GAODENGDAISHU

普通高等教育“十五”国家级规划教材

# 高等代数

## （第二版）下册

丘维声

高等教育出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材

# 高等代数

## (第二版)

## 下 册

丘维声

高等教育出版社

## 内容简介

本书是高等学校的主干基础课“高等代数”课程的教材．全书分上、下册．上册共六章，内容包括：线性方程组，行列式，数域 $K$ 上 $n$ 维向量空间 $K^n$，矩阵的运算，欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$，矩阵的相抵与相似，二次型与矩阵的合同．下册共四章．内容包括：多项式环，线性空间，线性映射（包括线性变换和线性函数），具有度量的线性空间（包含欧几里得空间，酉空间，正交空间，辛空间）．本书按节配置适量习题，书末附有习题答案与提示．

本书精选了高等代数课程的教学内容，渗透了现代数学研究结构和态射（即保持运算的映射）的观点，深入浅出，简明易懂，并且注重培养学生数学的思维方式，重视知识的应用．

本书可作为综合大学、理工科大学和师范院校的高等代数课程的教材．


### 图书在版编目(CIP)数据

高等代数．下/丘维声．—2 版．—北京：高等教育出版社，2003.8

ISBN 7-04-011877-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．丘…　Ⅲ．高等代数-高等学校-教材　Ⅳ．O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 043488 号

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码　100011
总　　机　010-82028899

购书热线　010-64054588
免费咨询　800-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
排　　版　高等教育出版社照排中心
印　　刷　北京印刷二厂

开　　本　787×960　1/16
印　　张　14.75
字　　数　270 000

版　　次　2003 年 6 月第 1 版
　　　　　2003 年 8 月第 2 版
印　　次　2003 年 8 月第 1 次印刷
定　　价　17.30 元

# 第二版前言

高等代数课程是大学数学科学学院(或数学系、应用数学系)的主干基础课之一,在一年级上、下两个学期讲授.学生从中学进入大学,有一个学习方法的适应过程.中学阶段学习的数学都是比较具体的对象.我们因势利导,在本套教材中把高等代数研究的具体对象放在前半部分,而把抽象对象放在后半部分.在上册讲述线性代数研究的具体对象:线性方程组,数域 $K$ 上 $n$ 元有序数组的向量空间 $K^n$,矩阵的运算,$K^n$ 到 $K^s$ 的线性映射,欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$,矩阵的相抵关系、相似关系,矩阵的特征值和特征向量,二次型与矩阵的合同关系.在下册讲述多项式环,任意域上的线性空间,线性映射(包括线性变换和线性函数),具有度量的线性空间(包含欧几里得空间,酉空间,以及正交空间和辛空间).我们在近十年的教学实践中,采取上述教学内容体系,使广大学生比较顺利地学到了高等代数的理论和方法,提高了高等代数课的教学质量.

