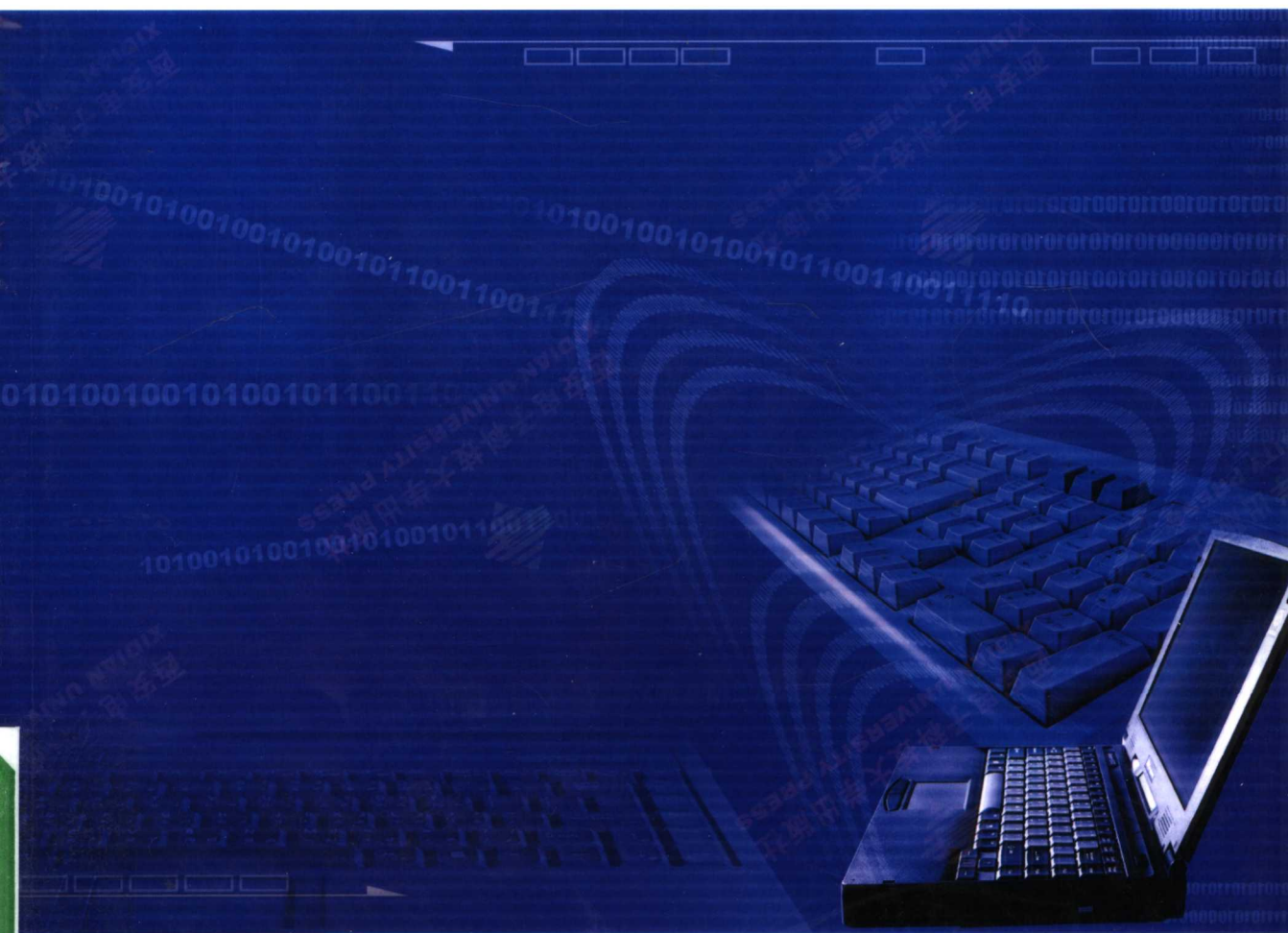


21世纪

高等学校电子信息类系列教材

# 数字信号处理

□ 陆光华 张林让 谢智波 编著



西安电子科技大学出版社

<http://www.xduph.com>

21 世纪高等学校电子信息类系列教材

# 数字信号处理

陆光华 张林让 谢智波 编著

西安电子科技大学出版社

2005

## 内 容 简 介

本书系统地讨论了数字信号处理的基本原理、主要分析方法及相应的实践途径。书中前三章是数字信号处理的基础,其中包括了时间离散信号与系统、 $Z$ 变换、离散傅里叶变换三部分内容。第四章为数字滤波器的结构表示。第五章是快速傅里叶变换。第六章讨论了数字滤波器的设计方法。第七章是离散希尔伯特变换。第八章则介绍了数字信号处理技术的实现方法及基于 MATLAB 的实验。

