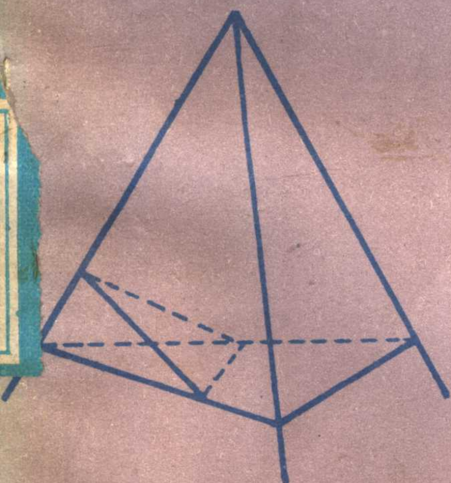
高中立体几何

# 教材参考资料

张鸿顺　门树慧
陈通鑫　曹福海　编



河北人民出版社

# 高中立体几何

# 教材参考资料

张鸿顺　门树慧
陈通鑫　曹福海　编

河北人民出版社

# 高 中 立 体 几 何

# 教材参考资料

张鸿顺　门树慧
陈通鑫　曹福海　编

河北人民出版社出版（石家庄市北马路45号）
河北新华印刷三厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32　6.5印张　132,000字　印数：1—15.700　1984年10月第1版
1984年10月第1次印刷　统一书号：7086・1161　定价：0.77元

# 前　　言

深刻地领会教材，是讲好每一节课的前提。为此，我们根据人民教育出版社编写的六年制重点中学数学课本（以下简称课本），编写了这套有关教材内容的参考资料。（本书根据1983年4月第2次印刷立体几何课本编写）

本资料是按照课本中的内容分章编写的，对于课本中的概念、公理、定理、公式、方法、法则等作了一些分析。目的是帮助教师领会教材的编写意图，更好地理解和掌握教材。在分析过程中，有的部分比教材所要求的程度略高一些。这些内容仅供教师参考，不作教学内容。

限于我们的水平，本资料会有不足之处，欢迎老师们提出宝贵的意见。

编　　者

1983年12月

# 目　　录

## 第一章　直线和平面



## 第二章　多面体和旋转体

## 第三章　多面角和正多面体

# 第一章　直线和平面

## 1．平　面

立体几何所研究的空间图形是由空间的点、线、面所构成。线有直线、曲线之分，面有平面、曲面之别。"平面"和"点"、"直线"一样，在几何中是不下定义的原始概念。

平面，作为客观物体的最简单的空间形式之一，是从桌面、黑板面、平静的水面等客观存在的一些物体中抽象出来的数学概念。它在空间是无限延展着的，也就是说，数学中所说的平面是无边界和大小的，它把空间分成了两部分。

由于很多物体的表面具有矩形的形状，例如，课桌面、黑板面、窗玻璃面等，当人们从适当的角度和距离观察时，感到它们都很象平行四边形（实际上，如按斜二测画法，矩形就画成了平行四边形）。因此，在立体几何中，通常用平行四边形来表示平面。有时，也可以用三角形、矩形或封闭曲线等平面图形来表示平面（图1－1）。这里，用以表示平面的平行四边形等仅仅表示了这个平面所在的位置。因为平面是无限延展的，所以根据具体问题的需要，可以把表示这个平面的平行四边形等扩展或缩小，这如同表示直线时，可以根据需要画出或长或短的一条线段是一样的。

