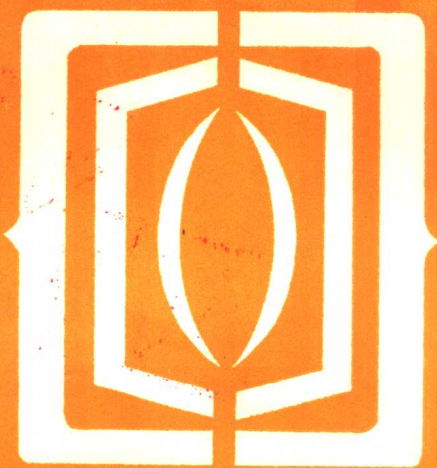




GAOZHONG DAISHU BUFEN

高中代数部分

谭光宙 张大利 黄石金 谭红 程振球 朱文礼

中学数学解题方法

北京师范大学出版社

中学数学解题方法

(高中代数部分)

谭光宙 张大利 黄石金 编
谭 红 程振球 朱文礼

北京师范大学出版社

(京)新登字160号

中学数学解题方法

(高中代数部分)

谭光宙 张大利 黄石金 编
谭 红 程振球 朱文礼

北京师范大学出版社出版发行
全国新华书店经销
北京通县科海印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 11.875 字数: 250千

1991年9月第1版 1991年11月第1次印刷

印数: 1—15 500

ISBN 7-303-01263-X/G·752

定价: 4.40 元

前 言

在多年的教学实践中，我们深感，学会思考数学问题的方法和掌握解题的一些技巧是教师教好数学、学生学好数学的重要因素。为帮助高、初中学生、自学数学的知识青年、职工干部、以及中学数学教师巩固并熟练掌握数学基础知识，提高逻辑思维能力，简捷地掌握解数学题的一般方法和某些特殊技巧，我们以阐述逻辑思维，总结中学数学各部分题的解题方法与技巧为主，编写了这套“中学数学解题方法”。

“中学数学解题方法”这套书包括（平面几何部分）、（初中代数部分）、（高中代数部分）、（平面三角部分）、（立体几何部分）、（平面解析几何部分）和（综合部分）共七本，各册书的每章中，均用典型例题来说明本章所属各类问题的解法与技巧。为了熟练方法与技巧，章末同时备有精选的习题及其解答。

这套书由谭光宙同志会同十几位在教育第一线上为祖国的教育事业工作了几十年的高级教师、讲师和教授编写的。

在编写过程中，我们还曾得到郁华、张德平、张国田、卞桂荣、唐玉琳、高复生、王高翔等同志的热情支持和帮助，在此表示谢意。

限于我们的水平，书中谬误一定不少，望广大读者批评指正。

编 者

目 录

前言

第一章 幂函数、指数函数和对数函数…………… (1)

§ 1 学一学→目标→掌握基础知识…………… (1)

§ 2 练一练→目标→提高解题能力…………… (21)

§ 3 考一考→目标→120分(提高应试能力) … (33)

第二章 三角函数…………… (40)

§ 1 学一学→目标→牢固掌握基础知识…………… (40)

§ 2 练一练→目标→提高解题能力…………… (51)

§ 3 考一考→目标→120分(提高应试能力) … (56)

第三章 两角和与差的三角函数…………… (63)

§ 1 学一学→目标→掌握基础知识…………… (63)

§ 2 练一练→目标→提高解题能力…………… (75)

§ 3 考一考→目标→120分(提高应试能力) … (88)

第四章 反三角函数和三角方程…………… (94)

§ 1 学一学→目标→掌握基础知识…………… (94)

§ 2 练一练→目标→提高解题能力…………… (107)

§ 3 考一考→目标→120分(提高应试能力) … (120)

第五章 不等式..... (125)

§ 1 学一学→目标→掌握基础知识..... (125)

§ 2 学一学→目标→提高解题能力..... (140)

§ 3 考一考→目标→120分(提高解题能力) ... (157)

第六章 数列、极限、数学归纳法..... (162)