本书可作为高等院校电子工程、通信工程、自动控制等专业的本科生教材,也可作为通信与信息系统、信号与信息处理、电路与系统等学科的研究生教材,还可作为从事信号处理工作的有关科技人员的参考书。

## 图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理/陆光华等编著. —西安:西安电子科技大学出版社, 2005. 10

(21世纪高等学校电子信息类系列教材)

ISBN 7-5606-1565-1

I. 数… II. 陆… III. 数字信号-信号处理-高等学校-教材 IV. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 084956 号

策 划 李荣才

责任编辑 杨宗周

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

http://www.xduph.com E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西光大印务有限责任公司

版 次 2005年10月第1版 2005年10月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 11.875

字 数 275千字

印 数 1~4000册

定 价 14.00元

ISBN 7-5606-1565-1/TN·0313

**XDUP 1856001-1**

\*\*\* 如有印装问题可调换 \*\*\*

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

# 前 言

信号与信息处理系信息科学的主要学科之一，数字信号处理则是信号与信息处理及一系列相关学科的重要基础。

20世纪70年代以来，随着数字信号处理理论与应用技术的迅速发展，为出版各类信号处理书籍提供了广泛基础，但是，作为教材，有的也出现了越编越厚及越写越广的倾向，这给教学实践造成了诸多不便。为了突出重点，真正为高年级本科生和研究生打好数字信号处理课程的基础，本书将集中主要精力讨论确定性信号处理的最基本及最关键的知识，以便在为读者打好本课程及本学科的根基的同时，进一步为学好其后的随机信号处理、非平稳信号处理等一系列课程，包括直接参与有关科学研究作好必要的准备。

数字信号处理的内容虽然十分广泛，但从根本上讲，它主要涉及两大领域，其一为变换，另一个则是滤波。事实上，所谓滤波，有时也可以将其视为另一类变换。不过通常情况下，我们仍按习惯把两者稍作区别。今后我们所说的变换，主要是指通过某种运算，使之在所选的定义域内能够比较清晰地描述信号的基本特征，以利于对信号进行更为有效的处理。我们知道，一个单一频率的正弦波，它在时域可能是一个连续变化的实信号，而在频域，其幅频特性将是两根简单的谱线。显然在频域更能直观地描述该信号的基本特征。就众多变换而言，我们也以傅里叶变换为重点，因为它是数字信号处理中最基本，并被用得最多的一种变换。傅里叶变换具有非常明确的物理含义，它充分反映了信号所含的各种频率成分。至于滤波，通常更多的是指按频率域指标要求对信号的各种频率成分进行所需的取舍和加工。一般教材中经常涉及的有限字长影响，因模/数与数/模变换器件的速度及精度的迅速提高，已能满足绝大多数工程技术的要求，考虑到这部分内容比较独立，与其他章节并不十分衔接，所以在编写过程中我们决定不再将其列入本书范围，读者确有这方面的需要时，可以方便地在同类书籍中找到。离散希尔伯特变换及数字信号处理的软、硬件实现，对深入理解有关理论及更好地与工程实践相结合等均很重要，书中我们对此也作了必要的论述。

全书共八章，陆光华同志撰写了前五章，张林让同志撰写了第六、七两章，谢智波同志撰写了第八章。全书由陆光华同志最终斟酌定稿。

本书的出版得到了西安电子科技大学和浙江万里学院有关领导及诸多同志的大力支持，并获浙江万里学院重点课程建设之助，特表诚挚谢意。与此同时，编著者更要衷心感谢我们的老师——中科院院士保铮教授长期以来的指导、支持与帮助。

