理论力学

下　册

В. Г. 涅符兹格利亚多夫著
钟　奉　俄　译

高等教育出版社

理　论　力　学

下　册

B. Г. 涅符兹格利亚多夫著

钟　奉　俄　译

高 等 教 育 出 版 社

本书是根据苏联物理数学书籍出版社(Физматгиз)出版的涅符兹格利亚多夫(В. Г. Невзглядов)所著的“理論力学”(Теоретическая механика)一书1959年版譯出的。本书可作为综合性大学物理系的教学参考书。

全书共二十四章,分两册出版。下册包括后面的十一章,叙述微振动、分析力学基础、連續媒质普通方程和流体动力学。

下册由钟奉俄同志譯出,薛問西同志校訂。

理论力学

下册

B. Г. 涅符兹格利亚多夫著

钟　奉　俄　译

北京市书刊出版业营业許可証出字第119号

高等教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

统一书号K13010·1224　开本 850×1168 1/32　印张 9 14/16

字数 235,000　印数 0,001—2,500　定价(5)¥0.95

1965年12月第1版　1965年12月北京第1次印刷

目　录

第五篇　微振动·分析力学基础

第二部分 连续媒质力学基础

第六篇 普遍方程

第七篇　流体动力学

第五篇　微振动·分析力学基础

第十四章　稳定平衡位置附近的微振动

§97. 平衡的稳定性·保守系统的微振动

1. 我们将在本篇研究由拉格朗日变量的拉格朗日函数

$$L=L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

给定的 n 自由度力学系统。这种力学系统可以想像为借完整约束联系着的一些质点和刚体的总体。坐标 q_i 描写系统的位置，这些位置满足加在质点坐标或刚体坐标 r_{cm}, ϑ_m, ψ_m, φ_m 上的约束。

如果拉格朗日函数完全决定系统及其运动条件，则不管 L 是否明显依赖于 t（即不管能量积分存在与否），我们都将在一般意义上称这种系统为**有势系统**或**保守系统**。如果系统上作用着**非有势力**（摩擦力）Q'_i，我们将认为这些力也是给定了的，并把这种系统称为**非保守系统**。

显然，可以用由正则变量明显地给定的哈密顿函数 H 来代替拉格朗日函数。

我们来研究有势系统在约束及外场均为定常情况时的平衡。广义坐标中的虚位移原理

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0 \tag{97.1}$$

给出了系统的平衡条件——一组方程：

$$Q_i = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n),$$

或

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n). \tag{97.2}$$

这组 n 个方程联系着力学系统的 n 个坐标 q_i，它的解给出决定平衡位置的全部坐标值。也可以取这组值为零(改变坐标原点)，而无损于讨论的一般性。

如果系统在足够小的撞击下，自平衡位置($q_i=0$)出发的位移 q_i 永远保持在一个小范围之内，则这种平衡称为稳定平衡；反之，称为不稳定平衡。

显然，如果条件(97.2)对应于势能的极大值，则平衡是不稳定的。势能为极小，是平衡稳定的充分条件(狄利克雷定理)。这个定理可以由能量守恒定律

$$T+V=E \tag{97.3}$$

得出。因为势能的确定只精确到一可加常数，所以可令平衡位置的势能为零，即 $V(0,0,\cdots,0)=0$，而无损于讨论的一般性。而 V 在零点为极小的条件则意味着，存在一组正数 l_i，使得对于所有的值 $|q_i|\leqslant l_i$，均有 $V\geqslant 0$。

