计　算　方　法

北京大学地球物理系数值预报进修班

一九七四年三月

目 录

第一章 插值法

§1 引论

§2 差分概念

§3 牛顿插值公式

§4 拉格朗日插值公式

§5 样条拟合 (Spline)

§6 小结

第二章 双曲型偏微分方程的差分法

§1. 什么是双曲型偏微分方程？

§2 双曲型方程的模型 $\frac{\partial\rho}{\partial t}+c\frac{\partial\rho}{\partial x}=0$

§3 初值问题 (2.12) 的几种差分格式

§4 差分格式的收敛性、收敛的必要条件

§5 差分格式的稳定性，冯·诺依曼 (von Neumann) 必要条件

§6 拉克斯 (Lax) 格式，正型差分格式

§7 拉克斯——文德罗夫 (Lax-Wendroff) 格式

§8 隐式格式和迭代格式（欧拉向后公式）

§9 交错格式和计算波

§10. 二维问题的稳定性条件

§11. 非线性平流项的差分和非线性不稳定

§12 小结

第六章 椭圆型方程的数值介法

§1. 何谓椭圆型方程？

§2 椭圆型方程的差分格式

§3 椭圆型差分方程组的特点

§4 迭代法的想法及类型

§5 简单迭代法和塞得耳(seidel)迭代法

§6 简单迭代法和塞得耳迭代法的收敛性及收敛速度

§7 里查逊(Richardson)迭代法及其收敛速度

§8 付-杨氏(Frankel—Young)超张驰法及其收敛性

§9 有限单元法

§10. 小结。

第一章 插值法

§1 引论

在很多实际问题中，常々对应于一些测量值x_i有一些测量的函数值y_i，即通常给出值

$$(x_0y_0)(x_1y_1)(x_2y_2)\cdots\cdots(x_ny_n) \tag{1.1}$$

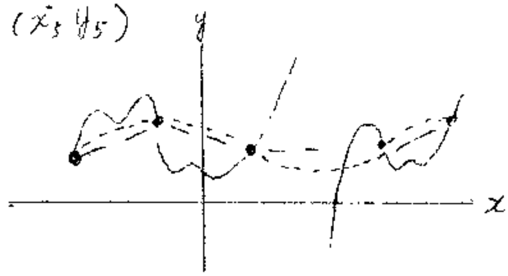
我们愿望找一个x和y的函数关系

$$y=f(x) \tag{1.2}$$

它要通过我们的点$(x_0y_0),(x_1y_1),\cdots\cdots(x_ny_n)$，而且对其它的$x$值，我们希望通过$y=f(x)$求到"合理"的$y$值。

问题是怎么叫"合理"呢？下图中已知五个点．

$$(x_1y_2)(x_2y_2)\cdots\cdots(x_5y_5)$$



有三种不同的曲线通过这五个点。长虚线是两点间都是直线，短虚线是平滑弧线，实线是有奇異性的振荡函数。如果我们没有其它的要求资料给出，我们一般就选择平滑的弧线作为最"合理"的。这样一种问题，叫曲线拟合问题

曲线拟合大致有两种类型。

一种类型是从物理上可能知道函数的形式。例如已知三点值$(0,0)$ $(1,1)$，$(2,1)$，又知道函数是直线形式即

$$y=C_1+C_2x \tag{1.3}$$

怎么决定常数C_1C_2呢？但是此时就不能保证函数通过所有的

点，即总有误差

$$\begin{cases}(C_1+C_2\cdot 0)-0=\delta_1\\(C_1+C_2\cdot 1)-1=\delta_2\\(C_1+C_2\cdot 2)-1=\delta_3\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}C_1=\delta_1\\C_1+C_2-1=\delta_2\\C_1+2C_2-1=\delta_3\end{cases}\tag{1.4}$$

为了决定 C_1、C_2，我们使得误差的平方和为最小，即

$$\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2=\text{最小}\tag{1.5}$$

因为(1.5)是 C_1C_2 的函数，要求(1.5)最小，必要是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)}{\partial C_1}=0\\[2ex]\dfrac{\partial(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)}{\partial C_2}=0\end{cases}\tag{1.6}$$

即

$$\begin{cases}2\delta_1\dfrac{\partial\delta_1}{\partial C_1}+2\delta_2\dfrac{\partial\delta_2}{\partial C_1}+2\delta_3\dfrac{\partial\delta_3}{\partial C_1}=0\\[2ex]2\delta_1\dfrac{\partial\delta_1}{\partial C_2}+\delta_2\dfrac{\partial\delta_2}{\partial C_2}+2\delta_3\dfrac{\partial\delta_3}{\partial C_2}=0\end{cases}\tag{1.7}$$