限于时间等原因，不当与错误之处难以避免，诚请读者批评、指正。

编著者于

西安电子科技大学 雷达信号处理国家重点实验室  
浙江万里学院 宁波市数字信号处理重点实验室

2005.8

# 目 录

<b>第一章 时间离散信号与系统</b> .....	1
1.1 引言 .....	1
1.2 时间离散信号——序列 .....	1
1.2.1 常用序列举例 .....	2
1.2.2 序列的周期性 .....	4
1.2.3 序列的能量 .....	4
1.2.4 任意序列的 $\delta(n)$ 表示 .....	4
1.3 线性移不变系统 .....	5
1.4 系统的稳定性与因果性 .....	8
1.4.1 稳定系统 .....	8
1.4.2 因果系统 .....	9
1.5 线性常系数差分方程 .....	10
1.6 离散时间系统与信号的频域表示 .....	11
1.7 傅里叶变换的一些对称性质 .....	15
1.8 时间连续信号的采样 .....	17
1.8.1 采样序列与原信号间的内在联系 .....	17
1.8.2 内插公式 .....	20
习题 .....	20
<b>第二章 <math>\mathcal{Z}</math> 变换</b> .....	22
2.1 引言 .....	22
2.2 $\mathcal{Z}$ 变换 .....	22
2.2.1 $\mathcal{Z}$ 变换定义 .....	22
2.2.2 常用序列 $\mathcal{Z}$ 变换的收敛域 .....	23
2.3 $\mathcal{Z}$ 反变换 .....	25
2.3.1 围线积分法(留数法) .....	25
2.3.2 列表法 .....	28
2.3.3 幂级数法 .....	28
2.3.4 部分分式展开法 .....	29
2.4 $\mathcal{Z}$ 变换的部分定理和基本性质 .....	29
2.5 系统函数 .....	34
习题 .....	37
<b>第三章 离散傅里叶变换(DFT)</b> .....	39
3.1 引言 .....	39
3.2 周期序列的离散傅里叶级数(DFS)表示式 .....	40
3.3 离散傅里叶级数的性质 .....	42
3.3.1 线性关系 .....	42
3.3.2 序列的位移 .....	42

3.3.3 调制特性 .....	43
3.3.4 对称性 .....	43
3.3.5 周期卷积 .....	43
3.4 周期序列以离散傅里叶级数表示时的性质小结 .....	45
3.5 $\mathcal{D}$ 变换的采样 .....	46
3.6 有限长序列的傅里叶表示——离散傅里叶变换 .....	49
3.7 离散傅里叶变换的性质 .....	51
3.7.1 线性关系 .....	51
3.7.2 序列的循环位移 .....	51
3.7.3 对称性 .....	52
3.7.4 循环卷积 .....	54
3.8 离散傅里叶变换的性质小结 .....	58
3.9 以离散傅里叶变换实现线性卷积 .....	59
习题 .....	61
<b>第四章 数字滤波器的结构表示</b> .....	<b>65</b>
4.1 引言 .....	65
4.2 数字滤波器的信号流图表示 .....	65
4.3 数字网络的矩阵表示 .....	69
4.4 无限冲激响应(IIR)系统的基本网络结构 .....	71
4.4.1 直接型 .....	72
4.4.2 级联型 .....	73
4.4.3 并联型 .....	74
4.5 转置型 .....	75
4.6 有限冲激响应(FIR)系统的基本网络结构 .....	75
4.6.1 直接型 .....	76
4.6.2 级联型 .....	76
4.6.3 线性相位有限冲激响应系统的网络结构 .....	77
4.6.4 线性相位有限冲激响应系统的零点对称性 .....	80
4.6.5 频率采样型结构 .....	81
习题 .....	83
<b>第五章 快速傅里叶变换(FFT)</b> .....	<b>84</b>
5.1 引言 .....	84
5.2 离散傅里叶变换直接计算的难点及其解决途径 .....	84
5.3 按时间抽选的快速傅里叶变换算法 .....	85
5.3.1 原位计算 .....	89
5.3.2 位序的颠倒和规律 .....	90
5.3.3 其他形式 .....	92
5.4 按频率抽选的快速傅里叶变换算法 .....	94
5.4.1 原位计算 .....	97
5.4.2 转置关系 .....	97
5.5 快速傅里叶反变换(IFFT)算法 .....	99
习题 .....	100