我们来看当至少有一个坐标达到其极限值 l 时的所有 V 值，并将其中最小的记为 V'(显然 $V'>0$)。

定理说：如果速度和坐标的初值 $\dot{q}_{i0}$ 和 q_{i0} 使 $T_0=T(\dot{q}_{i0},q_{i0})$ 和 $V_0=V(q_{i0})$ 满足条件

$$T_0+V_0<V', \tag{97.4}$$

则各坐标 q_i 将永远包含在所指区间内。

这可以从动能的恒正性($T>0$)得出。将等式(97.3)另写成

$$T=T_0+V_0-V, \tag{97.5}$$

并用反证法。设当满足加在系统初力学态上的条件(97.4)时，某些坐标 q_i 超出了(就模而言)极限 l_i。于是，根据函数 $V(q_i)$ 的连续性，必有某坐标在某一时刻达到其极限值 l_i，同时按条件，必有 $V\geqslant V'$。但这表示(97.5)的右边要变成负的。根据 T 的恒正性，这不可能，因而定理得证。

如果系统位于稳定平衡位置，则系统将会在平衡位置附近作微振动。研究这种振动是很有实际意义的。在第四章我们曾经研究过一个质点的微振动(一自由度振动)。当时对平衡稳定性的定义是借直观地考察作用在物体上的力给出的(参看图24)。而现在，当以更抽象的方式(利用广义坐标和拉格朗日函数)研究复杂的力学系统时，我们对平衡稳定性定义本身，已经是以振动(即位移永远保持有界)的可能性为出发点了。

本章专门讨论多自由度系统的振动，并且以研究线性振动为限。

2. 设势能 V 在 $q_i=0$ 处取极小值。我们将函数 V 在零点附近展成泰勒级数：

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_k}\right)_0 q_i q_k+\cdots, \tag{97.6}$$

并略去二次以上的项；这在每个二次项(按模)都大于所略去的项的假定下是可以的。这种假定，对函数 $V(q_i)$ 的形式加了一些限制。但前面给出的狄利克雷定理并不受此限制，它指明势能取极小值的位置是力学系统的稳定平衡位置，而与这个极小值是由级数(97.6)中的哪一阶的项决定的无关。(注意，如果函数在某点附近的泰勒级数展开从偶次导数项开始，则函数在该点取极值①。)将展开式(97.6)简单地写成如下形式：

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_i q_k. \tag{97.7}$$

我们来研究那种小到使第二类拉格朗日方程成为线性微分方程的振动。显然，在势能有极小值的条件下，控制初始条件就能保证位移如所需要的那样小。形式如(97.7)的势能表达式保证了方

① 这对单变量函数是对的，但对多变量函数只是个必要条件。——譯者注

程对坐标是线性的。在动能表达式中也应当作类似的简化。在约束(独立广义坐标 q_i 恒等地满足这些约束)定常的情况下，动能 T 是广义速度的齐次二次函数：

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k. \tag{97.8}$$

式中，系数 a_{ik} 是坐标 q_i 的函数；将这些函数在 $q_i=0$ 附近展成泰勒级数，并只取其首项 $a_{ik}(0,0,\cdots,0)$。拉格朗日函数 L 现在取如下形式：

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}(a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k-c_{ik}q_iq_k), \tag{97.9}$$

式中，系数 a_{ik} 和 c_{ik} 都是常数(与坐标 q_i 和时间 t 无关)，而且对角注对易是对称的：$a_{ik}=a_{ki}$，$c_{ik}=c_{ki}$。

取导数：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=a_{i1}\dot{q}_1+a_{i2}\dot{q}_2+\cdots+a_{in}\dot{q}_n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=-(c_{i1}q_1+c_{i2}q_2+\cdots+c_{in}q_n),$$

得第二类拉格朗日方程：

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2+\cdots+a_{1n}\ddot{q}_n+c_{11}q_1+c_{12}q_2+\cdots+c_{1n}q_n=0,\\
a_{21}\ddot{q}_1+a_{22}\ddot{q}_2+\cdots+a_{2n}\ddot{q}_n+c_{21}q_1+c_{22}q_2+\cdots+c_{2n}q_n=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n1}\ddot{q}_1+a_{n2}\ddot{q}_2+\cdots+a_{nn}\ddot{q}_n+c_{n1}q_1+c_{n2}q_2+\cdots+c_{nn}q_n=0.
\end{array}\right\} \tag{97.10}$$