将(1.4)式代入(1))得

$$C_1+(C_1+(2-1)+(C_1+2C_2-1)=0$$

$$C_1\cdot 0+(C_1+C_2-1)+(C_1+2C_2-1)\cdot 2=0$$

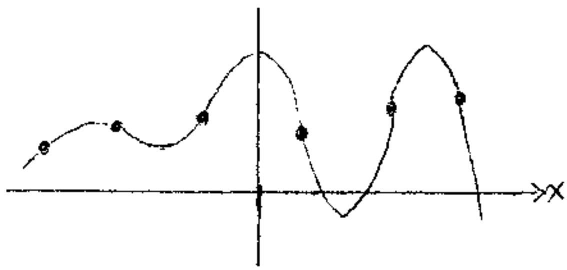
或
$$\begin{cases}3C_1+3C_2=2\\ 3C_1+5C_2=3\end{cases}$$

由此解出 $C_1=\frac{1}{6}$ $C_2=\frac{1}{2}$

则所求的曲线拟合是

$$y=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}x$$

曲线拟合的另一种类型就是插值，它并不要求定出一个拟合曲线 $f(x)$ 的表达式，而是希望把除 $(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)$ 点以外的 x 相对应的 y 值比较"合理"的求出来。像我们经常所做的那样，在已知 $n+1$ 个点上，造一个 n 次多项式



（如右图造了一个5次多项式），这个方法就是我们以后要介绍的古典的牛顿和拉格伦日插值公式。从图上看这种方法并不是很理想的，因为它在拟合的点之间产生激烈的振荡。为此我们要介绍一种比较理想的插值方法——叫 spline fits，翻译词为"样条"拟合。

习题。已知三点 $(0,1)$、$(1,-2)$，$(1,-40)$ 找函数 $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$ 使这三点离 y 的差的平方和最小。

（答案 $y=2e^{x}-e^{-2x}$）

§2.差分概念

设函数 $y=f(x)$ 在等距离结点 x_0、$x_1=x_0+h$，…，$x_n=x_0+nh$ 处上的值 $y_0, y_1 \cdots y_n$ 给定，则称

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= y_1 - y_0 \\ \Delta y_1 &= y_2 - y_1 \\ &\vdots \\ \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i \end{aligned} \qquad (1.8)$$

分别为 y_0、y_1、y_i 的一阶向前差分，简称差分。

而一阶差分的差分则称为二阶差分

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_i &= \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1}-y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \\ &= (y_{i+2}-y_{i+1}) - (y_{i+1}-y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \end{aligned} \qquad (1.9)$$

同样可定义更高阶的差分。由此还看出，差分是通过分点的函数值的线性组合来表达的，函数值的个数比差分阶数高一（例如二阶差分用三个点 $y_i\ y_{i+1}\ y_{i+2}$），而其系数与牛顿二项式 $(a-b)^n$ 的展开式的系数相同。例如

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 \qquad (1.10)$$

同样，可定义 y_i 的向后、中央差分

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}, \quad \delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}$$

在实际计算时常用差分表来表示。

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & y_0 & \Delta y_0 & \Delta^2 y_0 & \Delta^3 y_0 \\
x_1 & y_1 & & & \\
x_2 & y_2 & \Delta y_1 & \Delta^2 y_1 & \\
x_3 & y_3 & \Delta y_2 & &
\end{array}$$

例如：$y=x^4$的差分表如下

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	0					
		1				
1	1		14			
		15		$36+\varepsilon$		
2	16		$50+\varepsilon$		$24-4\varepsilon$	
		$65+\varepsilon$		$60-3\varepsilon$		$0+10\varepsilon$
3	$81+\varepsilon$		$110-2\varepsilon$		$24+6\varepsilon$	
		$175-\varepsilon$		$84+3\varepsilon$		$0-10\varepsilon$
4	256		$194+\varepsilon$		$24-4\varepsilon$	
		369		$108-\varepsilon$		
5	625		302			
		671				
6	1296					

由此表看出，四阶差分$\Delta^4 y$已是常数，通常n阶多项式的第n阶差分为常数，这一点类似于导数。还要指出，若某一函数值例如$y(x=3)$，有误差ε，那么这误差就会随着差分阶数愈高愈增大（如上表），因此通常计算差分到某一阶几乎是常数为止，再高的差分就无大意义。

