普通高等学校公共基础课
助学·助教·助考 丛书

高等数学学习指导

王来生 主编

GAODENGSHUXUE XUEXIZHIDAO

中国农业大学出版社
ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

普通高等学校公共基础课
助学·助教·助考丛书

高等数学学习指导

王来生　主编

中国农业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/王来生主编.—北京:中国农业大学出版社,2005.10
ISBN 7-81066-901-X

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 064849 号

书　名 高等数学学习指导
作　者 王来生　主编

策划编辑 刘　军		**责任编辑** 阚　春	
封面设计 郑　川		**责任校对** 陈　莹　王晓凤	
出版发行 中国农业大学出版社			
社　址 北京市海淀区圆明园西路 2 号		**邮政编码** 100094	
电　话 发行部 010-62731190,2620		读者服务部 010-62732336	
编辑部 010-62732617,2618		出　版　部 010-62733440	
网　址 http://www.cau.edu.cn/caup		**E-mail**:caup@public.bta.net.cn	
经　销 新华书店			
印　刷 涿州市星河印刷有限公司			
版　次 2005 年 10 月第 1 版		2005 年 10 月第 1 次印刷	
规　格 787×980	16 开本	21 印张	381 千字
印　数 1～3 500			
定　价 24.00 元			

主　编　王来生
副主编　周志坚
参　编　杨正宏　甄　苓
　　　　　陈　静　刘加妹

内 容 简 介

本书为高等学校工科专业高等数学课程同步学习参考教材，通过大量的典型例题帮助读者掌握基本知识点和提高综合解题能力，许多典型例题都选自考研真题。

全书分 11 章，每一章的每一节由内容要点、基本要求、典型例题组成。每一章后附有自测题和自测题答案与提示。在内容要点部分，给出了基本概念、定义、重要定理与常用公式，很方便学生的学习。

本书旨在帮助学生正确理解和掌握基本的数学概念、理论和方法，培养学生综合分析和解决问题的能力。

本书兼顾了各个专业的需求，可供理、工、农、经等非数学专业的大学生及从事高等数学教学的教师使用，也可作为考研的数学复习参考书。

前　言

高等数学是高等学校本科生最重要的基础课程之一，为了更好地指导学生学好这门课程，加深对所学内容的理解和掌握，我们根据工科高等数学教学大纲并结合同济大学应用数学系主编的《高等数学(第 5 版)》组织编写了这本《高等数学学习指导》。

读者可将本书与所用高等数学教材配合使用。本书的主要特点是：依据教学大纲和研究生考试大纲的基本要求，精选出具有启发性、典型性和针对性的题目，许多典型例题都选自历届考研真题，通过对这些题目的分析解答，帮助读者掌握基本知识点和提高综合解题能力。

全书分 11 章，每一章的每一节由内容要点、基本要求、典型例题组成。每一章后附有自测题和自测题答案与提示。在内容要点部分，给出了基本概念、定义、重要定理与常用公式，很方便学生的学习。所选的典型例题由易到难，配合课堂教学，同步训练。为了与课堂教学有所区别，相当一部分典型例题综合性较强并具有一定的深度。对于典型例题中难度较大的题，先给出解题思路分析，然后给出正式解答，有的题最后还加以评注。目的是帮助学生正确理解和掌握基本的数学概念、理论和方法，开拓思维模式，培养学生综合分析和解决问题的能力。每章结束让学生做一套本章的自测题，使学生及时了解本章的学习情况。书后附两套模拟试题，分别对应一元函数微积分与多元函数微积分内容。本书对于学生的平时学习及考研复习都是很有帮助的。本书兼顾了各个专业的需求，可供理、工、农、经等非数学专业的大学生及从事高等数学教学的教师使用，也可作为考研的数学复习参考书。

本书的编写人员是多年从事高等数学教学的教师，其中第一章、第四章和第五章由刘加妹副教授编写，第二章和第三章由周志坚教授编写，第六章和第七章由杨正宏教授编写，第八章和第九章由陈静副教授编写，第十章和第十一章由甄苓副教授编写，全书由王来生教授统稿。

由于编写人员水平所限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者指正。

编　者

2005 年 5 月

目 录

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

一、内容要点

1. 函数的概念

如果变量 x 在数集 D 中任取一个值，变量 y 按某个对应法则 f 总有惟一确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$。其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，集合 $W=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域。

2. 函数的特性

(1) 函数的有界性　若存在常数 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对于任何 $x\in D$ 都成立，则称 $f(x)$ 在 D 上有界，亦称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数；否则称为无界。

(2) 函数的单调性　设 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，x_1，x_2 为 I 内任意两点，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 内为单调增加的函数；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 内为单调减少的函数。单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

(3) 函数的奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任何 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数。偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于坐标原点对称。

(4) 函数的周期性　若存在一个非零常数 T，使得函数 $y=f(x)$ 在其定义域内有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为函数 $f(x)$ 的周期。

