



大学公共平台核心课程
系列教材

YINGYONG WEIJIFEN

应用微积分

主 编 吴肇基
副主编 陈卫忠

东南大学出版社

大学公共平台核心课程系列教材

应用微积分

(第 二 版)

主 编：吴肇基

副主编：陈卫忠

东南大学出版社

· 南京 ·

图书在版编目(CIP)数据

应用微积分/吴肇基,陈卫忠编. —南京:东南大学出版社,2005.9

(大学公共平台核心课程系列教材)

ISBN 7-5641-0065-6

I. 应... II. ①吴... ②陈... III. 微积分-高等学校-教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 060669 号

应用微积分

主 编	吴肇基	特聘主审	陈克龙
副 主 编	陈卫忠	责任编辑	惠 生
选题总策划	李 玉	责任印制	张文礼
整体设计		封面设计	康 靖

出版发行 东南大学出版社
社 址 南京四牌楼 2 号
邮 编 210096
经 销 江苏省新华书店

印 刷 南京京新印刷厂
开 本 700mm × 1000mm 1/16
印 张 26.5
字 数 650 千字
版 次 2005 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
印 数 1—10000 册
定 价 44.00 元

(凡因印装质量问题,可直接向读者服务部调换。电话:025-83792328)

大学公共平台核心课程系列教材编委会名单

主任委员：程宜康

副主任委员：李 玉 陈卫忠

委 员：（按姓氏笔画为序）

吴文英 吴肇基 张 军

李 政 李 玉 陈卫忠

黄晨曦 程宜康 戴 明

执行主编：李 玉

出版说明

教材建设是高等学校基本建设之一,教学改革的各种设想和试验,大多要通过教材建设来具体体现,教材建设反过来又推动和促进教学改革,两者间的关系是相辅相成的。因此,高质量的教材是培养高质量优秀人才的基本保证,发展高等教育,提高教育质量必须建设高质量的教材。目前,由东南大学出版社出版发行的“大学公共平台核心课程”系列教材,是以科学的教育发展观来统领教材编写体系,立足于大学生综合素质的提高,注重大学生创造性思维与创新能力的培养、有较强适用性的公共平台核心课程教材。本套教材第一辑将出版《应用微积分》、《工程数学》、《体育与健康》、《体育欣赏》、《经济学基础》共五种,以后还将陆续出版其他教材。

“大学公共平台核心课程”教材的编写基于以下几方面的考虑:一是学生综合素质的提高。加强基础,拓宽知识,培养能力,激励个性,提高综合素质,这也是目前高等教育整体改革的重要步骤,教材编写将重视人才培养模式调整 and 改革,为学生融会中外、贯通古今,掌握现代科学向交叉科学和边缘科学发展的理论奠定良好的基础。二是学生创新精神的培养。江泽民同志提出:“创新是不断进步的灵魂……创新,很根本的一条就是要靠教育,靠人才。”“大学公共平台核心课程”教材编写将最大限度地反映教学内容和课程体系改革的成果,成为适合创造性人才培养的教材,体现教育思想和教育观念的转变,根据科技进步和社会发展的最新成果不断地充实和更新教学内容。我们坚信,教材的先进性是人才培养创造性的基本前提,站在知识最高点才具有高瞻远瞩的眼光与勇于创新信心。三是教材的精品意识。“大学公共平台核心课程”教材的编写准确把握精品的科学内涵,不仅要求教材的高质量和高水平,还必须能够体现教材的先进性、实用性,并且能够提供全方位的人性化的服务。“大学公共平台核心课程”教材的编写力求达到思想性、科学性和方法论相统一;先进性和基础性相统一;综合性和针对性相统一;教材建设与教学改革相统一。

