日本国高考题解选译

1979

数学 上

河南人民出版社

1 9 7 9

日本国高考题解选译

数　学

（上）

张楚宾
陈国刚　编译

河南人民出版社

内 容 提 要

本书是一九七九年日本国旺文社出版的《全国大学入试问题正解》中数学部分的选译本。

原书收入了百余所日本国大学的全部数学考题，其内容范围较我国中学数学教学大纲更为广泛。为了适应我国中学教学的实际情况，本书从中选译了一百五十五所大学的部分考题。

本书主要供中学师生学习参考，也可供理工科大学低年级学生参考。

责任编辑 温 光

1 9 7 9

日本国高考题解选译

数 学

（上、下两册）

张楚宾 陈国刚编译

河 南 人 民 出 版 社 出 版

河 南 第 一 新 华 印 刷 厂 印 刷

河 南 省 新 华 书 店 发 行

787×1092 毫米32 开 31.5印张 619千字

1981年 5 月第 1 版 1981年 5 月第 1 次印刷

印数：1—10,000 册

统一书号7105·136 定价2.30元

目　录

全 国 统 考

第 一 次 考 试

【试　题】

1.(1) 把二次函数 $y=25x^2-ax+11$（ a 是常数）表示为$y=(5x-b)^2+2$（ b 是正数），这时，$a=$？　$b=$？

当 x 为何值时，这个函数取最小值？其最小值是多少？

(2) 求出抛物线 $y=x^2-2x+16$ 的对称轴方程和顶点坐标。

2.从 1 到20的自然数中，选取互相不同的三个数的组合.

(1) 全是偶数组成的组有多少个？

(2) 不包括 3 的倍数的组有多少个？

(3) 至少含一个 3 的倍数的组有多少个？

(4) 正好只含一个 3 的倍数的组有多少个？

3.试证：点 P 在 $\triangle OAB$ 内部（不包含周界）的必要与充分条件是 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$，$a>0$，$b>0$，$a+b<1$。

4.设a、b为自然数，如果 a^5b^5是24位数，$\dfrac{a^5}{b^5}$的整数部

分是16位数。

(1) $10^m \leqq a^5b^5 < 10^{m+1}$, $10^n \leqq \dfrac{a^5}{b^5} \leqq 10^{n+1}$，求 m 和 n。

(2) a^3b^3 是几位数？

(3) a、b各是几位数？

5.内接于半径为 2 的圆的三角形 ABC，三边之比是 $BC:CA:AB=7:5:3$。

(1) $\cos A=?$ $\sin A=?$

(2) $BC=?$

(3) $\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=?$

【解　　答】

1.解（二次函数）

(1) 由题意，$(5x-b)^2+2$与$25x^2-ax+11$恒等，即$25x^2-10bx+b^2+2\equiv 25x^2-ax+11$，于是

$$10b=a,\ b^2+2=11.$$

但$b>0$，解上式，得

$$b=3,\ a=30.$$

又，因为$a=30$，故二次函数为

$$y=25x^2-30x+11=(5x-3)^2+2.$$

所以，当 $x=\dfrac{3}{5}$时，y 取最小值 2 。

(2) $y=x^2-2x+16=(x-1)^2+15$，所以，这个抛物线的对称轴为直线$x=1$，其顶点是$(1,\ 15)$。

2.解（组合）

(1) 从 1 到20的偶数是2，4，6，8，…. 18，20，共计有10个. 从这10个偶数中选 3 个的组合是$C_{10}^3=120$.

(2) 从 1 到 20 中，3 的倍数是3，6，9，12，15，18，合计有 6 个.所以,完全不包括 3 的倍数的组合是 $C_{14}^3=364$.

(3) "至少含一个 3 的倍数" 是(2)的对立事件*,所以,其组合数是$C_{20}^3-364=776$.

(4) 从 3 的倍数（共 6 个）中选 1，从20个自然数剩下的14个数中选 2 个，二者配合,其组合数是$C_6^1\times C_{14}^2=546$.

3.解（矢量）

(1) 必要性的证明.

设P在$\triangle OAB$内部，把线段OP延长交AB边于Q，并设$\overrightarrow{OP}:\overrightarrow{OQ}=S:1$（注意$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OQ}$同方向），则$0<S<1$，所以

$$\overrightarrow{OP}=S\overrightarrow{OQ}. \qquad ①$$

又，设$\overrightarrow{AQ}:\overrightarrow{AB}=t:1$，则由分比定理，$\dfrac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AQ}}=\dfrac{t}{1-t}$

---

* 如果事件A与事件B之和是必然事件,而且A、B互斥,则称A与B互为对立事件,或称余事件.从 1 到20的自然数中，选取互不相同的三个数的组合有C_{20}^3种，这三个数中，"不含 3 的倍数"与"至少含一个 3 的倍数"，二者必居其一，即二者组合数之和为C_{20}^3.

以后，我们将会看到在"概率"中，也有对立事件（或叫余事件）的概念.由于必然事件的概率是 1 ,所以在概率中，当A事件与B事件互为对立事件时，则A事件的概率和B事件的概率之和为 1 . 例如,掷一颗骰子，出现 3 点的概率是$\frac{1}{6}$，而不出现 3 点是出现 3 点的对立事件，因此，不出现 3 点的概率是$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

即$\dfrac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}}=\dfrac{t}{1-t}$，所以

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OA}+\frac{t}{1-t}\overrightarrow{QB}$$

$$=\overrightarrow{OA}+\frac{t}{1-t}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OQ}),$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}. \qquad ②$$

由①式和②式，得

$\overrightarrow{OP}=S(1-t)\overrightarrow{OA}+St\overrightarrow{OB}=(S-St)\overrightarrow{OA}+St\overrightarrow{OB}$.

所以，令$S-St=a$，$St=b$，则

$$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}.$$

在这里，$a=S(1-t)>0$（因$1-t>0$），$b=St>0$，$a+b=S<1$.

(2) 充分性的证明.

因$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$，$a>0$，$b>0$，$a+b<1$. 如果把线段$AB$内分成$b:a$的点为$R$，则$\overrightarrow{AR}:\overrightarrow{RB}=b:a$；但是$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{RB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OR}$，因此，$\dfrac{\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OR}}=\dfrac{b}{a}$，于是

$$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}=(a+b)\overrightarrow{OR}.$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=(a+b)\overrightarrow{OR}.$$

因$0<a+b<1$，所以，点P在线段OR上，即点P是$\triangle OAB$