3. 复合函数与初等函数

(1) 反函数　设函数 $y=f(x)(x\in D)$ 的值域为 W，且 x 与 y 是一一对应的，对任何 $y\in W$，按照对应法则 f^{-1} 总有惟一确定的 x 与之对应，且 $y=f(x)$，则称函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数，$y=f(x)$ 又称为直接函数。习惯上用 y 表示函数，所以反函数可写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in W$。它们的图形关于 $y=x$ 对称。

(2) 基本初等函数　幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称

为基本初等函数。

(3) 复合函数　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若 $D_f\cap Z_\varphi\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数 $x\in D_f\cap Z_g$。

(4) 隐函数　设二元方程为 $F(x,y)=0$，如果对任意的 $x\in D$，总有满足上述方程的 y 与之对应，则称 y 是 x（由方程 $F(x,y)=0$ 确定）的隐函数。

(5)初等函数　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的并能用一个式子表示的函数称为初等函数。

二、基本要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法；
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；
3. 理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念；
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形；
5. 会建立简单应用问题中的函数关系式。

三、典型例题

例 1　设 $f(x)=\begin{cases}-x^2, x\geqslant 0\\ -e^x, x<0\end{cases}$，$\varphi(x)=\ln x$，求 $f(\varphi(x))$ 的定义域。

解　由于 $D_f=(-\infty,+\infty)$，$D_\varphi=(0,+\infty)$，对 $\forall x\in D_\varphi$，$\varphi(x)\in D_f$。故 $f(\varphi(x))$ 的定义域为 $(0,+\infty)$。

例 2　设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $\underbrace{f(f(\cdots f}_{n\text{个}f}(x)))$。

解
$$f(f(x))=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f(f(f(x)))=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},\cdots$$

由归纳法，$\underbrace{f(f(\cdots f}_{n\text{个}f}(x)))=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$。

例 3　设函数 $y=f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的周期函数，证明 $f(ax)(a>0)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$

为周期的周期函数。

分析　只要证明 $f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax)$ 即可。

证
$$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax+T)$$
因为 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，所以 $f(ax+T)=f(ax)$。因而有
$$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax)$$
故 $f(ax)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数。

第二节　极限的定义和性质

一、内容要点

1. 数列极限的定义

如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，或 $x_n\to a(n\to\infty)$。

2. 数列极限的性质

(1)有界性　收敛的数列必定有界。

(2)惟一性　每个收敛的数列只有一个极限。

(3)保号性　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）。

3. 函数极限的定义

定义 1　如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在着正数 X，使得对于适合不等式 $|x|>X$ 的一切 x，所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$。

在上述定义中，将 $|x|>X$ 改写成 $x>X$（或 $x<-X$），便得到 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时函数极限的定义。

定义 2　如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$。

在上述定义中，将 $0<|x-x_0|<\delta$ 改写成 $0<x_0-x<\delta$（或 $0<x-x_0<\delta$），便得到 $x\to x_0$ 时的左、右极限的定义。

左极限记为：$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)$；

右极限记为：$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)$。

4. 函数极限的性质

(1) 函数 $f(x)$ 的极限存在的充分必要条件是 $f(x)$ 的左、右极限均存在并且相等。

(2) 若函数 $f(x)$ 的极限存在，则极限值是惟一的。

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$ ），则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）。

二、基本要求

理解数列极限的概念，理解函数极限的概念，理解函数左、右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系，掌握数列极限的性质和函数极限的性质。

三、典型例题

例 1 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$，并举例说明反之未必成立。

证 $\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，故 $\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，有 $|u_n-a|<\varepsilon$，此时有

$$||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon$$

因此若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$。反之，例如，$u_n=(-1)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在，故反过来结论未必成立。但若 $a=0$，则易知逆命题成立，这是我们经常用到的结论，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$。

例 2 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$。

分析 用 $\varepsilon-N$ 定义证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的关键是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，寻找正整数 N，一般也就是从不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 中找"$n>K$"形式的解，然后取 $N=[K]+1$。N 不是惟一的，求 N 时可将 $|x_n-a|$ 适当放大，不必去求最小的 N。

证 对任意给定的 $\varepsilon>0$，要使 $|x_n-0|<\varepsilon$，只要

$$|x_n-0|=|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$$

即可，即 $n>\frac{1}{4\varepsilon^2}$。

因此，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，可取 $N=\left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right]+1$，当 $n>N$ 时，就有 $|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0|<\varepsilon$ 成立，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$。

例 3 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，且 $x_{2k}\to a(k\to\infty)$，则 x_n 极限存在并等于 a。

证 $\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$，故 $\exists N_1\in\mathbf{N}$，当 $k>N_1$ 时，有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$，又由于 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$，对上述 ε，$\exists N_2\in\mathbf{N}$，当 $k>N_2$ 时，有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$。取 $N=\max\{2N_1-1,2N_2\}$。

若 n 为奇数，设 $n=2k-1$，当 $2k-1>N\geqslant 2N_1-1$ 时，$k>N_1$，故 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$；