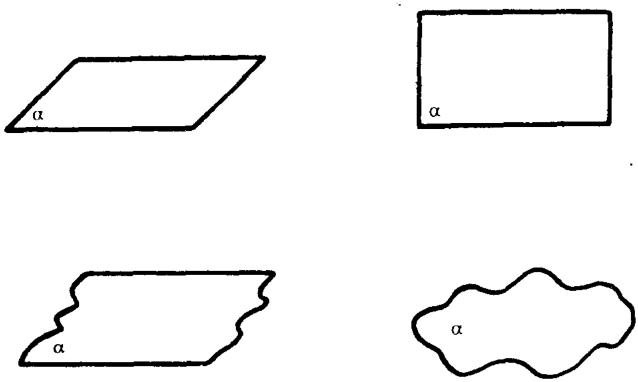



图　1－1

在空间，平面和平面之间只有相互位置的差异。为了北较直观地反映一个平面在空间的不同位置，在用平行四边形表示平面时，规定了不同的画法：当平面处于水平位置时，通常把平行四边形的锐角画成45°(有时也可画成30°或60°)，横边画成邻边的两倍(图 1－2 *a* )； 当平面处于直立位置时，平行四边形的一组对边一定要画成铅垂方向（图 1－2*b*)；

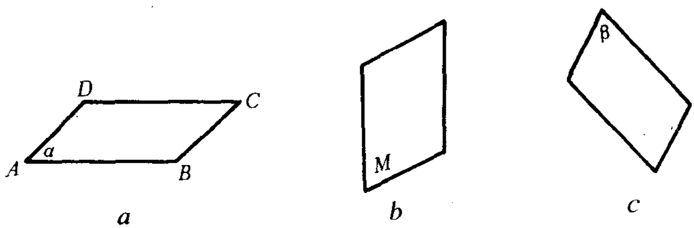
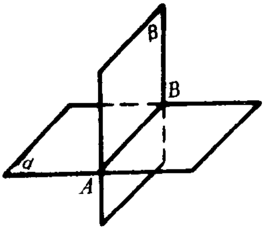



图　1－2

当平面处于其它位置时，只要画成适当的平行四边形就可以了（图1—2c）。

用字母表示平面的方法，除了课本指出的“通常用一个希腊字母$\alpha$、$\beta$、$\gamma$等来表示”之外，也可以用一个大写的英文字母$M$、$N$、$P$、$Q$等来表示。这个小写的希腊字母或大写的英文字母一定要写在平行四边形某一个角的内部，通常是写在平行四边形的一个锐角的内部且不被其它平面遮住的地方。用语言叙述或书写时，一般要在表示平面的这个字母前面加上“平面”两字，如平面$\alpha$或平面$M$（图1—2），以免和用一个大写英文字母表示点相混淆。但在不致于发生误解的情况下，为简便起见，也可以不加。对于同一空间图形中的不同平面，应当用不同的字母分别表示它们。如用一个字母表示平面时，希腊字母和英文字母最好不要混用。例如，图1—3中的一个平面用$\alpha$表示，另一个平面就要用$\beta$表示，而不要用$M$等英文字母表示。此外，平面也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示，在这种情况下，如用语言叙述或书写时，就要在表示平面的这两个字母前面加上“平面”两字，例如，图1—2$a$中的平面$\alpha$也可写作“平面$AC$”或“平面$BD$”，以免和用两个字母表示直线（或线段）的写法相混淆。

在立体几何中，为了增强空间图形直观图的立体感，通常采用实线和虚线相结合的画法：凡看得见的线都要画成实线，被遮住部分要画成虚线或者不画（图1—3）。为了不发生混乱，对于添加的辅助线，也要按这个规定和图形中原有的线同样处理，这与平面几何中把辅助线画成虚线的规定是



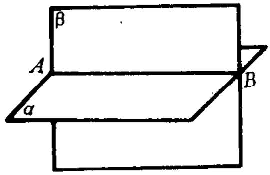




图 1-3

不同的。

## 2．平面的基本性质

在引入平面这个原始概念之后，课本立即给出关于平面的三个基本性质并把它们当作公理，作为研究空间图形性质时进行推理的基础。这是建立立体几何这门课程的逻辑体系所必需的。