随着经济的发展,社会分工也在发生变化,专业交叉、职业渗透现象引起高校的重视,因而,对复合型人才的培养与需求,成为高校及用人单位普遍关注的热点问题。为提高人才竞争力,强化学生的综合素质培养,基础课教学正在加强,文理之间的学科交融越来越多,人才关键(核心)能力的培养引起教育工作者的高度重视。“大学公共平台核心课程”教材,重在加强学生基础课教学,关注人文教学,将人才综合素质的发展与提高为己任,真正实现德智体全面发展与人的个性化的统一,人文精神与科学素质的统一,文化传授与文化的选择、创新的统一,注重学生创造性思维与创新能力的培养和挖掘。“大学公共平台核心课程”教材的编写,同时着眼于具有高等教育水平的知识、技术能力及反映这些知识、技术能力内涵的理论知识的目标系统;有完成理论教学、具有高等教育特色的教学方法和达到知识、技术能力目标的训练方法;教材内容紧随科学技术、经济发展变化。在教材编写过程中,既吸收了目前最新的基础理论观点和实践、实验成果,又注意淘汰陈旧的知识、技术内容,保持教材的先进性。

“大学公共平台核心课程”教材编写将适应教材国际化、多样化、个性化发展趋势,用最先进的教学内容来武装学生,缩小与发达国家高等教育之间的差距。因此,“大学公共平台核心课程”教材的编写过程是动态的,随着教育、教学改革的深入发展,我们将关注国内外学术发展前沿、跟踪学科发展步调来不断地修订教材内容,保持教材内容的新鲜和知识的先进性。除纸质教材外,还将开发音像媒体、网络课件、CAI 课件、教学素材库、电子教案、试题库及考试系统和多媒体教学软件等教材,将各种相互作用、相互联系的媒体和资源有机地整合在一起,形成立体化教材。

“大学公共平台核心课程”教材的编写还处于探索阶段,随着一些新课程的开发、新教材的编写,“大学公共平台核心课程”教材的体系将不断完善,我们愿意为全国高校学生提供更多的精品教材。

大学公共平台核心课程系列教材编委会

2005 年 5 月



再版前言

教材建设是高等学校的基础建设之一,教材编写应最大限度地反映教学内容和课程体系改革的成果,以适用目前我国高等教育整体改革、人才培养模式改革的要求。

《应用微积分》第一版自 2001 年面市以来,受到广大读者的欢迎与支持,已重印 4 次。为适应高等教育规模的发展及高等数学教学改革的要求,我们与东南大学出版社该选题总策划同志有共同认识,动议改版,并希望能列入到“大学公共平台核心课程”系列教材中来。再版的《应用微积分》将以新的面貌、新的内容,展现在读者面前,竭诚为广大读者服务。

本次改版,为便于读者阅读和携带,将第一版的上、下册合并为一册;全稿重新组织措辞与编写,对例题和习题进行了增删和修改;增加了附录以同中学数学教科书相衔接;将 8 个数学实验并在一起作为第 9 章,以便在教学中可分别插到前面各章后面讲授和上机实践。

《应用微积分》出版四年来,承蒙使用本书的老师和学生给我们提出了很多宝贵的意见和建议,成为这次再版修订的重要依据。借此机会,编者同仁向他们以及所有读者表示衷心的感谢。

编 者

2005 年 5 月



第一版前言

进入 21 世纪,高等数学教学面临着如何使教材适应科学技术的迅猛发展、社会对人才素质要求的不断提高以及高等教育逐渐大众化的新问题。

现在全国各高校纷纷推出自己的新教材。我们根据自己长期的教学实践,展望新世纪对数学教学的要求,本着百花齐放的愿望,编写了这本教材。

在新的教学要求尚未出台的情况下,本教材仍按照原国家教委制定的《高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求》编写,努力贯彻“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则;讲清概念,减少论证,使学生掌握基本的概念、理论和计算技能,初步具备应用微积分方法解决实际问题的能力。