(97.10)是 n 个常系数二阶齐次线性微分方程的方程组。我们来找它的如下形式的解：

$$q_i=A_ie^{\lambda t}\qquad(i=1,2,\cdots,n), \tag{97.11}$$

式中，A_i 是一些常数，λ 是一个同角注 i 无关的暂未确定的常数，对所有坐标都是一样的。

将(97.11)代入(97.10)，微分后约去不等于零的因子 $e^{\lambda t}$，得如下方程组：

$$\left.\begin{aligned}&(a_{11}\lambda^2+c_{11})A_1+(a_{12}\lambda^2+c_{12})A_2+\cdots+(a_{1n}\lambda^2+c_{1n})A_n=0,\\&(a_{21}\lambda^2+c_{21})A_1+(a_{22}\lambda^2+c_{22})A_2+\cdots+(a_{2n}\lambda^2+c_{2n})A_n=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&(a_{n1}\lambda^2+c_{n1})A_1+(a_{n2}\lambda^2+c_{n2})A_2+\cdots+(a_{nn}\lambda^2+c_{nn})A_n=0.\end{aligned}\right\}\tag{97.12}$$

方程组(97.12)包含 n 个线性代数方程，可用以决定 n 个常数 A_i。由于各个方程都是齐次的，所以，要有非零解存在，方程组的行列式必须为零。

令方程组(97.12)的行列式等于零，得方程

$$\begin{vmatrix}a_{11}\lambda^2+c_{11} & a_{12}\lambda^2+c_{12} & \cdots & a_{1n}\lambda^2+c_{1n}\\ a_{21}\lambda^2+c_{21} & a_{22}\lambda^2+c_{22} & \cdots & a_{2n}\lambda^2+c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}\lambda^2+c_{n1} & a_{n2}\lambda^2+c_{n2} & \cdots & a_{nn}\lambda^2+c_{nn}\end{vmatrix}=0.\tag{97.13}$$

此方程称为线性方程组(97.12)的**特征**方程（或**久期**方程）。我们之所以有权令行列式等于零(即建立特征方程)，是因为常数 λ 尚未确定。特征方程正好可以用来确定常数 λ。它是 λ^2 的 n 次代数方程，因而，一般说来，有 n 个不同的根。假定所有的根各不相同(重根情况在 § 99 讨论)；将它们编号：

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \cdots,\ \lambda_n^2.\tag{97.14}$$

对于特征方程的每一个根 λ^2，我们都可以由方程组(97.12)得到常数 A_i 的一组值。因为按假定，λ^2 不是重根(单根)，所以，如由代数学中所知道的，在(97.12)的 n 个方程中只有一个是其余 $(n-1)$ 个独立方程的结果。假定此方程是方程组中的最后一个，则当去掉此方程后，我们便得到一个含有 $(n-1)$ 个方程的方程组，由之可将 $(n-1)$ 个常数 A_i 通过 A_n 表出，而 A_n 则是任意的。将所有方程

除以 A_n，得方程组

$$\left.\begin{aligned}
&(a_{11}\lambda^2+c_{11})A_1'+(a_{12}\lambda^2+c_{12})A_2'+\cdots\\
&\qquad\cdots+(a_{1,n-1}\lambda^2+c_{1,n-1})A_{n-1}'=-(a_{1n}\lambda^2+c_{1n}),\\
&(a_{21}\lambda^2+c_{21})A_1'+(a_{22}\lambda^2+c_{22})A_2'+\cdots\\
&\qquad\cdots+(a_{2,n-1}\lambda^2+c_{2,n-1})A_{n-1}'=-(a_{2n}\lambda^2+c_{2n}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(a_{n-1,1}\lambda^2+c_{n-1,1})A_1'+(a_{n-1,2}\lambda^2+c_{n-1,2})A_2'+\cdots\\
&\qquad\cdots+(a_{n-1,n-1}\lambda^2+c_{n-1,n-1})A_{n-1}'=-(a_{n-1,n}\lambda^2+c_{n-1,n}),
\end{aligned}\right\}\tag{97.15}$$