下册一开始(即第 7 章)讲多项式环.我们由浅入深把中学讲的多项式提高到数域 $K$ 上一元多项式的概念上.在讲了一元多项式的加法和乘法的定义以及它们满足的运算法则后,通过比较整数集 $\mathbf{Z}$、数域 $K$ 上所有一元多项式组成的集合 $K[x]$、数域 $K$ 上所有 $n$ 级矩阵组成的集合 $M_n(K)$ 之间的共同点,抽象出环的概念.接着讲述了数域 $K$ 上一元多项式环 $K[x]$ 的通用性质:若 $R$ 是一个有单位元 $1'$ 的交换环,$R_1$ 是 $R$ 的一个子环,且 $1' \in R_1$,$K$ 到 $R_1$ 有一个双射 $\tau$ 保持加法与乘法运算,对于任意给定的 $t \in R$,令 $\sigma_t\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \tau(a_i) t^i$,则 $\sigma_t$ 是 $K[x]$ 到 $R$ 的映射,且 $\sigma_t$ 保持加法与乘法运算,称 $\sigma_t$ 是 $x$ 用 $t$ 代入.$K[x]$ 的这一通用性质表明,我们只要把一元多项式环 $K[x]$ 中有关加法与乘法的等式研究清楚了,通过不定元 $x$ 用环 $R$ 中任一元素 $t$ 代入,就可以得到环 $R$ 中有关加法与乘法的等式.于是我们在本章**以研究一元多项式环 $K[x]$ 的有关加法与乘法的等式(即研究 $K[x]$ 的结构)为主线**.首先讲了整除的概念和性质,讲了带余除法,讲了最大公因式与互素的概念和性质;然后讲了不可约多项式的概念和性质,唯一因式分解定理,重因式的概念和判别,接着分别决定了复数域、实数域上的所有不可约多项式,讲了有理数域上不可约多项式的判别.在讲完一元多项式环 $K[x]$ 后,我们又讲了多元多项式环,着重讲了对称多项式.本章的最后一节以模 4 剩余类环为例讲了模 $m$ 剩余类环,讲了域的概念,模 $p$ 剩余类域($p$ 是素数),介绍了域的特征的概念.最后指出,类似于数域 $K$ 上的一元(多

元)多项式,可以定义任一域 $F$ 上的一元(多元)多项式,并且有关数域 $K$ 上一元多项式环 $K[x]$ 的结论,只要在它的证明中没有用到这个域含有无穷多个元素,那么它对于任一域 $F$ 上的一元多项式环 $F[x]$ 也成立.此外,还需要注意,如果域 $F$ 的特征为素数 $p$,则 $F$ 的任一元素的 $p$ 倍都等于零.由上述看出,我们在处理多项式理论这一模块上,渗透了现代数学的观点:研究结构和态射(即保持运算的映射).由于我们在本章最后一节引进了域的概念,介绍了模 $p$ 剩余类域,因此,我们在后面各章中就可以讲任意域上的线性空间及其线性映射的理论,就可以讲任意域上的线性空间中如何引进度量概念.这种讲法是信息时代的要求,因为在信息的可靠与安全问题(例如,纠错编码与密码)中,需要用到有限域的知识,以及有限域上的线性空间的理论.

线性代数是研究线性空间和线性映射的理论.我们在上册讲了具体的线性空间:数域 $K$ 上 $n$ 元有序数组的向量空间 $K^n$;讲了具体的线性映射:$K^n$ 到 $K^s$ 的线性映射 $\boldsymbol{A}(\alpha)=A\alpha$,其中 $A$ 是数域 $K$ 上 $s\times n$ 矩阵.在下册我们讲抽象的线性空间:任意域 $F$ 上的线性空间;讲抽象的线性映射:域 $F$ 上线性空间 $V$ 到 $V'$ 的线性映射,其中包括域 $F$ 上线性空间 $V$ 上的线性变换和线性函数.学生在大学学习了一个学期后,学习能力有了提高,这样我们就可以在下册讲线性空间时,不停留在线性空间的定义,以及线性相关和线性无关的定义上,而是以研究线性空间的结构为主线.在第 8 章的第 1 节,我们在讲了线性空间的定义和简单性质,以及线性相关和线性无关,极大线性无关组和向量组的秩的定义和性质之后,就着重研究线性空间的结构,指出任一线性空间的结构由它的一个基所决定,而维数对于研究有限维线性空间的结构起着重要作用.在 $n$ 维线性空间 $V$ 中取定一个基后,每一个向量都有它的坐标,且在不同基下的坐标之间有坐标变换公式.在第 2 节我们又利用子空间来刻画线性空间的结构,在讲了子空间的结构,子空间的交与和以及它们的维数公式之后,着重讲子空间的直和,如果 $V$ 的两个(或若干个)子空间的直和等于 $V$,那么这也刻画了 $V$ 的结构.在第 3 节我们从域 $F$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 与 $F^n$ 有相同的性质,引出线性空间同构的概念,推导出域 $F$ 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们的维数相同,于是域 $F$ 上有限维线性空间的同构类与非负整数之间有一个一一对应.由此看出,有限维线性空间的结构是如此简单!我们还讲了在域 $F$ 上的 $n$ 维线性空间 $V$ 中,取定一个基后,向量到它的坐标的对应 $\sigma$ 是 $V$ 到 $F^n$ 的一个同构映射,并且 $V$ 的任一子空间 $U$ 在 $\sigma$ 下的象 $\sigma(U)$ 与 $U$ 的维数相同.利用这个结论可以把对于域 $F$ 上任一 $n$ 维线性空间的性质的研究,归结为对于 $F^n$ 的性质的研究.我们通过例题与习题(包括以后几章的有关习题)让学生掌握这一方法.在第 4 节我们讲了商空间的概念及其维数公式.