在本书的编写过程中,我们认为,传统的高等数学教材是经过长期教学实践形成的,已为广大师生所认可,应当加以继承;同时我们也作了一些新的尝试,主要有以下四点:

1. 加入了一些比较新颖的应用题以及若干与微积分有关的数学建模内容,目的是使传统教材带有一点时代气息。

2. 考虑到学工程的学生应当懂一点经济管理方面的知识,因此,书中插入了一些简单的边际分析等经济学应用题。

3. 微积分主要讨论连续变量。鉴于现在对离散变量的处理越来越重要,因而在讲完二阶线性微分方程之后,插入了与其形式和解法都十分相似的二阶线性差分方程。

4. 《基本要求》指出要“增加实验课”环节。当

Preface 前言

初主要是对物理、化学等课程而言的,但现在随着计算机的日益普及和数学软件的日趋完善,数学也开始引进实验手段。所以我们在本书上、下册各安排了四个数学实验,介绍如何使用数学软件 Mathematica 进行微积分的符号计算(如求极限、导数、积分、解微分方程),近似计算和绘制曲线、曲面的图形。该软件的强大功能和丰富而有趣的内容使微积分如虎添翼,大大拓宽了它的应用范围,对于培养学生的动手能力和解决实际问题的能力无疑是极为有利的。当然,考虑到各地区、各学校在硬件和软件方面的差异,我们把它们放在书末,目前暂无条件的学校可以不讲。

本书的教学时数在 130 学时左右(打 * 号的内容要另加学时),数学实验为 16 学时(包括教师讲课及学生上机练习)。

本书由吴肇基任主编,陈卫忠任副主编,参加编写的有:吴肇基(第一章、第八章),陈卫忠(第二章、第三章),华天瑞(第四章、第五章),章合利(第六章、第七章),陈剑(实验一、实验二),陆卫丰(实验三、实验四、实验五、附录),杨晓华(实验六、实验七、实验八)。陆卫丰绘制了本书的大部分图形;杨晓华修订了全部数学实验。全书最后由主编和副主编修改定稿。

本书由浙江大学数学系王斯雷教授主审,他提出了许多宝贵的改进意见。谨在此表示衷心的感谢!

由于我们水平有限,书中谬误之处难免存在,请使用本书的老师、学生和读者们不吝指教。

编 者

2001 年 4 月

目录

Contents

Contents

1	一元函数 极限 连续	1
1.1	一元函数	1
1.1.1	一元函数的概念	1
1.1.2	函数的一些性态	2
1.1.3	初等函数与非初等函数	3
1.1.4	由实际问题产生的一元函数	8
1.2	极限	11
1.2.1	数列的极限	12
1.2.2	函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限	14
1.2.3	函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限	15
1.3	极限的性质和运算法则	18
1.3.1	无穷小和无穷大	18
1.3.2	极限的性质与极限的运算法则	20
1.3.3	极限的存在准则 两个重要极限	25
1.4	无穷小的比较	30
1.5	函数的连续性	32
1.5.1	函数连续性的概念	32
1.5.2	连续函数的运算	35
1.6	闭区间上连续函数的性质	38
2	一元函数微分学	41
2.1	导数的概念	41
2.1.1	导数概念的引出	41
2.1.2	导数的定义	42
2.1.3	可导与连续的关系	43
2.2	求导法则	45
2.2.1	函数的和、差、积、商的求导法则	45
2.2.2	反函数的导数	48
2.2.3	复合函数的导数	50