§3 牛顿插值公式

要通过$n+1$个点$(x_0 y_0)$，$(x_1 y_1)\cdots(x_n y_n)$建立n次多项式

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \qquad (1\cdot11)$$

若把$n+1$个点代入，则可决定$n+1$个係数$a_0, a_1, \cdots a_n$，这要解$n+1$个方程的方程组。但是这太麻烦，我们若写成形式

$$y = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) \cdots + \\ + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (1.12)$$

定係数 $a_0, a_1, \cdots a_n$ 就可立即写出。下面我们给出几个公式，同志们可以自己验証，它们必然通过 $n+1$ 个点 $(x_0\ y_0)(x_1\ y_1)\cdots\cdots(x_n\ y_n)$，x 的间距为 h。

(1) 牛頓向前插值公式

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots\cdots \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_0)\cdots\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (1.13)$$

若設 $t = \frac{x-x_0}{h}$，则 (1.13) 变成

$$y = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) + \cdots\cdots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)(t-2)\cdots\cdots(t-n+1) \qquad (1.14)$$

(2) 牛頓向后插值公式

(1.13) 的右端改写成

$$y = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \cdots\cdots \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots\cdots(x-x_1) \qquad (1.15)$$

或设 $t = \frac{x-x_0}{h}$，则

$$y = y_n + \Delta y_{n-1}t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}t(t+1) + \cdots\cdots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t+1)\cdots(t+n-1) \qquad (1.16)$$

应该指出，这两个公式(1.13)，(1.15)，取两项就是线性插值公式，取三项就是二次插值公式。

(3) 司蒂林 Stirling 插值公式

这公式又叫中央差分公式，共 2n+1 个点

$$(x_{-n}\ y_{-n})\cdots\cdots(x_{-1}\ y_{-1})\ (x_0\ y_0)(x_1\ y_1)\cdots\cdots(x_n\ y_n)$$

造出 2n 次多项式

$$y=y_0+t\ \frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}+\frac{t^2}{2}\Delta^2 y_{-1}+\frac{t(t^2-1^2)}{3!}\ \frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}$$

$$+\frac{t^2(t^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\cdots\cdots+\frac{t(t^2-1^2)\cdots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}\ \frac{\Delta^{2n-1}y_{-n}+\Delta^{2n-1}y_{-n+1}}{2}$$

$$+\frac{t^2(t^2-1^2)\cdots\cdots[t^2-(t-1)^2]}{(2n!)}\Delta^{2n}y_{-n} \qquad (1.17)$$

其中

$$t=\frac{x-x_0}{h}$$

若是二次多项式则取前三项，若是四次多项式则是前五项。

(4) 贝塞尔 Besecl 插值公式

这也是中央插值公式，不过是通过 2n+2 个点的 2n+1 次多项式

$$y=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\ \frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+\frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$

$$+\frac{t(t^2-1^2)(t-2)}{4!}\ \frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}+\frac{(t-\frac{1}{2})t(t^2-1^2)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2}$$

$$+\cdots\cdots$$

$$+\frac{x(x^2-1^2)\cdots[x^2-(n-1)^2](x-n)}{(2n)!}\,\frac{\Delta^{2n}y_{-n}+\Delta^{2n}y_{-n+1}}{2}$$

$$+\frac{(x-\frac{1}{2})x(x^2-1^2)\cdots(x-n)}{(2n+1)!}\,\Delta^{2n+1}y_{-n} \qquad (1.18)$$

若是一次多项式取二项；若是三次多项式取四项。这四个公式是随被插值点的分佈不同而取用不同的形式。牛顿向前和向后公式分别用在插值点在前部和后部，而司帯林Stirling公式和贝塞尔Bessel公式则被插值点在中部附近。

在使用这四个公式时，均使用差分表，所以并不称太麻烦。

例如给出如下的表值，求 $y(x=1.05)$ 的值。

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1.0	$\boxed{2.0}$				
		$\boxed{0.1}$			
1.1	2.1		$\boxed{0.1}$		
		0.2		$\boxed{0.1}$	
1.2	2.3		0.2		$\boxed{0.1}$
		0.4		0.2	
1.3	2.7		0.4		-0.2
		0.8		0.0	
1.4	3.5		0.0		
		1.2			
1.5	4.7				

