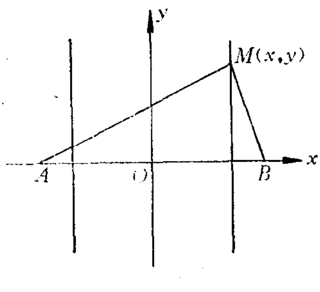
$$\frac{x + 1}{2} = -1, \quad \frac{y + 2}{2} = 0.$$

解之得 $x = -3$，$y = -2$.

二、曲线与方程

4. 求到两定点的距离的平方差为定数的点的轨迹.

解 取两定点连成的线段AB的中点O为原点，线段AB所在直线为x轴，建立坐标系，如图. 设$|AB| = 2a$，定数为b，动点M为(x, y)。于是A、B的坐标分别为$(-a, 0)$、$(a, 0)$. 据题意，有 $|AM|^2 - |BM|^2 = b$，或 $|BM|^2 - |AM|^2 = b$. 合并写成 $|AM|^2 - |BM|^2 = \pm b$.



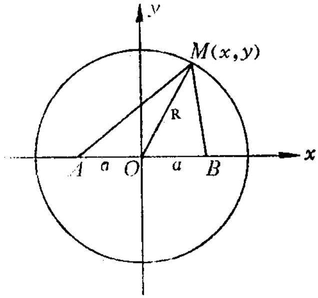
（4题图）

由此得　$(x+a)^2+y^2-(x-a)^2-y^2=\pm b$，

即　$x=\pm\dfrac{b}{4a}$。

因此，所求的轨迹是一对平行于y轴的直线（称为定差幂线）。

5. 求到两定点的距离的平方和为定数b的点的轨迹。



（5题图）

解　以两定点A、B的连线作为x轴，取AB的中点O为原点，建立坐标系并设$|AB|=2a$。

据题意可得方程

$(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2=b$，

即　$x^2+y^2=\dfrac{b}{2}-a^2$。

讨论：

(1)　若$\dfrac{b}{2}-a^2>0$，轨迹为一圆（定和幂圆），设半径为R。

①　当$b>4a^2$时，$R>a$；

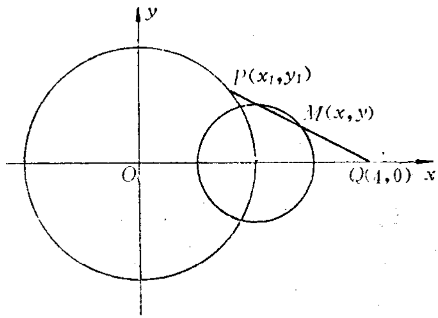
②　当$b=4a^2$时，$R=a$；

③　当$b<4a^2$时，$R<a$。

(2)　若$\dfrac{b}{2}-a^2=0$，轨迹为一点（或称点圆）。

(3)　若$\dfrac{b}{2}-a^2<0$，无轨迹（或称虚圆）。

6. 如图，已知P为圆$x^2+y^2=4$上的一个动点，又点Q的坐标为（4，0），试求线段PQ的中点M的轨迹。



（6 题图）

解 设线段PQ的中点M的坐标为（x,y），P点的坐标为（x_1,y_1），那么有

$$x_1^2+y_1^2=4, \tag{1}$$

及 $x=\dfrac{x_1+4}{2}$，　$y=\dfrac{y_1}{2}$，

即 $x_1=2x-4$，　$y_1=2y$。　(2)