Contents

2.2.4	隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	52
2.2.5	高阶导数	55
2.3	函数的微分	61
2.3.1	微分的定义	61
2.3.2	微分的公式与运算法则	62
2.3.3	微分在近似计算中的应用	64
2.4	微分中值定理及导数的应用	66
2.4.1	微分中值定理	66
2.4.2	泰勒公式	68
2.4.3	洛必达法则	70
2.4.4	函数的单调性和极值	74
2.4.5	函数的最大值和最小值	79
2.4.6	曲线的凹凸性与拐点	81
2.4.7	函数图形的描绘	83
* 2.4.8	曲率	87
* 2.4.9	一元函数微分学在经济中的应用	90
3	一元函数积分学	98
3.1	不定积分的概念与性质	98
3.1.1	原函数与不定积分的概念	98
3.1.2	不定积分的性质	100
3.1.3	基本积分公式	101
3.2	换元积分法	104
3.2.1	第一类换元积分法	104
3.2.2	第二类换元积分法	110
3.3	分部积分法	116
3.4	定积分的概念与性质	121
3.4.1	定积分的引例	121
3.4.2	定积分的定义	122
3.4.3	定积分的性质	123
3.5	微积分的基本定理	126
3.5.1	变上限定积分及其导数	126
3.5.2	牛顿—莱布尼兹公式	128

3.6	定积分的换元积分法与分部积分法	131
3.6.1	定积分的换元积分法	131
3.6.2	定积分的分部积分法	133
3.7	广义积分	135
3.7.1	无穷区间上的广义积分	135
3.7.2	无界函数的广义积分	138
3.8	定积分的应用	139
3.8.1	平面图形的面积	140
3.8.2	体积、平面曲线的弧长	143
3.8.3	定积分在物理中的应用举例	147
3.8.4	定积分在经济中的应用举例	148
4	微分方程	152
4.1	微分方程的基本概念	152
4.2	一阶微分方程	154
4.2.1	可分离变量方程	154
4.2.2	一阶线性微分方程	156
4.2.3	可降阶的二阶微分方程	158
4.3	常系数线性微分方程	160
4.3.1	线性微分方程解的结构	160
4.3.2	二阶常系数线性齐次微分方程	162
4.3.3	二阶常系数线性非齐次方程	163
*4.3.4	常系数线性差分方程	166
4.4	微分方程在数学建模中的应用	170
4.4.1	几何应用	170
4.4.2	物理应用	171
4.4.3	其他应用	174
5	向量代数 空间解析几何	177
5.1	空间直角坐标系及向量	177
5.1.1	空间直角坐标系	177
5.1.2	向量及其坐标表示	177
5.1.3	两向量的数量积	182
5.1.4	两向量的向量积	184

Contents

5.2 平面及其方程	189
5.2.1 平面的点法式方程	189
5.2.2 平面的一般方程	190
5.3 空间直线及其方程	193
5.3.1 空间直线的点向式方程	193
5.3.2 空间直线的一般方程	194
5.4 空间曲面与曲线简介	198
5.4.1 二次曲面	198
5.4.2 空间曲线	202
6 多元函数微分学	206
6.1 多元函数的概念 二元函数的极限和连续性	206
6.1.1 多元函数的概念	206
6.1.2 二元函数的极限	209
6.1.3 二元函数的连续性	210
6.2 偏导数	212
6.2.1 二元函数偏导数的定义及其计算	212
6.2.2 高阶偏导数	216
6.3 全微分及其在近似计算中的应用	220
6.3.1 全微分的定义	220
6.3.2 全微分在近似计算中的应用	222
6.4 多元复合函数与隐函数的求导法	224
6.4.1 多元复合函数的求导法	224
6.4.2 隐函数的求导法	231
6.5 偏导数的应用	236
6.5.1 偏导数的几何应用	236
6.5.2 多元函数的极值	240
7 多元函数积分学	247
7.1 二重积分的概念与性质	247
7.1.1 二重积分的概念	247
7.1.2 二重积分的性质	249
7.2 二重积分的计算法	251
7.2.1 直角坐标系下二重积分的计算法	251
7.2.2 极坐标系下二重积分的计算法	259