在第 9 章我们讲线性映射(包括线性变换和线性函数)的理论.首先从几何

空间在 $xOy$ 平面上的正投影 $\boldsymbol{P}:(x,y,z)\longmapsto(x,y,0)$，以及连续函数 $f(x)$ 的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 引出线性映射的概念；接着讲线性映射的运算，指出域 $F$ 上线性空间 $V$ 到 $V'$ 的所有线性映射组成的集合成为域 $F$ 上的一个线性空间，而域 $F$ 上线性空间 $V$ 上的所有线性变换组成的集合既是域 $F$ 上的一个线性空间，又是一个有单位元的环，这是从总体上研究线性映射的结构. 其次我们又研究单个线性映射的结构. 一方面研究由 $V$ 到 $V'$ 的一个线性映射 $\boldsymbol{A}$ 决定的两个子空间：$\boldsymbol{A}$ 的核 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$（它是 $V$ 的一个子空间）和 $\boldsymbol{A}$ 的象 $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$（它是 $V'$ 的一个子空间），推导出线性映射的维数公式 $\dim V=\dim\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}+\dim\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$；另一方面研究域 $F$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵表示，以及 $V$ 到 $V'$ 的线性映射 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵表示，着重研究 $V$ 中是否存在一个基，使得线性交换 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵具有简单的形式. 从线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的概念推导出，$\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $V$ 可以分解成 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间的直和. 而 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间 $V_{\lambda_i}$ 中每个向量在 $\boldsymbol{A}$ 下的象仍在 $V_{\lambda_i}$ 中，由此引出 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间的概念，并且指出研究不可对角化的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的结构，其思路是研究 $V$ 能不能分解成 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间的直和. 由于对于任意 $f(x)\in F[x]$，都有 $\operatorname{Ker} f(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间，并且如果 $f(x)$ 能分解成两两互素的多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 的乘积，则有

$$\operatorname{Ker} f(\boldsymbol{A})=\operatorname{Ker} f_1(\boldsymbol{A})\oplus\operatorname{Ker} f_2(\boldsymbol{A})\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker} f_s(\boldsymbol{A}),$$

且 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{0}=V$，因此如果能找到一个多项式 $f(x)$，使得 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$，且 $f(x)$ 有上述分解，则 $V=\operatorname{Ker} f_1(\boldsymbol{A})\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker} f_s(\boldsymbol{A})$. 于是引出 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式的概念，进而引出 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式的概念. 利用 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(x)$ 在 $F[x]$ 中的因式分解，研究了 $\boldsymbol{A}$ 在 $V$ 的适当基下的矩阵的简单形式：如果 $m(x)$ 在 $F[x]$ 中能分解成一次因式的乘积，则 $V$ 中存在一个基，使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵为 Jordan 形矩阵，称它是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形. 在证明这一结论时，我们把它归结为研究幂零变换的结构. 此外，我们把线性函数也放在第 9 章中，因为域 $F$ 上线性空间 $V$ 上的线性函数 $f$ 就是 $V$ 到 $F$ 的一个线性映射，这样我们可以把有关线性映射的结论直接用到线性函数的性质和线性函数空间（$V$ 的对偶空间）的结构的研究上.