若 n 为偶数，设 $n=2k$，当 $2k>N\geqslant 2N_2$ 时，$k>N_2$，故 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$。

因此，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

例 4 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$。

证 **必要性**：因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，因此，

当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$；

当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$。

充分性：若 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$，按左、右极限的定义，$\forall\varepsilon>0$，

$\exists\delta_1>0$，当 $0<x-x_0<\delta_1$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；

$\exists\delta_2>0$，当 $0<x_0-x<\delta_2$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $0<x-x_0<\delta\leqslant\delta_1$ 或 $0<x_0-x<\delta\leqslant\delta_2$，故 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

例 5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}+1, & x<0\\ 1, & x=0\\ 1+x^2, & x>0\end{cases}$，当 $x\to 0$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时的极限。

分析 $f(x)$ 为分段函数，在分界点处应考虑函数的左极限和右极限。

解 因为

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(e^{\frac{1}{x}}+1)=1,\ \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(1+x^2)=1$$

所以

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1,\ \lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}(e^{\frac{1}{x}}+1)=2,\ \lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}(1+x^2)=+\infty$$

例 6 若在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$),而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则一定有 $A>0$(或 $A<0$)吗?

解 不一定。例如,$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 的去心邻域内大于零,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$。当 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内大于零(或小于零),而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 时,结论应该是 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$)。

例 7 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

分析 利用 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在的充要条件:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} f(x)$$

解 因为

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1,\ \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$,故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

第三节 无穷小与无穷大、极限运算法则

一、内容要点

1. 无穷小的定义

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$(或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$),则称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小。

2. 无穷大的定义

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$(或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$),则称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大。

3. 无穷小与无穷大的关系

在同一过程中,无穷大的倒数为无穷小;恒不为零的无穷小的倒数为无穷大。

4. 无穷小的运算性质

定理 1　在同一过程中，有限个无穷小的代数和仍是无穷小。

定理 2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

推论 1　常数与无穷小的乘积是无穷小。

推论 2　有限个无穷小的乘积也是无穷小。

5. 极限运算法则

定理 3　如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2)$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

推论 1　如果$\lim f(x)$存在，而 c 为常数，则$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$。

推论 2　如果$\lim f(x)$存在，而 n 是正整数，则$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$。

(3) 若 $B\neq 0$，则$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$。

定理 4　设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，那么

①$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$；

②$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=A\cdot B$；

③ 当 $y_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$且 $B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$。

定理 5　如果 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$，而$\lim\varphi(x)=a$，$\lim\psi(x)=b$，那么 $a\geqslant b$ 。

二、基本要求

理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的性质及极限的四则运算法则。

三、典型例题

例 1　下列说法对吗？为什么？

(1)无穷小量是很小的数，无穷大量是很大的数；

(2)无穷小量实际上就是 0；

(3)无穷大量是无界量；

(4)无界变量就是无穷大量。

解　(1)不对。无穷小量是指极限为零的变量，任何很小的数(零除外)都不是无穷小量；无穷大量是指极限为无穷大的变量，任何很大的数都不是无穷大量。

(2)不对。常函数 0 是无穷小量，但无穷小量不仅仅是数 0。例如，$f(x)=x^2\ (x\to 0)$。

(3)对。由无穷大量定义知,无穷大量一定是无界量。

(4)不对。无界变量不一定是无穷大量,例如

$$x_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为奇数}\\ 0, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

是无界变量,但不是无穷大量。无穷大量要求变量$\{u_n\}$从某时刻以后都毫不例外地有$|u_n|>M$,这里M是任意给定的正数。

例 2 证明$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$在$(0,1)$内无界,但当$x\to 0$时,$f(x)$不是无穷大。

分析 (1)要证明$f(x)$在(a,b)内无界的一个常用方法是,寻找$x_n\in(a,b)$,使$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$。

(2)要证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$(或$\infty$)的一个常用方法是:寻找$y_n\to x_0$(当$n\to\infty$时),使$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=B$且$B\neq A$(或$B\neq\infty$)。

证 取$x_n=\frac{1}{2n\pi}$,则$x_n\in(0,1),n\in N$,

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}2n\pi\cos(2n\pi)=\lim_{n\to\infty}2n\pi\cdot 1=+\infty$$

因此$f(x)$在$(0,1)$内无界。

再证$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq\infty$。取$y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$,则$y_n\to 0(n\to\infty)$,且

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}0=0\neq\infty$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq\infty$。

例 3 判断下列命题的正确性,若正确,请给出证明;若不正确,请举出反例:

(1)若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^2=A^2$;反之如何?

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$及$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n$都存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$也存在。

(3)若$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$及$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$中至少有一个存在。

解 (1)正确。由$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,得$\forall\varepsilon>0$,当$x$充分趋近于$a$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,且$f(x)$有界(当$x$充分趋近于$a$时),而$|[f(x)]^2-A^2|=|f(x)+A||f(x)-A|\leqslant k|f(x)-A|\leqslant k\varepsilon$(设$|f(x)+A|\leqslant k,k>0$),所以$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^2=A^2$。