7.3 二重积分的应用	267
7.3.1 曲面的面积	267
7.3.2 平面薄片的重心	271
7.4 对弧长的曲线积分	273
7.4.1 对弧长的曲线积分的概念与性质	273
7.4.2 对弧长的曲线积分的计算方法	274
7.5 对坐标的曲线积分	278
7.5.1 对坐标的曲线积分的概念与性质	278
7.5.2 对坐标的曲线积分的计算方法	280
7.6 格林公式 平面曲线积分与路径无关的条件	284
7.6.1 格林公式	285
7.6.2 平面曲线积分与路径无关的条件	289
8 无穷级数	296
8.1 无穷数项级数的概念与性质	296
8.1.1 基本概念	296
8.1.2 无穷级数的基本性质	298
8.2 正项级数及其审敛法	300
8.3 任意项级数	305
8.3.1 交错级数	305
8.3.2 绝对收敛与条件收敛	306
8.4 幂级数	308
8.4.1 函数项级数的一般概念	308
8.4.2 幂级数及其收敛性	309
8.4.3 幂级数的运算	313
8.5 把函数展开为泰勒级数	315
8.5.1 泰勒级数和麦克劳林级数	315
8.5.2 把函数展开为泰勒级数(麦克劳林级数)	317
* 8.6 三角级数	321
8.6.1 三角级数及三角函数系的正交性	321
8.6.2 把周期为 2π 的函数展开为傅里叶级数	322
8.6.3 奇函数与偶函数的傅里叶级数	324
8.6.4 把周期为 T 的函数展开为傅里叶级数	327

9.1 数学软件 Mathematica 简介 331

9.1.1 Mathematica 的基本菜单 332

9.1.2 Mathematica 的基本命令 332

9.2 数学实验 335

实验一 用数学软件绘制基本初等函数图形,求方程的近似根 335

实验二 用数学软件求导数、微分和极限,绘制一元函数图形,用泰勒公式逼近函数 339

实验三 用数学软件求不定积分、定积分、广义积分及积分的近似值 343

实验四 用数学软件求解常微分方程的通解和特解 346

实验五 用数学软件进行向量运算,绘制空间曲面与曲线的图形 350

实验六 用数学软件求偏导数和全微分,最小二乘法 354

实验七 用数学软件求二重积分 357

实验八 用数学软件求级数之和,把函数展开为幂级数,用傅里叶级数部分和逼近周期函数 361

附录 368附录一 极坐标系简介 368附录二 复数简介 373习题答案 378



1 一元函数 极限 连续

本章先复习一元函数,提出复合函数和初等函数两个概念,再介绍极限及其运算法则,最后依靠极限引入函数连续性这个重要概念,为下面学习微分学和积分学作好准备。

1.1 一元函数

1.1.1 一元函数的概念

函数是现代数学最重要的概念之一,也是微积分学的主要研究对象。大家在中学里已经学过一元函数,现重新叙述如下:

定义 设 D 为一非空实数集合,如果存在某种对应法则 f ,使对任何实数 $x \in D$,都有惟一的实数 y 与它对应,则称 f 确定了一个一元函数 $f: D \rightarrow f(D)$,通常记为 $y = f(x)$,称 x 为自变量, y 为因变量, D 为定义域, $f(D)$ 为值域。

如果我们取定自变量的一个值 x_0 ,则对应的函数值为 $f(x_0)$ 。

函数的对应法则也可用其他字母表示,例如 $g(x), y(x), F(x), \varphi(x)$ 等等。

函数的定义域有两种确定方式,现举例说明如下。一元函数 $f(x) = \sqrt{x-1}$ 的定义域 $D = [1, +\infty)$,值域 $f(D) = [0, +\infty)$ 。这里的定义域由使表达式有意义的一切实数组成,称为自然定义域。在实际问题中,函数的定义域应根据它的实际意义确定。例如圆半径 r 与圆周长 C 之间的函数关系 $C = 2\pi r$,定义域应当是 $D = (0, +\infty)$ 。