在第 10 章我们讨论如何分别在实数域、复数域、任意域上的线性空间中引进度量概念，研究具有度量的线性空间的结构，并且研究保持度量的线性变换的性质. 在这一章的第 1 节讲双线性函数的概念和性质，以及对称双线性函数和斜对称双线性函数的结构. 第 2 节对于实数域上的线性空间 $V$，把 $V$ 上的一个正定对称双线性函数称为 $V$ 的一个内积；$V$ 上如果给定了一个内积，则称 $V$ 是一个实内积空间，有限维的实内积空间称为欧几里得空间. 在实内积空间 $V$ 中，可

以引进长度、角度、正交、距离等度量概念;在欧几里得空间 $V$ 中,存在标准正交基,它比一般的基有许多优越之处:计算内积简单,向量的坐标的分量可以用内积表达.第3节利用有限维子空间 $U$ 及其正交补 $U^{\perp}$ 来刻画实内积空间 $V$ 的结构:$V=U\oplus U^{\perp}$,由此引出正交投影的概念,并介绍其应用,第4节研究实内积空间中的正交变换和对称变换.第5节讨论在复数域上的线性空间中如何引进内积的概念,给定了一个内积的复线性空间称为酉空间.有关实内积空间的许多结论可以平行搬到酉空间上.第6节讨论如何在任意域上的线性空间中引进度量概念:域 $F$ 上线性空间 $V$ 如果指定了一个对称双线性函数 $f$,则称 $V$ 是一个正交空间;如果指定了一个斜对称双线性函数,则称 $V$ 是一个辛空间.这一节加了 * 号,不必在课堂上讲,供有兴趣的学生自己阅读.

我们还写了五个阅读材料,前三个是关于整数环中的带余除法,最大公因数,唯一因子分解定理.阅读材料四是利用有限维线性空间同构的充分必要条件证明有限域的元素个数是一个素数的方幂.阅读材料五是利用线性空间的子空间及其陪集讨论线性码的编码和译码方法.这些阅读材料不必在课堂上讲,供学生自己阅读.

下册的第二版比第一版在内容上作了精选,由原来共八章精选成四章,着重讲述最基本的和应用广泛的内容.对于每一节配备的习题也作了精心挑选,在书末附有习题解答和提示.

我们认为高等代数课程的教学目标,既要让学生掌握这门课程的基础知识和基本方法,又要培养他们具有数学的思维方式.只有按照数学的思维方式去学习数学,才能学好数学;而且学会数学的思维方式,有助于他们把今后肩负的工作做好,从而使他们终身受益.本书按照数学的思维方式编写每一节的内容,使学生在学习高等代数知识的同时,受到数学思维方式的熏陶,日积月累地培养学生的数学思维方式.

本书(上册和下册)可作为综合大学、理工科大学和师范院校的数学科学学院(或数学系、应用数学系等)的高等代数课程的教材.上册供第一学期使用,下册供第二学期使用.每学期的周学时可为4+2或4+1或4(4+2是指每周讲课4学时,习题课2学时,4+1的含意类似).

作者衷心感谢本书的责任编辑李蕊和胡乃冏同志,他们为本书的编辑出版付出了辛勤劳动.

作者热诚欢迎广大读者对本书提出宝贵意见.