式中

$$A_i'\equiv\frac{A_i}{A_n}\quad(i=1,2,\cdots,n-1).\tag{97.16}$$

现在，为了求$(n-1)$个常数 A_i'，我们有含$(n-1)$个已经是非齐次的线性方程的方程组，而且根据 λ^2 是单根的假设，这方程组的行列式不等于零。因此，按照代数学中熟知的克莱姆定理，我们得到如下形式的唯一解：

$$A_i'=\frac{\Delta_i(\lambda^2)}{\Delta_n(\lambda^2)}\qquad(i=1,2,\cdots,n-1),\tag{97.17}$$

式中，$\Delta_n(\lambda^2)$是方程组(97.15)的行列式，可由行列式(97.13)去掉最后一行和最后一列而得到，$\Delta_i(\lambda^2)$是在方程组(97.15)中以自由项代替第 i 列系数而得到的行列式，容易证明，这也可以从行列式(97.13)去掉最后一行和第 i 列，乘以因子$(-1)^{n+i}$ 而得到。

将(97.16)代入(97.17)，即回到常数 A_i，便可以将结果写成如下形式：

$$A_i=B\Delta_i(\lambda^2)\qquad(i=1,2,\cdots,n),\tag{97.18}$$

其中常数 B 由等式

$$B=\frac{A_n}{\Delta_n(\lambda^2)}\tag{97.19}$$

决定。

我们注意，首先，在引入常数 B 之后，我们才可以在(97.18)中将角注 i 扩展到 n，因为当 $i=n$ 时，等式(97.18)变为恒等式 $A_n=$ $=A_n$；其次，由于在定义(97.19)中常数 A_n 是任意的，这就保证了(97.18)中 B 的任意性。

应当注意，由于 λ^2 是特征方程的根，所以 $\pm\lambda$ 也都是它的根。因此当回到函数(97.11)并将(97.18)的常数 A_i 代入其中时，对特征方程的每一个根 λ^2，我们都得到第二类拉格朗日方程(97.10)的一个如下形式的特解：

$$q_i=(Be^{\lambda t}+B'e^{-\lambda t})\Delta_i(\lambda^2)\qquad(i=1,2,\cdots,n),\qquad(97.20)$$

式中 B 和 B' 是两个任意常数，一般说来是复数。

显然，如果指数函数变为正弦和余弦函数，即 $\lambda^2<0$ 时，我们便得到微振动(这将在下一节解析地予以证明)。因此，如果令

$$\lambda^2=-\omega^2,\qquad\lambda_k^2=-\omega_k^2\qquad(k=1,2,\cdots,n),\qquad(97.21)$$

(97.20)便可以写成

$$q_i=(Be^{i\omega t}+B'e^{-i\omega t})\Delta_i(\omega^2),\qquad(97.22)$$

式中，$\Delta_i(\omega^2)=\Delta_i(\lambda^2)$①是实数，因为行列式(97.13)的所有元都是实数；因此，如果将两个任意常数 B 和 B' 取成复共轭的，即 $B^*=B'$，则函数 $q_i(t)$(97.22)在全部时间 t 内都取实值。

令 $B=\frac{1}{2}Ce^{i\alpha}$，可将(97.22)写成

$$q_i=\Delta_i(\omega^2)C\cos(\omega t+\alpha)\qquad(i=1,2,\cdots,n),\qquad(97.23)$$

式中 C 和 α 是两个任意的实常数。

对(97.14)中每一个根，我们都得到拉格朗日方程(97.10)的一个特解(97.23)，这 n 个特解之和仍然是线性拉格朗日方程组(97.10)的解。于是，得到

① 这个等式只表示将 $\Delta_i(\lambda^2)|_{\lambda^2=-\omega^2}$ 簡单地記作 $\Delta_i(\omega^2)$。——譯者注

$$q_i=\sum_{k=1}^{n}\Delta_i(\omega_k^2)C_k\cos(\omega_k t+\alpha_k)\qquad(i=1,2,\cdots,n).\ (97.24)$$