§ 1 学一学→目标→掌握基础知识..... (162)

§ 2 学一学→目标→提高解题能力..... (173)

§ 3 考一考→目标→120分(提高应试能力) ... (180)

第七章 复数..... (185)

§ 1 学一学→目标→掌握基础知识..... (185)

§ 2 练一练→目标→提高解题能力..... (196)

§ 3 考一考→目标→120分(提高应试能力) ... (202)

第八章 排列、组合、二项式定理..... (207)

§ 1 学一学→目标→牢固掌握基础知识..... (207)

§ 2 练一练→目标→提高解题能力..... (215)

§ 3 考一考→目标→120分(提高应试能力) ... (220)

第九章 直线和平面..... (224)

§ 1 学一学→目标→牢固掌握基础知识..... (224)

§ 2 练一练→目标→提高解题能力..... (232)

§ 3 考一考→目标→120分(提高考试能力) ... (241)

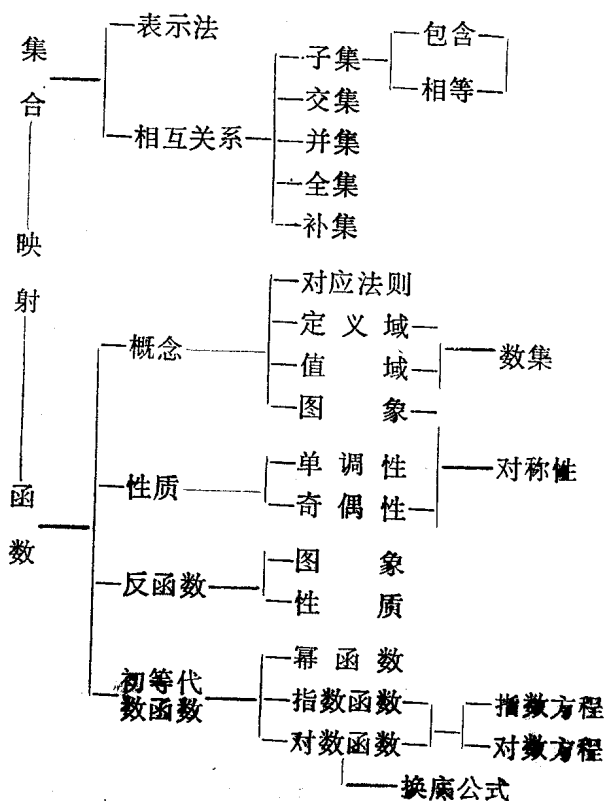
第十章 多面体与旋转体..... (247)

§ 1	学一学→目标→牢固掌握基础知识·····	(247)
§ 2	练一练→目标→提高解题能力·····	(254)
§ 3	考一考→目标→120分(提高应试能力)···	(261)
第十一章 直线 ·····		(267)
§ 1	学一学→目标→牢固掌握基础知识·····	(267)
§ 2	练一练→目标→提高解题能力·····	(275)
§ 3	考一考→目标→120分(提高应试能力)···	(283)
第十二章 圆锥曲线 ·····		(289)
§ 1	学一学→目标→牢固掌握基础知识·····	(289)
§ 2	练一练→目标→提高解题能力·····	(299)
§ 3	考一考→目标→120分(提高应试能力)···	(315)
第十三章 参数方程和极坐标 ·····		(321)
§ 1	学一学→目标→牢固掌握基础知识·····	(321)
§ 2	练一练→目标→提高解题能力·····	(330)
§ 3	考一考→目标→120分(提高应试能力)···	(338)
高考模拟试卷(A卷)(满分120分) ·····		(344)
高考模拟试卷(B卷)(满分120分) ·····		(350)
参考答案 ·····		(356)

第一章 幂函数、指数函数 和对数函数

§1 学一学——目标——掌握基础知识

一、〔知识结构〕



二、〔考试要求与信息〕

1. 〔考试要求〕（注：根据国家教委考试中心颁发的《考试说明》）

（1）理解集合、子集、交集、并集、补集的概念，了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关术语和符号，能正确地表示一些简单的集合。