平面有下列三个基本性质：

**公理 1** 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内（图 1-4）。

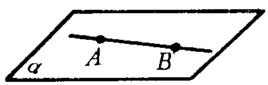



图 1-4

这时，我们就说直线在平面内，或者说平面经过直线。

公理 1 主要说明的是直线和平面的相互位置关系中直线在平面内的情况，它不仅给出了直线在平面内的定义，而且说明了判定直线是否在平面内的方法。

即要判定一条直线是否在一个平面内，或者说要判定一个平面是否经过一条直线，不可能也不需要逐一地检查直线上的所有的点是否在这个平面内，而只需要判定这条直线上的任意两点是否在这个平面内就可以了。如果是，那么这条直线就在这个平面内，否则这条直线就不在这个平面内。此外，公理1还通过“直线在平面内”的含义，描述了平面的无限延展性：直线是可以无限延长的，要无限长的直线在平面内，平面自然具有无限延展的特性。因而，在画图时，“直线在平面内”应画成如图1－4那样，而不能画成图1－5，把直线的一部分露在表示平面的平行四边形的外边。

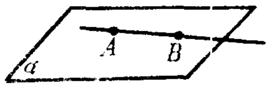


图 1－5

公理1在希尔伯特公理体系中是结合公理的第六条，课本未加改动而选用。

利用公理1和希尔伯特公理体系中的其它公理可以推导出判定一个面是平面的定理：经过面内任意两点的直线，如果这条直线全部在这个面内，那么这个面是平面。在日常的生活中，无论是木工用角尺检查板面是否刨平，还是水泥工利用直尺检查地板面是否平整，实际上都是这个公理的具体应用。

**公理2** 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线（图1－6）。

这时，我们就说这两个平面相交，这条公共直线就叫做这两个平面的交线。

公理2主要说明的是两个平面的位置关系中平面和平面

相交的情况。它不仅给出了两个平面相交的定义，而且从点、直线和平面的相互联系上描述了平面具有这样一个性质：如果两个平面交于一点，那么它们就一定交于一条直线，而这条直线必过交点。对于任意两个曲面来说它们的交线就不一定是直线。例如球面和球面的交线就不是一条直线，而是一条曲线。

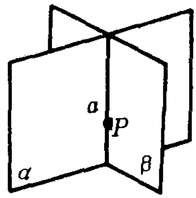


图 1 6

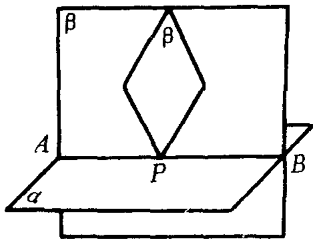


图 1-7

两个平面会不会只有一个公共点呢？

不会！这是由平面的无限延展性所决定的。既然两个平面有了一个公共点，根据平面的无限延展性，只要扩展这两个平面，它们一定有无数多个公共点。在这两个平面不重合的情况下（否则就不是两个平面而成为一个平面了），这无数个公共点必然在一条直线上。如图1-7中，平面$\alpha$和平面$\beta$有一个公共点$P$，如果把平面$\beta$画大些，平面$\alpha$和平面$\beta$就相交于过点$P$的直线$AB$了

根据公理2，今后如果说已知两个平面相交，就意味着给出了它们的一条交线；如果说已知两个平面有一个公共点，也就意味着给出了过这个公共点的一条直线。如果已知两个平面的两个公共点，那么这两点所确定的那条直线就是这两个平面的交线。

因而，“两个平面相交”应画成如图1—6那样，图1-8

和图 1-9 的画法都是不正确的。

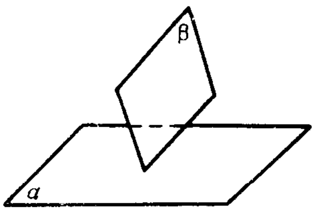



图 1-8

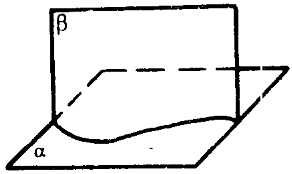



图 1-9

两个相交平面的画法步骤是:

（1） 画出表示两个相交平面的平行四边形的两边相交于$A$ （如图 1-10$a$ ）；

（2） 画出表示两个相交平面的交线的一条线段$AB$（如图 1-10$b$ ）;

（3） 过（1） 中所画的两条线段的端点分别引线段，使它们均与$AB$平行且相等（如图 1-10$c$ ）;

（4） 连结（3） 中表示两个平面的平行四边形的第四条边（被遮住的线段要画成虚线或者不画),完成全图（如图 1-10$d$ ）。

公理 2 在希尔伯特公理体系中不是一个公理。在严密地按希尔伯特公理体系建立的几何学中，根据结合公理的第七条:（如果两个平面有一个公共点，那么这两个平面至少还有另一个公共点),可推得公理 2 的结论。选择它作为中学立体几何的公理，虽然不满足公理体系独立性的要求，但保证了和谐性。多年来的教学实践也说明这样处理是符合中学实际的。

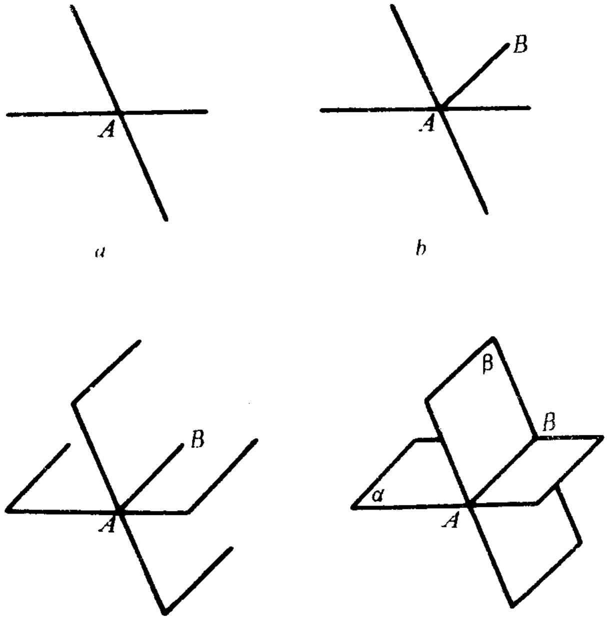


图 1-10

**公理 3** 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面（图 1-11）。

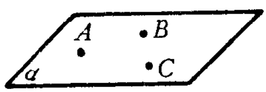


图 1-11

所谓“有且只有一个”,实际上是“有一个并且只有一个”的简明说法。其中“有一个”说明存在着一个符合条件的图形,“只有一个”说明符合条件的图形是唯一的。所以,“有且只有一个”说明符合条件的图

形不仅存在而且唯一。在数学中，如果仅说“有一个”，并不能说明符合条件的图形唯一；同样，如果仅说“只有一个”，也不能保证符合条件的图形一定存在，它只是说明如果存在着符合条件的图形的话就是唯一的。因而，在数学语言的叙述中，既不能用“有一个”来代替“有且只有一个”，也不能用“只有一个”来代替“有且只有一个”。但是，“确定一个”和“有且只有一个”是同义词。

公理3包含着如下两层含义：其一是说经过不在同一直线上的三点可以作一个平面（即存在着一个过不在同一直线上的三点的平面）；其二是指这样的平面只可以作一个（即这样的平面是唯一的）。因此，公理3是从点和平面的相互关系上肯定了这样一个事实：经过不在同一直线上的三点的平面不仅存在而且唯一。因而这个平面的位置是确定的。这样，公理3也可叙述为：经过不在同一直线上的三点，确定一个平面。

对比，这公理应明确如下的事实：经过一点的平面有无数多个，因而平面的位置不能确定；经过两点的平面也有无数多个，因而平面的位置也不能确定；经过同一条直线上的三点的平面同样有无数多个，因而同样不能确定平面的位置。