(2)代入(1)，得

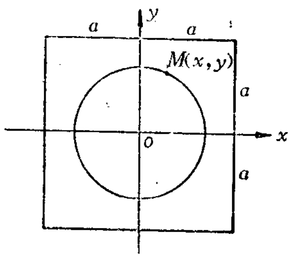
$$(2x-4)^2+(2y)^2=4,$$

即

$$(x-2)^2+y^2=1.$$

所以所求的轨迹为中心在点（2，0），半径等于1的圆。

7. 求到边长为$2a$的正方形各边的距离平方和等于定数b的点的轨迹。



（7 题图）

解 取正方形的中心O为原点，坐标轴平行于正方形的边，建立坐标系，如图所示。

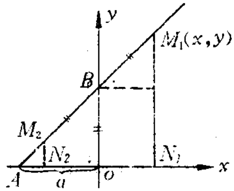
设动点为M（x，y），据题意有

$$(a-x)^2+(a+x)^2+(a-y)^2+(a+y)^2=b,$$

即 $x^2+y^2=\dfrac{b}{2}-2a^2$。

轨迹是以正方形中心为圆心，半径等于$\sqrt{\dfrac{b}{2}-2a^2}$的圆（读者自行讨论）。

8. 给定直线Oy和到它具有距离a的点A（如图）。绕点A回转射线AB而且在其上从点B（射线与轴Oy的交点）的两侧截取变动的线段BM_1和BM_2，使它们都等于OB的长。当AB回转时，点M_1和M_2画成一条曲线，称之为环索线。试建立此曲线的方程，并作图。



（8题(1)图）

解 建立坐标系，如图。设点M_1（M_2）的坐标为(x,y)，从M_1（M_2）作x轴的垂线，垂足为N_1（N_2），那么，有

$$\frac{OB}{a}=\frac{y}{a+x}, \quad \text{及} \quad x^2+(y-OB)^2=MB_1^2=OB^2.$$

由此得 $$\left(y-\frac{ay}{a+x}\right)^2+x^2=\frac{a^2y^2}{(a+x)^2},$$

即得环索线的方程为

$$y^2=x^2\cdot\frac{a+x}{a-x}.$$

现在研究作图。

由上面环索线方程知：

(1)对称性　关于x轴对称。

(2)截距　当$x=0$时，$y=0$；

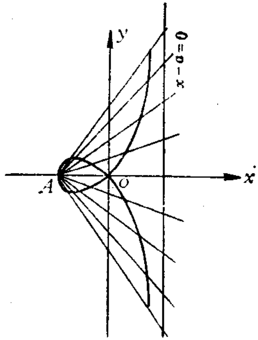
当$y=0$时，$x=-a$。

(3)范围　$-a\leqslant x<a$，

当$x\to a$，$y\to\pm\infty$。

(4)列函数值表：

x	$-a$	$-\frac{a}{2}$	0	$\frac{a}{2}$	……
y	0	$\frac{\sqrt{3}}{6}a$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	……



(8题(2)图)

最后描点、绘图。

还可以根据曲线的形成，直接采用几何方法画出图形，如右图。

9。证明：方程

$x^4+2x^2y^2+y^4-16x^2-16y^2=4x^3+4xy^2-64x$

的图形是两个互相内切的圆。

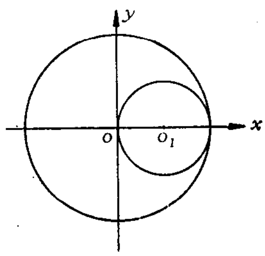
证　原方程可以写成

$(x^2+y^2)^2-16(x^2+y^2)=4x(x^2+y^2-16)$，

即　$(x^2+y^2-16)(x^2+y^2-4x)=0$。

所以曲线由二圆 $x^2+y^2=16$ 和 $(x-2)^2+y^2=4$ 所组成。

第一个圆的中心在原点，半径R等于4；第二个圆的中心在点O_1(2，0)，半径R_1等于2（右图）。由于 $|OO_1|=2=R-R_1$，所以两圆相内切。命题由此得证。



(9题图)

三、直　线

10. 平行四边形的两邻边方程是$x+y+1=0$与$3x-y+4=0$，且对角线交点是（3，3），求其他两边的方程。

解　直线$x+y+1=0$及$3x-y+4=0$的交点为$A\left(-\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)$．又因对角线交点为$M$（3，3），所以与$A$点相对的顶点$C(x_C, y_C)$可用定比分点公式求得

$$\begin{cases} 3=\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{4}+x_C\right), \\ 3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+y_C\right). \end{cases}$$

解之得　$C\left(7\frac{1}{4}, 5\frac{3}{4}\right)$.