（2）了解映射的概念，在此基础上理解函数及其有关的概念，掌握互为反函数的函数图象间的关系。

（3）理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象。

（4）掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图象和性质，并会解简单的指数方程和对数方程。

2. 〔89—93年高考命题本章知识点分布及考分统计〕

知 识 点	考 查 内 容				
	89年	90年	91年	92年	93年
集 合	✓	✓	✓	✓	✓
子、交、并、补集	✓	✓	✓	✓	✓
映 射					
函 数	✓	✓	✓	✓	✓
幂 函 数				✓	
函数的单调性	✓		✓	✓	
函数的奇偶性			✓	✓	✓
反 函 数	✓	✓		✓	✓
互为反函数图象间关系		✓		✓	
指数函数				✓	✓
对数函数	✓	✓	✓	✓	✓
指数、对数方程	✓	✓		✓	✓
对数及换底公式	✓	✓	✓	✓	✓
考 分	20分	15分	16分	21分	20分

从上表五年来的考试情况分析，本章考查知识点出现次数较多的是：集合的概念、函数的性质、反函数的概念、对数函数及指数方程和对数方程。考查题大部分是基本题，并以选择题、填空题为主的客观性题型出现。这类题目与教材有直接联系，常以课本的例题、习题为基础，进行改编加工组合，只有少量综合性的题目涉及到复数、解几、不等式、数列与极限等知识，并常出现试卷的最后两题之中，所以在复习中重点必须放在“牢固掌握基础”上。

三、〔概念、基础知识初步应用〕

(一) 选择题

数学选择题是一种重要的命题形式，目前高考的数学选择题均采用四选一型的单项选择题。一道好的选择题常常是“诱误性”很大，提供的答案有似是而非的错误答案，有似非而是的正确答案，这种错误答案似真性及正确答案的似伪性就形成了数学选择题的独特性质——数学选择题的迷惑性。数学选择题这种题型具有概念性强、灵活性大，知识覆盖面广的特点，因而有利于全面考查考生的“双基”的掌握情况，及对概念的辨析、判断能力、解决问题能力结构状况；另外阅卷采用电脑评分，可提高考查的信度和效度。

根据《考试说明》数学选择题的比分占45%，如92年有18道选择题共54分。由此可见，在高考中能快速、正确地做好选择题具有策略性的意义。它不仅能为后面解“压轴题”赢得了时间，而且能为考生奠定获取全卷高分的基础。

数学选择题解法通常有：直接法、图解法、筛选法、特殊值法、验证法和分析综合法。现分别举例如下。

例1 设全集 $I=\{1,2,3,4,5\}$ ，且 $A\subset I$ ， $B\subset I$ ，

若 $A \cap B = \{2\}$, $\overline{A} \cap B = \{4\}$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 5\}$, 下列结论正确的是

- (A) $3 \in A$, $3 \in B$; (B) $3 \in A$, $3 \in \overline{B}$;
(C) $3 \in \overline{A}$, $3 \in B$; (D) $3 \in A$, $3 \in \overline{B}$.

答 []

分析: 从已知条件所提供信息, 可知 $\begin{matrix} A \subset I \\ B \subset I \end{matrix} \Rightarrow A, B$ 都是全集的真子集; $A \cap B = \{2\} \Rightarrow 2 \in A, 2 \in B$; $\overline{A} \cap B = \{4\} \Rightarrow 4 \in \overline{A}, 4 \in B$; 又 $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 5\} \Rightarrow 1, 5 \in \overline{A}, 1, 5 \in \overline{B}$. 综上分析可得 $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$. 故选 (B).

注: 本题解法是直接从题设的条件出发, 根据有关定义、定理、公式、法则, 通过运算或严密的推理得出正确的结果, 从而选出正确的答案. 这种解法叫做“直接法”.