公理3是由希尔伯特公理体系中结合公理的第四条（对于不在一条直线的任意三点，存在着过这三点的平面。每个平面至少有一点）和第五条（对于不在一条直线上的任意三点，至多存在一个平面过此三点）结合而成的。

课本在提出上述三个公理之后，以推论的形式给出了确

定一个平面的三条结论。从而完整地给出了在空间确定一个平面位置的重要依据，奠定了把空间问题转化为平面问题的理论基础。

**推论1**　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面（图1-12）。

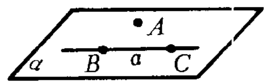



图　1-12

这个推论的已知条件是：直线 $a$ 和直线 $a$ 外的一点 $A$。要证明过直线 $a$ 和点 $A$ 有且只有一个平面，这相当于要证明下面两点：（1）过直线 $a$ 和点 $A$ 有一个平面；（2）过直线 $a$ 和点 $A$ 只有这一个平面。

该推论的证明方法，除了课本讲的证法外，经常还采用如下的证法：

证明：在直线 $a$ 上任取两点 $B$ 和 $C$。

∵　点 $A$ 在直线 $a$ 外，

∴　$A$、$B$、$C$ 三点不在同一条直线上。

∴　经过 $A$、$B$、$C$ 三点有且只有一个平面 $\alpha$。（公理3）

∵　$B$、$C$ 两点都在平面 $\alpha$ 内，

∴　直线 $a$ 在平面 $\alpha$ 内。（公理1）

∴　平面 $\alpha$ 是经过直线 $a$ 和点 $A$ 的平面。

（以上证明了过直线 $a$ 和点 $A$ 有一个平面）

假设过直线 $a$ 和点 $A$ 还有另一个平面 $\beta$，由于点 $B$、$C$ 在直线 $a$ 上，所以点 $B$、$C$ 也在平面 $\beta$ 内。这样，过不在一条直线上的三点 $A$、$B$、$C$ 除了有一个平面 $\alpha$ 外又有了另一个平面 $\beta$，这与公理3相矛盾。因此，过直线 $a$ 和点 $A$ 不可能

还有另一个平面$\beta$，而只能有一个平面$\alpha$。

（以上证明了过直线$a$和点$A$只有一个平面）

类似于推论1的证明，下面给出推论2的一种证法。

**推论2** 经过两条相交直线，有且只有一个平面（图1-13）。

已知：直线$a$和直线$b$相交于$A$。

求证：过直线$a$和b有且只有一个平面。

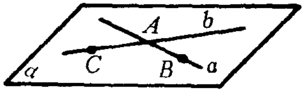



图 1 13

证明：在直线$a$、$b$上分别取不同于点$A$的点$B$、$C$，得到不在同一直线上的三点$A$、$B$、$C$，根据公理3，过这样的三点有一个平面$\alpha$。因为直线$a$上有两点$A$、$B$在平面$\alpha$内，根据公理1知直线$a$在平面$\alpha$内。同理可知直线$b$也在平面$\alpha$内。因此，平面$\alpha$是过相交直线$a$、$b$的一个平面。

因为点$A$、$B$在直线$a$上，点$A$、$C$在直线$b$上，且点$B$、$C$不同于点$A$，所以经过直线$a$、$b$的平面$\alpha$一定经过不在同一直线上的三点$A$、$B$、$C$。根据公理3知经过这三点的平面只有一个，所以经过相交直线$a$、$b$的平面只有一个，就是平面$\alpha$。

**推论3** 经过两条平行直线，有且只有一个平面（图1-14）。

已知：直线$a \parallel$直线$b$。

求证：过直线$a$、$b$有且只有一个平面。

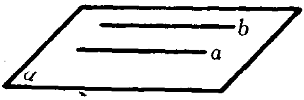



图 1-14

证法一：因为$a \parallel b$，而