函数(97.24)含有 $2n$ 个任意的独立实常数 C_k, α_k, 因之，是第二类拉格朗日方程组(97.10)的通积分，即 n 自由度保守力学系统微振动问题的通解。(97.24)中的 $\Delta_i(\omega_k^2)$，是由行列式(97.13)去掉第 n 行和第 i 列并将特征方程第 k 个根 $-\omega_k^2$ 代入、然后乘以因子 $(-1)^{n+i}$ 而得到的行列式。积分常数 C_k, α_k 由初始条件决定。

§98. 固有频率·简正坐标

1. 我们来讨论所得到的通解(97.24)。每个坐标 q_i 都是一些频率为 ω_k 的谐振动之和，这些频率称为力学系统自由微振动的固有频率。固有频率是作为特征方程 (97.13) 的根而求得的。具有固有频率的谐振动称为简正振动。

引入符号

$$Q'_k\equiv C_k\cos(\omega_k t+\alpha_k)\qquad(k=1,2,\cdots,n).\qquad(98.1)$$

简正振动 Q'_k 也称为力学系统的简正坐标。简正坐标含有任意积分常数 C_k, α_k, 它们决定于初始条件。借 Q'_k 可将通解(97.24)简写成如下形式:

$$q_i=\sum_{k=1}^{n}\Delta_i(\omega_k^2)Q'_k\qquad(i=1,2,\cdots,n),\qquad(98.2)$$

即广义坐标 q_i 是简正坐标的线性型。

简正坐标有一个有趣而重要的性质：用它表示的力学系统的动能和势能(因而，拉格朗日函数)都具有平方和的形式。为了证明这一点，我们先来证明一些辅助事实。首先证明特征方程(97.13) 所有的根都是实数，而且是负的，即 $\lambda^2<0$。将方程组(97.12)写成如下形式:

$$\sum_{s=1}^{n}(a_{is}\lambda^2+c_{is})A_s=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{98.3}$$

乘其中每个方程以 A_i 并将它们加起来:

$$\sum_{s,i=1}^{n} (a_{is}\lambda^2+c_{is})A_iA_s=0. \tag{98.4}$$

以特征方程的某个根 λ_k^2 代替 λ^2，并由(97.18)定出与此根对应的常数 A_i, A_s。于是,约去因子 B_k^2 后便得到方程

$$\sum_{s,i=1}^{n} (a_{is}\lambda_k^2+c_{is})\Delta_i(\lambda_k^2)\Delta_s(\lambda_k^2)=0,$$

或解出 λ_k^2,得:

$$\lambda_k^2=-\frac{\sum\limits_{s,i=1}^{n} c_{is}\Delta_i(\lambda_k^2)\Delta_s(\lambda_k^2)}{\sum\limits_{s,i=1}^{n} a_{is}\Delta_i(\lambda_k^2)\Delta_s(\lambda_k^2)}<0. \tag{98.5}$$

分式(98.5)的分子和分母对所有实数 λ_k^2 总是正的;这可以由以下事实得出:两个齐次二次型——势能V(97.7)和动能T(97.8)——都是**正定的**，即对其宗量的所有实值都是正的。如果以任意实数代替(97.7)中的 q_i 和 (97.8)中的 $\dot{q}_i$，则得 $V>0$ 和 $T>0$. 公式(98.5)中正是这样的二次型，因为 $\Delta_i(\lambda_k^2)$是一切元素为实数的行列式,永远是实的。

应当指出,公式(98.5)对于求固有频率是没有用的,因为要展开公式(98.5)的右方就得计算 $\Delta_i(\lambda_k^2)$，而这只有在知道了 λ_k^2 之后才行。固有频率 $\omega_k^2=-\lambda_k^2$ 由特征方程(97.13)决定。