例 2 下列各组函数中表示同一函数的是

- (A) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2$;
(B) $f(x) = |x|$ 与 $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$;
(C) $y = f(x)$ 与 $y = f(x+1)$;
(D) $f(x) = |\lg(\frac{1}{x})^x|$ 与 $g(x) = |x| x \lg 2$.

答 []

分析: 要判断两个函数式是否表示同一函数, 只要考察它们的定义域、值域及对应法则是否完全相同. 因为定义域、值域及对应法则是确定一个函数的“三要素”.

$$(A) \quad f(x) = x \Rightarrow x \in R; g(x) = (x^2)^{\frac{1}{2}} \\ = \sqrt{x^2} \Rightarrow x \geq 0,$$

因为它们的定义域不一样, 所以排除(A);

$$(B) \quad f(x) = |x| \Rightarrow f(x) \geq 0, \quad g(x) = \sqrt[3]{x^8} \\ \Rightarrow g(x) \in R,$$

$\therefore$ 这两个函数的值域不相同, $\therefore$ 排除(B).

(C) $\because y=f(x)$ 与 $y=f(x+1)$ 的对应法则不一样, $\therefore$ 排除(C). 由于是一元选择, 故选(D).

$$\text{事实上, } (D) \text{ 中的 } f(x) = |\lg(\frac{1}{2})^x| = |\lg(2^{-1})^x| \\ = |-x \lg 2| = |x| \lg 2 = g(x). \quad \text{因}$$

此选(D)是正确的.

注: 目前高考的数学选择题是单一选择题, 即在所给出的选择支中“有且只有一个是正确的”. 因为我们可以通过对 n 个选择支 (我国一般为 4 个选择支) 进行筛选, 排除 $(n-1)$ 个错误的选择支, 那么就可得到正确的答案. 这种解选择题的方法叫做“筛选法”或叫“排除法”. 这种方法一般适宜用于不易直接判断或直接计算的选择題.

例 3 已知 $1 < x < d$, 令 $a = (\log_d x)^2$, $b = \log_d x^2$, $c = \log_d(\log_d x)$, 则 a 、 b 、 c 的大小关系是

- (A) $a < b < c$; (B) $a < c < b$;
(C) $c < b < a$; (D) $c < a < b$.

答 []

分析一: 由 $d > 1$, 可知函数 $y = f(t) = \log_d t$ 是增函数, 当 $1 < x < d$ 时, $0 < \log_d x < 1$. 即 $\log_d x$ 是一个小于 1 的正数, 不等式的两边同乘以 $\log_d x$,

$$\text{得 } 0 < (\log_d x)^2 < \log_d x,$$

$$\therefore b = \log_d x^2 = 2 \log_d x > \log_d x > (\log_d x)^2 = a > 0,$$

$$\therefore b > a;$$

$$\text{又} \therefore \left. \begin{matrix} 0 < \log_d x < 1 \\ d > 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \log_d(\log_d x) < 0, \therefore c < 0,$$

$\therefore c < a < b$, 故应选(D).

分析二: 本题也可取符合条件 $1 < x < d$ 的特殊值:

$$\begin{aligned} \text{令 } x=2, d=4, \text{ 则 } a &= (\log_4 2)^2 = \left(\log_4 4^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}; \quad b = \log_4 2^2 = \log_4 4 = 1; \end{aligned}$$

$$c = \log_4(\log_4 2) = \log_4 \frac{1}{2} = \log_4 2^{-1} = -\log_4 2 = -\frac{1}{2}.$$

$\therefore c < a < b$. 故选(D).

注: 在分析一中必须掌握函数的增减性与不等式的性质, 以及掌握对数函数 $y=f(x)=\log_a x$ 的函数值的正负与自变量 x 大于 1 或小于 1 的关系, 否则均容易产生错误.