丘维声

于北京大学数学科学学院

2003年4月

# 序　言

为了把学生培养成为面向21世纪的高水平人才，作者积多年讲授高等代数、抽象代数和群表示论等课程的经验以及从事科研工作的体会，写了一套高等代数讲义，用这套讲义给北京大学数学系和概率统计系94级学生讲授高等代数课，取得了很好的教学效果．接着又给这两个系的95级学生讲授此课，进一步修改这套讲义，现分上、下两册出版．

这套教材从我国的实际情况出发，面向21世纪，尝试对高等代数的教学内容进行一些改革，主要有以下几方面：

努力使教材现代化．21世纪的人才需要掌握现代数学的思想和方法．为此，本书注意渗透现代数学的一些基本思想和观点．例如，用等价关系把集合划分的思想；从代数结构着眼处理问题的思想；同构分类的思想；态射（保持运算的映射）的观点等．用现代的观点组织和讲授传统的教学内容．例如，通过讨论子空间的结构证明线性方程组有解判别定理；按照矩阵的相抵关系、相似关系、合同关系分别讨论矩阵的相抵分类、相似分类和合同分类，并且寻求每一种关系下的完全不变量；运用线性空间的同构分类思想证明域 $F$ 上任一 $n$ 维线性空间 $V$ 与它的对偶空间 $V^*$ 同构，以及 $V$ 与它的双重对偶空间 $V^{**}$ 同构；在讲一元多项式的概念时，用态射的观点阐述一元多项式环的通用性质；用环同构的观点讨论数域 $K$ 上的多项式与多项式函数之间的关系等等．本书还注意渗透现代数学的一些基本概念．例如，线性流形、商集等概念；结合高等代数的具体对象水到渠成地先后引进了抽象代数的一些基本概念：在一元多项式的概念之后引进环的概念；在讲完多项式环之后引进任意域和有限域的概念，以及域的特征的概念；在讲了线性变换的运算后引进域上的代数的概念；在最后一章当学生已经熟悉了正交变换、酉变换和辛变换的性质后，引进群和子群的概念．

力图在教材中体现代数与几何、分析的联系．21世纪的数学，分析、代数、几何将会更加相互渗透和有机结合．因此要使学生从大学一年级开始就逐步培养把代数与几何、分析联系起来的能力．书中注意从几何直观或分析背景引出高等代数讨论的问题；在讲述高等代数的概念时列举几何或分析的例子；把高等代数的结论应用于解决几何或分析的问题．例如，介绍了行列式的几何意义；从几何空间的结构引出向量空间的基的概念；运用线性方程组的理论解决一些几何问题；从平面旋转的合成引出矩阵乘法的定义；从二次曲面方程的化简引出实对称矩阵的对角化以及实二次型通过正交替换化成标准形的问题，并且运用所得到的代数结论解决二次曲面方程的化简问题；从函数极值问题引出正定（负定）二

次型的概念，并且运用正定(负定)矩阵解决多元函数的极值问题；在讲线性相关性时，讲述了 $n$ 个 $n-1$ 次可微函数线性无关的充分条件；从几何空间中的例子引出商空间的概念；等等．为了将线性代数的理论应用到分析上，为泛函分析打下基础，本书讨论的线性空间可以是无限维的，尽量不加有限维的限制．

注重联系实际，加强应用．面向21世纪，数学系不仅要培养从事数学科研和教学的人才，而且要培养在其他领域工作的人才．因此要努力培养学生运用数学理论解决实际问题和其他领域中的问题的能力．本书在讲完线性方程组的理论后，用它解决平板受热问题；讲了矩阵可对角化的条件后，用它解决色盲遗传问题；在讲了矩阵的运算之后，解决区组设计、图论、数论中的一些问题；在讲了一元多项式环的通用性质后，用它证明组合数的一些公式等等．考虑到矩阵在实际问题和许多领域中有广泛应用，本书不仅把矩阵贯穿始终，而且把矩阵的运算，矩阵的相抵分类、相似分类、合同分类集中在一起讲授，并且加强了矩阵的分块，矩阵的“打洞”以及巧用特殊矩阵的训练；讲述了 Binet－Cauchy 公式及其应用，考虑到有限域上的线性空间在计算机以及通讯编码中有重要应用，书中讨论的线性空间是任意域上的，不局限于数域．考虑到现代物理以及一些数学分支中的需要，加强了酉空间的内容，介绍了作为爱因斯坦相对论基础的 Minkowski 空间，并且讨论了一般的正交空间，以及辛空间．