现在来证明,双线性型

$$\sum_{s,i=1}^{n} c_{is}\Delta_i(\lambda_k^2)\Delta_s(\lambda_m^2)=0, \tag{98.6}$$

$$\sum_{s,i=1}^{n} a_{is}\Delta_i(\lambda_k^2)\Delta_s(\lambda_m^2)=0, \tag{98.7}$$

即由势能 V(97.7) 和动能 T(97.8) 的系数按(98.6)和(98.7)的形式构成的双线性型，对于特征方程的每一对互不相等的根(即对于 $\lambda_k \neq \lambda_m$)都等于零。为了证明这个事实，我们将对应于根 λ_k 的解 A_i(97.18)代入方程(98.3)；约去常数 B_k，得:

$$\sum_{s=1}^{n}(a_{is}\lambda_k^2+c_{is})\Delta_s(\lambda_k^2)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n). \tag{98.8}$$

与此类似，对于根 $\lambda_m^2 \neq \lambda_k^2$，有:

$$\sum_{s=1}^{n}(a_{is}\lambda_m^2+c_{is})\Delta_s(\lambda_m^2)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n). \tag{98.9}$$

将(98.8)的第一个方程($i=1$)乘以 $\Delta_1(\lambda_m^2)$，第二个方程($i=2$)乘以 $\Delta_2(\lambda_m^2)$，如此等等，然后将所有方程加起来，得:

$$\sum_{i,s=1}^{n}(a_{is}\lambda_k^2+c_{is})\Delta_i(\lambda_m^2)\Delta_s(\lambda_k^2)=0. \tag{98.10}$$

由方程组(98.9)，类似地有:

$$\sum_{i,s=1}^{n}(a_{is}\lambda_m^2+c_{is})\Delta_i(\lambda_k^2)\Delta_s(\lambda_m^2)=0. \tag{98.11}$$

将(98.10)和(98.11)进行比较。和同求和指标的名称无关，因此，我们可以在方程(98.10)中将角注 i 和 s 的位置对易一下；于是，因为

$$a_{is}=a_{si}, \quad c_{is}=c_{si},$$

由(98.10)便有:

$$\sum_{s,i=1}^{n}(a_{is}\lambda_k^2+c_{is})\Delta_s(\lambda_m^2)\Delta_i(\lambda_k^2)=0. \tag{98.12}$$

现在，由(98.11)减去方程(98.12)，得:

$$(\lambda_m^2-\lambda_k^2)\sum_{i,s=1}^{n}a_{is}\Delta_i(\lambda_k^2)\Delta_s(\lambda_m^2)=0. \tag{98.13}$$

因为按条件，$\lambda_m^2\neq\lambda_k^2$，所以方程(98.13)的双重和等于零，即等式(98.7)得证。同时，由(98.11)可以推出，等式(98.6)也是正确的。

现在来建立用简正坐标示的势能表达式。把以简正坐标表示q_i的(98.2)式代入(97.7)：

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i,s=1}^{n}c_{is}\sum_{k=1}^{n}\Delta_i(\omega_k^2)Q'_k\sum_{m=1}^{n}\Delta_s(\omega_m^2)Q'_m;$$

改变求和次序，得：

$$V=\frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{n}d_{km}Q'_kQ'_m, \tag{98.14}$$

式中，

$$d_{km}\equiv\sum_{i,s=1}^{n}c_{is}\Delta_i(\omega_k^2)\Delta_s(\omega_m^2). \tag{98.15}$$

由(98.6)可知，当$k\neq m$时

$$d_{km}=0,$$

这也就是说，(98.14)的双重和实际上是单重的，即

$$V=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}d_kQ_k'^2, \tag{98.16}$$

式中，

$$d_k\equiv\sum_{i,s=1}^{n}c_{is}\Delta_i(\omega_k^2)\Delta_s(\omega_k^2). \tag{98.17}$$

也可以用类似的方法变换动能的表达式(97.8)。考虑到(98.7)，我们得到：

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}b_k\dot{Q}_k'^2, \tag{98.18}$$