分析二所采用的方法叫做“特殊值法”. 应用特殊值法解选择题巧选特殊值是关键的一步. 一般来说对特殊值的选取应符合三条原则: ①合意原则; ②最简原则; ③代表原则. 合意原则, 就是所选取的特殊值必须符合题意, 符合字母、参数所反映的关系式或给出的条件; 最简原则, 就是所选取的特殊值参加运算、推理应该是尽可能最容易的; 代表原则, 就是所选取的特殊值对题意、字母、参数具有足够的代表性.

一般来说, 带有字母、参数的关系或其它给定条件的选择题都可采用“特殊值法”来解.

例 4 已知直线 l_1 和 l_2 夹角的平分线为 $y=x$, 如果 l_1 的方程是 $ax+by+c=0$ ($ab>0$), 那么, l_2 的方程是(92年高考试题)

$$(A) \quad bx+ay+c=0; \quad (B) \quad ax-by+c=0;$$

$$(C) \quad bx+ay-c=0, \quad (D) \quad bx-ay+c=0.$$

答 []

分析：由角平分线的性质可知，直线 l_1 和 l_2 关于直线 $y=x$ 成轴对称，因此，在直线 l_1 上任取一点，必然可在 l_2 上能取到唯一的关于 $y=x$ 的对称点，因此可在直线 l_1 上先取一点 $A_1\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ ，则 A_1 关于直线 $y=x$ 的对称点 $A_1'\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$ 必在 l_2 上，将 A_1' 点的坐标分别代入各选择支，有

$$(A) \quad b \cdot \left(-\frac{c}{b}\right) + a \cdot 0 + c = 0 (\text{适合});$$

$$(B) \quad a \cdot \left(-\frac{c}{b}\right) - b \cdot 0 + c \neq 0 (\text{排除});$$

$$(C) \quad b \cdot \left(-\frac{c}{b}\right) + a \cdot 0 - c \neq 0 (\text{排除});$$

$$(D) \quad b \cdot \left(-\frac{c}{b}\right) - a \cdot 0 + c = 0 (\text{适合});$$

为此，在(A)和(D)中进一步筛选，再在 l_1 上另取一点 $A_2\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ ，则 A_2 关于直线 $y=x$ 的对称点 $A_2'\left(0, -\frac{c}{a}\right)$ 代入选择支(A)和(D)，有

$$(A) \quad b \cdot 0 + a \cdot \left(-\frac{c}{a}\right) + c = 0 (\text{适合});$$

$$(D) \quad b \cdot 0 - a \cdot \left(-\frac{c}{a}\right) + c \neq 0 (\text{排除}). \text{ 故选(A)}$$

例 5 方程 $\lg(x^2+11x+8)-\lg(x+1)=1$ 的解是

$$(A) \quad x=-2; \quad (B) \quad x=1;$$

$$(C) \quad x=-2 \text{ 或 } x=1; \quad (D) \quad \text{无解}.$$

答 []

分析一：原方程等价于

$$\begin{cases} x^2+11x+8>0 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x+1>0 & \cdots\cdots\cdots ② \\ \frac{x^2+11x+8}{x+1}=10 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

解③得 $x=-2$ 或 $x=1$ ，将 $x=-2$ 代入②或①均不适合， $x=1$ 代入①与②均适合。

$\therefore$ 原方程的解 $x=1$ ，故选(B)。

此题容易产生的错误是把原方程化为：

$$\lg \frac{x^2+11x+8}{x+1} = \lg 10 \Rightarrow \frac{x^2+11x+8}{x+1} = 10, \text{ 解得 } x=-2$$

或 $x=1$ ，就误认为(C)正确，未注意到方程变形过程未知数的允许值扩大而引起增根的情况。因此，在解对数方程时，若在解题过程中不是等价转化原方程，验根是不可缺少的步骤。

分析二：本题若将选择支中的 $x=-2$ 或 $x=1$ ，分别代入原方程进行验证，只有 $x=1$ 才适合，就能快速、正确地选出(B)，这样不仅避开解方程过程的一些运算，而且避开了由于不验根而产生的错误。