提高数学素质，加强能力培养．21世纪所需要的人才应当有较高的数学素质和较强的分析问题、解决问题的能力．数学素质包括提出数学问题、理解力、逻辑思维、抽象思维、创造性等几个方面．为了从大学一年级开始就着力培养学生的数学素质，本书在每一单元的开头都要提出问题，然后阐述解决问题的想法，经过抽象思维和逻辑思维一步一步地去解决这些问题．书中特别注意讲清楚想法(idea)．例如，在研究线性方程组有无解的判定时为什么会想到去研究 $n$ 元有序数组的向量空间的结构？在讨论有理系数多项式的因式分解时怎么会想到引进本原多项式的概念？在研究不可以对角化的线性变换的结构时如何想到最小多项式的因式分解并且讨论相应线性变换的多项式核之间的关系？复线性空间上内积的定义为什么与实线性空间上内积的定义不同？在任意域上的线性空间中如何引进度量？为什么只有两种度量：对称双线性函数或者斜对称双线性函数，而不用一般的双线性函数？等等，书中都给予了清晰的回答．为了培养学生的阅读、理解能力和扩大知识面，书中有较多的例题，并且有密切配合正文的加“*”号的章节内容和一些阅读材料．有些例题不必在课堂上讲授，留给学生自己看．加“*”号的内容和阅读材料不作为教学要求，供有兴趣的学生自学．本书配备了相当丰富的习题(每一节后面配有习题，每一章后面还有补充题)，有的是为了使学生理解正文的概念，掌握正文中的定理和方法，学会重要的解题方法和技巧；有的是正文内容的补充和拓宽；有的是应用．通过做题可以培养学生分析问

题和解决问题的能力.习题中加"*"号的题以及补充题不作为教学要求,供学生选做.

本书内容的安排力求符合人们认识事物的客观规律.学生从中学进入大学,有一个学习方法的适应过程.为了帮助学生树立信心适应大学的学习,我们把高等代数研究的具体对象放在前半部分,而把抽象对象放在后半部分.全书分为四部分.第一部分是线性方程组,$n$ 元有序数组的向量空间和矩阵的理论,包括线性方程组的解法、行列式、$n$ 元有序数组的向量空间、线性方程组的理论、矩阵的运算、矩阵的相抵分类与相似分类、二次型与矩阵的合同分类.第二部分是一元多项式环与多元多项式环的理论.第三部分是线性空间和线性映射的理论,包括任意域上的线性空间、线性映射和线性变换、线性变换的 Jordan 标准形、线性函数和双线性函数.第四部分是具有度量的线性空间的理论,包括欧几里得空间、酉空间、正交空间、辛空间.

本书可作为大学数学系、概率统计系、应用数学系的高等代数教材,上、下册共讲授两个学期;还可作为大专院校有关教师和学生的参考书.

作者衷心感谢刘旭峰博士,他通读了全书,并提出了一些宝贵的建议.

特别要感谢本书的责任编辑胡乃冏,他为本书的编辑出版付出了辛勤的劳动.

书中可能会有考虑不周和疏漏之处,热诚欢迎同行和读者批评指正.

丘维声

1996 年 2 月于北京大学燕北园

**致谢：**

本书上、下册经国家教委评审组和国家教委高等学校数学与力学教学指导委员会基础数学指导组评议和审定为国家级重点教材，作者特此向他们表示衷心感谢.

丘维声

1997 年 11 月

**策　　划**　李　蕊
**编　　辑**　李　蕊
**封面设计**　刘晓翔
**责任绘图**　杜晓丹
**版式设计**　王艳红
**责任校对**　俞声佳
**责任印制**　宋克学

# 郑重声明

# 目　　录

# 第7章 多项式环

在古典代数学里，多项式的求根是一个中心问题. 在近世代数学里，多项式环是一类重要的环. 在数学分析中，用多项式函数逼近一般的 $n$ 阶可微函数. 在当今信息时代，多项式在计算机科学、现代通信、编码和密码等领域中都有重要应用.