所求的其他两边就是过C点平行于已知两边的直线，其方程分别为$\left(y-5\frac{3}{4}\right)=-\left(x-7\frac{1}{4}\right)$，

和　$\left(y-5\frac{3}{4}\right)=3\left(x-7\frac{1}{4}\right)$.

整理得其他两边方程为　$x+y-13=0$ 和 $3x-y-16=0$.

11. 直线l经过点（6，8），且与两轴围成的三角形面积等于12，求l的方程。

解　设l的方程为　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

因为点（6，8）在l上，所以有$\frac{6}{a}+\frac{8}{b}=1$.　(1)

又因为 l 与两轴围成的三角形面积等于12，于是有

$$\frac{1}{2}|a\cdot b| = 12. \qquad (2)$$

解(1)，(2)得 $a=-6$，$b=4$；或$a=3$，$b=-8$。

因此 l 的方程为 $2x-3y+12=0$，

或 $8x-3y-24=0$。

12. 求适合下列条件的直线方程：

(1) 经过两直线 $2x-y+4=0$，$x-y+5=0$ 的交点，并且和点$P(2,-1)$的距离等于5。

(2) 经过两直线 $3x+2y-6=0$和 $4x-3y-12=0$的交点，并且和两坐标轴所围成的三角形面积是3。

解 (1) 设直线方程为

$$2x-y+4+k(x-y+5)=0,$$

即

$$(2+k)x-(1+k)y+4+5k=0. \qquad (1)$$

因为点$P(2,-1)$到所求直线的距离等于5，所以有

$$\frac{|(2+k)\cdot 2-(1+k)\cdot(-1)+4+5k|}{\sqrt{(2+k)^2+(1+k)^2}}=5.$$

解之得 $k=2$ 或$k=-\frac{11}{7}$。分别代入(1)得所求直线方程为 $4x-3y+14=0$ 或 $3x+4y-27=0$。

(2)设所求直线方程为

$$3x+2y-6+k(4x-3y-12)=0. \qquad (2)$$

令$x=0$，得直线在y轴上的截距为 $y=\frac{6(1+2k)}{(2-3k)}$；

令$y=0$，得直线在x轴上的截距为 $x=\dfrac{6(1+2k)}{(3+4k)}$。

由题设知 $\dfrac{1}{2}|x\cdot y|=3$，

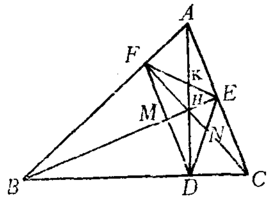
即 $$\frac{1}{2}\cdot\frac{6(1+2k)}{(3+4k)}\cdot\frac{6(1+2k)}{(2-3k)}=\pm 3.$$

解之得 $k=0$或$k=-\dfrac{25}{36}$。分别代入(2)得所求直线方程为

$$3x+2y-6=0 \text{ 或 } 8x+147y+84=0.$$

13. 已知$D(4,0)$，$E\left(\dfrac{80}{17},\dfrac{20}{17}\right)$，$F\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}\right)$是$\triangle ABC$三条高$AD$，$BE$，$CF$的垂足，求$A$，$B$，$C$的坐标。

解 由平面几何知$\triangle ABC$的三条高AD，BE，CF必是它垂足三角形DEF的三内角平分线。



(13题图)

设K，M，N是AD，BE和CF与垂足三角形DEF各对应边交点。为此，求K，M，N三点坐标。

$\because$ $|DF|=\dfrac{1}{2}\sqrt{34}$，$|DE|=\dfrac{4\sqrt{34}}{17}$，

$\therefore$ $\lambda=FK/KE=DF/DE=17/8$，

$\therefore$ $x_K=\dfrac{x_F+\lambda x_E}{1+\lambda}=4$，

$$y_K=\frac{y_F+\lambda\cdot y_E}{1+\lambda}=\frac{8}{5}，\text{即}K\left(4,\frac{8}{5}\right).$$