注：有些数学选择题，可以由题设所提供的信息进行信息加工，找出适合验证的条件，通过代入验证，找出正确的答案（如例4的分析）；或者由选择支中所提供的信息，代入题设中的条件去验证（如例5的分析二），找出正确的答案，这两种不同途径的方法都称为“验证法”，一般解方程这一类的选择题均可采用这种方法。

例6 若 $\log_2 2 < \log_2 2 < 0$ ，则

- (A) $0 < a < b < 1$; (B) $0 < b < a < 1$;
(C) $a > b > 1$; (D) $b > a > 1$. (92年高考题)

分析：由换底公式得 $\log_a 2 < \log_b 2 < 0 \iff$

$$\frac{1}{\log_2 a} < \frac{1}{\log_2 b} < 0 \iff \log_2 b < \log_2 a < 0, \text{ 再根据函数}$$

$= \log_2 x$ 的图象, 可知 $0 < b < a < 1$, 故选 (B).

注：本题所采用的是“数形结合的方法”，也叫“图解法”，应用图解法解选择题的一个最大优点就是比较直观，特别当

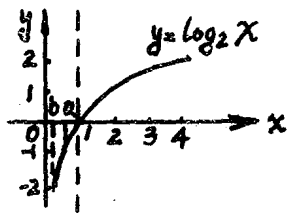


图1—1

数、式关系不易显示时，而与数、式相对应的图形关系却容易显示。这时用图解法非常奏效。这种“数形结合”的思想方法在近几年高考试卷中均作为重点考查内容。每年均为几道题涉及到它，对此应引起足够的重视。

例 7 如果函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t) = f(2-t)$, 那么 (92年高考题)

- (A) $f(2) < f(1) < f(4)$;
- (B) $f(1) < f(2) < f(4)$;
- (C) $f(2) < f(4) < f(1)$;
- (D) $f(4) < f(2) < f(1)$.

答 []

分析：从题所给的条件“二次函数 $f(x)$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t) = f(2-t)$ ”这一信息进行思考，并以“式”想“形”进行联想，可知这二次函数的图象开口向上，对称轴为 $x=2$ ，当 $x > 2$ 时，函数单调递增。画出此函数图象的草图1—2，从图象易知 $f(x)_{\text{最小}} = f(2)$ ，因此可排除选择支 (B) 和 (D)，再对 $f(1)$ 和 $f(4)$ 进行比较，

$\therefore f(1) = f(2-1)$
 $= f(2+1) = f(3) < f(4)$.
 因此有 $f(2) < f(1) < f(4)$.
 故选(A).

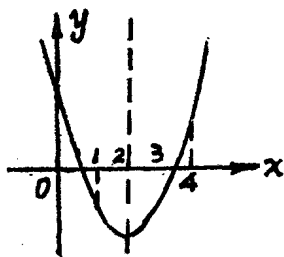


图1—2

注：解这道题我们除应用了“数形结合”的思想方法外，还应用了“综合分析法”的思想。众所周知，综合法是“由因导果”，分析法是“执果溯因”。这是认识问题、求解问题、论证问题中的两种不同的方法。但是在处理数学问题许多场合中，往往同时兼用这两种方法。通常我们做数学题在寻找解题思路时，常常采用“从已知到可知”、“从未知找需知”，寻找解决问题的“中间点”，这就是“综合分析法”的具体应用。

小结：通过以上的例题我们分别介绍了解答数学选择题的六种主要方法；但在考试中由于解选择题只要结果，不要过程，在解题时为了快速、正确地选出正确的答案，就不能拘泥于一种方法，有时要采用多种方法综合灵活应用，既注意解法的选择，又要注意解法的综合。要做到这一点，就必须在平时练习时加强“基本功”的训练，才能达到在考试中灵活应用。

(二) 填空题

填空题也是一种非常重要的数学命题形式，它与选择题一样，只要答案，不要中间过程，也属于客观性的题型。但它不同于选择题，选择题有备选答案，它可以成为应试者提供某种信息，这种信息有时起暗示或猜想的因素；但同时也存在着干扰、迷惑的因素。而填空题这些因素都不存在了，