本章研究一元多项式环和多元多项式环的结构. 最后一节将介绍有限域的概念.

## §1 一元多项式环

观察下列表达式有什么不同之处：

$$-x^3+x^2+\frac{1}{2}, \quad \text{其中 } x \text{ 是一个符号；} \tag{1}$$

$$-\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^2+\frac{1}{2}, \quad \text{其中 } \mathrm{i}=\sqrt{-1}\text{；} \tag{2}$$

$$-A^3+A^2+\frac{1}{2}I, \text{其中 } A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{3}$$

经过简单的计算，从(2)、(3)式分别得出

$$-\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^2+\frac{1}{2}=\mathrm{i}-\frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$-A^3+A^2+\frac{1}{2}I=-A+\frac{3}{2}I. \tag{5}$$

由此看出，对于 i 的表达式或矩阵 $A$ 的表达式来说，相等的两个表达式可以含有不同的项. 而对于 $x$ 的表达式，为了使它有广泛应用，希望它不出现这种情况，为此数学上引出如下概念：

**定义 1** 设 $K$ 是一个数域，$x$ 是一个不属于 $K$ 的符号. 任意给定一个非负整数 $n$，在 $K$ 中任意取定 $a_0, a_1, \cdots, a_n$，表达式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{6}$$

称为**数域 $K$ 上的一个一元多项式**，如果它具有下述性质：两个这种形式的表达式相等当且仅当它们除去系数为零的项外含有完全相同的项，而系数为零的项允许任意删去和添进来. 此时，符号 $x$ 称为**不定元**.

系数全为零的多项式称为**零多项式**,记为0.

在多项式(6)中,$a_ix^i$ 称为**$i$ 次项**,$i=1,\cdots,n$;$a_0$ 称为**零次项**,也称为**常数项**.

从定义1知道,数域 $K$ 上两个一元多项式相等当且仅当它们的同次项的系数都相等.

我们常常用 $f(x),g(x),\cdots$ 或 $f,g,\cdots$ 等表示一元多项式.

设 $f(x)$ 表示多项式(6).如果 $a_n\neq 0$,则称 $a_nx^n$ 为多项式 $f(x)$ 的**首项**;$n$ 称为 $f(x)$ 的**次数**,记作 $\deg f(x)$ 或 $\deg f$.

零多项式的次数定义为 $-\infty$,并且规定:

$$(-\infty)+(-\infty)=-\infty,$$
$$(-\infty)+n=-\infty,$$
$$-\infty<n,$$

其中 $n$ 是任意非负整数.

零次多项式是 $a$,其中 $a\in K$ 且 $a\neq 0$.

我们把数域 $K$ 上的所有一元多项式组成的集合记作 $K[x]$.在 $K[x]$ 中规定**加法**与**乘法**运算如下:

设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\quad g(x)=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i,$$

不妨设 $n\geqslant m$,则

$$f(x)+g(x)\xlongequal{\text{def}}\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i, \tag{7}$$

$$f(x)g(x)\xlongequal{\text{def}}\sum_{s=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=s}a_ib_j\Big)x^s, \tag{8}$$

称 $f(x)+g(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**和**,称 $f(x)g(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**积**.

容易验证上面所定义的多项式的加法与乘法满足下列运算法则:$\forall f,g,h\in K[x]$,有

1° 加法交换律,即 $f+g=g+f$;

2° 加法结合律,即 $(f+g)+h=f+(g+h)$;

3° 零多项式具有性质:$0+f=f+0=f$;

4° 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$,定义 $-f(x)=\sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i$,则

$$f+(-f)=(-f)+f=0,$$

称 $-f$ 是 $f$ 的负元素;

5° 乘法交换律,即 $fg=gf$;