我们所定义的函数是“单值函数”,与自变量 x 对应的是惟一的因变量 y 。现在来考虑抛物线方程 $y^2 = 2x$ 。由于对任意的 $x \in D = [0, +\infty)$,有两个值 $y = \pm \sqrt{2x}$ 与它对应,就不符合上述函数定义。这时我们说该方程确定了一个“多值函数”,通常把它分成 $f_1(x) = \sqrt{2x}$ 和 $f_2(x) = -\sqrt{2x}$,得到两个单值函数。当然,如果把 y 当作自变量, x 当作因变量,则仍为一个单值函数 $x = \frac{1}{2}y^2, y \in (-\infty, +\infty)$ 。

函数有三种表示法:公式法、列表法和图像法。其中公式法用得最多,图像法则比较直观,这两种表示法常常同时使用。

在实际问题中还经常出现如下的“分段函数”:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -2 \leq x < 0, \\ 2^x - 1, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

应当注意这是一个函数,只是在定义域的不同范围内有不同的表达式。由于在 $x = 0$ 的左右函数有不同的表达式,我们称 0 为它的一个分界点。它的图像见图 1-1。请读者想一想, $f(x)$ 的定义域是什么? $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ 各等于多少?

综上所述,一个函数有两个要素:定义域和对应法则。具有相同定义域和对应法则的两个函数被认为是相同的,不管自变量和因变量用什么字母表示。例如, $y = f(x)$ 也可写作 $y = f(u)$ 或者 $x = f(y)$ 。

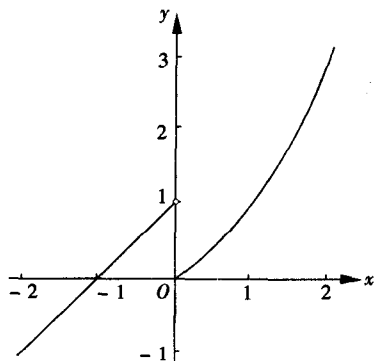


图 1-1

1.1.2 函数的一些性态

1) 有界性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 M , 使对任意的 $x \in D$ 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 D 上有界。反之, 如果这样的 M 不存在, 也就是说不管 M 取得多么大, 总存在某个 $x_0 \in D$, 使得 $|f(x_0)| > M$, 则称 $f(x)$ 在 D 上无界。

例如, 函数 $\sin x$ 在它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$ 上有界, 因为对任意的 $x \in D$, 都有 $|\sin x| \leq 1$ 。又如, 函数 $\frac{1}{x}$ 在它的定义域 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内无界, 因为不管 M 取得多么大, 总存在非常靠近 0 的点 $x_0 = \frac{1}{2M} \in D$, 使得 $\left| \frac{1}{x_0} \right| > M$ 。顺便说一句, 微积分处理问题与中学数学有着不同的风格。例如我们也可以取 $x_0 = \frac{1}{3M}$ 来说明它的无界性, 这在以后也会经常碰到。另外, 应当指出的是有界性与定义域有关。如果只考虑闭区间 $[2, 6]$, 则函数 $\frac{1}{x}$ 是有界的, 因为此时有 $\left| \frac{1}{x} \right| \leq 1$ 。

有界性也可改述为“存在两个常数 M 和 N , 使对任意的 $x \in D$, 都有 $M < f(x) < N$ ”。此时, 我们把 N 称为上界, 把 M 称为下界。

2) 单调性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D 。若对任意的 $x_1, x_2 \in D (x_1 < x_2)$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或者 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 为单调递增的 (或者单调递减的)。有的函数在其定义域内没有单调性, 但在某个区间内可能是单调的。例如, 函数 $\tan x$ 在开区间 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}) (k \in \mathbb{Z})$ 内都是单调递增的, 这种区间叫函数的单调区间。此外, 若对任意的 $x_1, x_2 \in D (x_1 < x_2)$, 都有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ (或者 $f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 为单调不减的 (或者单调不增的)。