由于 $x=1.05$ 靠近表头1.0附近，所以用牛顿向前插值公式(1.10)我们先計标差分如上表，则 $\Delta^4 y$ 可以认为是常数，由

$$h=0.1 \quad x_0=1.0 \quad x=\frac{1.05-1.0}{0.1}=0.5$$

则

$$y=2.0+(0.5)(0.1)+\frac{(0.1)}{2!}(0.5)(-0.5)+\frac{0.1}{3!}(0.5)(-0.5)(-1.5)$$

$$+\frac{0.1}{4!}(0.5)(-0.5)(-1.5)(-2.5)$$

$= 2.0 + 0.5 - 0.0125 + 0.00625 - 0.00390625$

$= 2.03984375.$

公式(1.14)中所用到的差分，均用 $\boxed{}$ 表出，

§4 拉格伦日插值公式

前面牛顿插值公式常用在等距离的间格，若插值点不等距，则用拉格伦日公式

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}y_1$$

$$+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n \qquad (1.19)$$

很易验証，它显然通过点 $(x_0 y_0)\ (x_1 y_1)\cdots(x_n y_n)$

§5 "样条" spline 拟合

这个问题原来来源於制造中，我们通过几点可以用一种曲线板作成很光滑的曲线，好像一根软木条(叫样条 spline)可拟成通过这几点的一个很好的形状一样，这条曲线就是一个逐段(即每两点之间)三次多项式，使

$$y(x_i) = y_i$$

而且斜率(即一阶导数)，曲率(二阶导数)都连续，即

$$y_i'(x_i+0) = y_i'(x_i-0)$$

$$y_i''(x_i+0) = y_i''(x_i-0) \qquad (1.21)$$

下面我们看如何构造？设给出$n+1$个点的函数值为y_0，$y_1\ y_2\cdots y_n$，$(x_{i+1}-x_i=h_i)$。而它们的二阶导数用

$$M_0\ M_1\ M_2\cdots M_n$$

表示

显然每两点造三次多项式，

$$y=ax^3+bx^2+cx+d \qquad (1.22)$$

其中有4个系数要定出，而$n+1$个点要造n个三次多项式，因而共有$4n$个系数要定。而每点给出的条件有4个，

$$\begin{aligned} &y_{左}(x_i)=y_i \\ &y_{右}(x_i)=y_i \\ &y'_{左}(x_i+0)=y'_{右}(x_i-0) \qquad (1.23)\\ &y''(x_i+0)=y''_{右}(x_i-0) \end{aligned}$$

那么在内点$x_1\ x_2\cdots x_{n-1}$上共给出

$$4(n-1)=4n-4$$

个条件，加上边界$x_0=a$和$x_n=n$处有两个边界条件，则共有

$$4n-4+2=4n-2$$

个条件。

所以还须补加两个条件

我们先来推导“样条”Spline插值的方程

因为在点$(x_i\,y_i)(x_{i+1},y_{i+1})$，二阶导数分别是$M_i\ M_{i+1}$，

故这两点之间二阶导数可以表示为

$$y''=M_i\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+M_{i+1}\frac{x-x_i}{h_i} \tag{1.24}$$

将(1.24)积分一次便得到一阶导数

$$y'=-\frac{M_i(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}+\frac{M_{i+1}(x-x_i)^2}{2h_i}+C_1 \tag{1.25}$$

其中 C_1 是积分常数，再将(25)积分一次，便得到曲线方程

$$y=M_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}+M_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}+C_1x+C_2 \tag{1.26}$$

其中 C_2 也是积分常数

但是由 $y(x_i)=y_i \qquad y(x_{i+1})=y_{i+1}$

则代入(1.26)式

$$y_i=\frac{M_ih_i^2}{6}+C_1x_i+C_2$$

$$y_{i+1}=\frac{M_{i+1}h_i^2}{6}+C_1x_{i+1}+C_2$$

由此求出 C_1 C_2 为

$$C_1=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{(M_{i+1}-M_i)h_i}{6} \tag{1.27}$$

$$C_2=\frac{y_ix_{i+1}-y_{i+1}x_i}{h_i}-\frac{(M_ix_{i+1}-M_{i+1}x_i)h_i}{6} \tag{1.28}$$

将 C_1 C_2 代入(1.26)得到曲线方程

$$y=\frac{M_i(x_{i+1}-x)^3}{6h}+\frac{M_{i+1}(x-x_i)^3}{6h_i}+\left[(x_{i+1}-x)\left(\frac{y_i}{h_i}-\frac{M_ih_i}{6}\right)\right.$$

$$\left.+\left((x-x_i)\left(\frac{y_{i+1}}{h_i}-\frac{M_{i+1}h_i}{6}\right)\right)\right] \tag{1.29}$$

这个方程在 $i=0$ 到 $i=n-1$ 上列出。这就是各个区间上的函数曲线。但是这些函数还未确定，有两个未知数 $M_i\ M_{i+1}$.

我们回忆一下 (1.23)，看出第一第二第四个条件实际上都在前面已用上，但是第三个条件还未用。因此我们借用这个条件来帮助。

这个条件就是在由区间 $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ 所决定的一阶导数 (1.25) 在 x_i 的值，应和在区间 $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ 所决定的一阶导数 (1.25) 在 x_i 的值相等。

将(1.27)代入(1.25)得到区间 $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ 的一阶导数.

$$y' = \frac{-M_i\,(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} + \frac{M_{i+1}(x-x_i)^2}{2h_i} + \frac{(y_{i+1}-y_i)}{h_i} - \frac{(M_{i+1}-M_i)h_i}{6} \qquad (1.30)$$

同样在区间 $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ 上有

$$y' = \frac{-M_{i-1}(x_i-x)^2}{2h_{i-1}} + \frac{M_i\,(x-x_{i-1})^2}{2h_{i-1}} + \frac{(y_i-y_{i-1})}{h_{i-1}} - \frac{(M_i-M_{i-1})h_{i-1}}{6} \qquad (1.31)$$

(1.30) (1.31) 在 x_i 点的值相等，即

$$y_i' = -\frac{M_ih_i}{2} + \frac{(y_{i+1}-y_i)}{h_i} - \frac{(M_{i+1}-M_i)h_i}{6}$$

$$= \frac{M_ih_{i-1}}{2} + \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{(M_i-M_{i-1})h_{i-1}}{6} \qquad (1.32)$$

将 $M_{i-1}\ M_i\ M_{i+1}$ 集中在一边有

$$\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}M_{i-1}+2M_i+\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}M_{i+1}$$

$$=\frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \tag{1.33}$$

这(1.33)式在 $i=1,2,\cdots,n-1$ 列出共 $n-1$ 个方程，但有 $n+1$ 未知数 $M_0 M_1\cdots M_n$，所以像前面所讲要补加两个条件。补加条件的办法有几种。

(1) 在两端点二阶导数已知，即

$$M_0=y''\ 和\ M_n=y_n''\ 已知, \tag{1.34}$$

这叫自由条件

这样(1.34)、(1.33)构成 $n-1$ 个方程的方程组，其係数矩陣為

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{h_1}{h_0+h_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{h_1}{h_1+h_2} & 2 & \frac{h_2}{h_1+h_2} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \frac{h_{n-2}}{h_{n-2}+h_{n-1}} & 2 \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

注意此时 $M_1 M_n$ 属於常数项了

其未知向量為 $\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$

(2) 在两端点一阶导数已知，即

$$y_0' \quad y_n' \text{ 已知} \tag{1.36}$$

这叫嵌固条件

将(1.30)用於 $x=x_0$ 处（即 $i=0$）得

$$y_0' = -\frac{M_0 h_0}{2} + \frac{y_1-y_0}{h_0} - \frac{(M_1-M_0)h_0}{6}$$

整理后得

$$2M_0+M_1 = 6(y_1-y_0) - \frac{6y_0'}{h_0} \tag{1.37}$$

将(1.31)用於 $x=x_n$ 处（即 $i=n$）得

$$2M_n+M_{n-1} = 6(y_{n-1}-y_n) + \frac{6y_n'}{h_{n-1}} \tag{1.38}$$

这样(1.37)(1.38)加上(1.33)構成 $n+1$ 未知数 $\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}$ 的方程组，係数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{h_0}{h_0+h_1} & 2 & \frac{h_1}{h_0+h_1} & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{h_{n-1}}{h_{n-1}+h_n} & 2 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

(3)若两端点不可能给出微商条件

这时我们可以假设在点 (x_1, y_1)，和在点 (x_{n-1}, y_{n-1}) 的三阶导数连续。根据(1.24)三阶导数是

$$y''' = -\frac{M_i}{h_i} + \frac{M_{i+1}}{h_i} \tag{1.40}$$