<b>第六章 数字滤波器设计</b> .....	102
6.1 引言 .....	102
6.2 IIR 滤波器设计方法 .....	104
6.2.1 根据模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器 .....	104
6.2.2 用零、极点累试法设计 IIR 数字滤波器 .....	119
6.2.3 IIR 数字滤波器优化设计 .....	122
6.3 FIR 滤波器设计 .....	124
6.3.1 利用窗函数法设计 FIR 滤波器 .....	124
6.3.2 利用频率采样法设计 FIR 滤波器 .....	133
6.3.3 利用切比雪夫逼近法设计 FIR 滤波器 .....	135
6.4 IIR 与 FIR 数字滤波器的比较 .....	138
习题 .....	139
<b>第七章 离散希尔伯特变换</b> .....	141
7.1 引言 .....	141
7.2 时间连续信号的希尔伯特变换 .....	141
7.3 时间离散信号的希尔伯特变换 .....	142
7.4 因果序列傅里叶变换下的希尔伯特变换 .....	143
7.5 离散傅里叶变换下的希尔伯特变换 .....	147
7.6 窄带信号表示及其采样 .....	151
习题 .....	155
<b>第八章 数字信号处理技术的实现</b> .....	157
8.1 引言 .....	157
8.2 传统 DSP 技术特点与实现 .....	157
8.2.1 DSP 芯片的基本结构 .....	159
8.2.2 DSP 算法的 MATLAB 模拟 .....	161
8.2.3 数字滤波器的 DSP 实现 .....	166
8.3 现代 DSP 技术特点与设计流程 .....	170
8.4 实验 .....	171
8.4.1 离散时间信号与系统 .....	171
8.4.2 FFT .....	176
<b>参考文献</b> .....	181

# 第一章 时间离散信号与系统

---

## 1.1 引言

信号是信息的载体，它承载和传递着存在于自然界的各种纷繁复杂的信息。根据信号本身的特点，它常可以由一个或多个独立变量来描述，在数学上则可以表示成这些变量的不同函数。例如，语音信号在数学上可表示成时间的函数，而图像信号又可以表示成一个二元或多元空间变量的亮度函数。不过，人们经常将此类数学表示式中的独立变量看作时间。我们也遵循这个传统，尽管实际上有时它并不代表时间。

以时间变量表示的信号常被分成时间(或时域)连续信号和时间(或时域)离散信号。时间连续信号的幅度一般不再量化。时间和幅度都连续的信号就是我们十分熟悉的模拟信号。离散时间信号的幅度通常也有连续和离散之分。时间为离散变量而幅度仍是连续变化的信号常叫作序列，而时间与幅度均已离散的信号则为数字信号。数字信号处理，实际上就是对幅度和时间都离散的信号的变换或滤波。似乎可以这么说，在几乎所有科学和技术领域，为了实现信息的提取，都得对有关信号进行必要的处理。信号处理技术与相应系统的发展，对科学本身的进步，一直起着十分重要的作用。需要说明的是，为了不影响主要理论的论述，本书只研讨时间离散的信号与系统，而不专门讨论幅度量化问题。或者说，我们实际讨论的将是一种幅度连续而时间离散的信号，而不直接讨论数字信号本身。这在原理上并无什么问题，因为随着电子技术的飞速发展，幅度量化的精确实现已越来越方便，读者如确因需要而必须探讨幅度量化方面的内容时，可以参阅有关文献。

通常，时间离散信号可以通过对时间连续信号的采样获取，也可以由某些时间离散处理方法直接产生。无论时间离散信号的来源如何，数字信号处理系统都具有一系列令人向往的特点。它们能用数字计算机十分灵便地运作，也可用数字专用设备实现。它不仅模仿模拟系统，更可以用来实现模拟器件无法实现的诸多十分重要的信号变换。因此，在作复杂的信号处理时，常要用到信号的数字化表示。

## 1.2 时间离散信号——序列

前面曾经说过，在时间离散系统理论中，我们主要研究以序列表示的信号的诸多处理，而不对幅度也量化的数字信号作更多讨论，而且有时也不再作过多的区分。

时间离散信号只在离散时间点上标有数值，离散时间的时间间隔  $T$  通常是均匀的，可



用  $x(nT)$  表示其在  $nT$  处的信号值，并以  $x(n)$  表示第  $n$  个离散时间点的序列值。事实上，在具体论述中，我们又常以  $x(n)$  直接代表序列  $\{x(n)\}$ 。

时间离散信号(序列)也常用图 1.1 那样的图形表示。尽管横坐标是一条连续的直线，但是需要特别说明，这里的  $x(n)$  仅对  $n$  为整数时才有定义，对于非整数的  $n$ ， $x(n)$  没有意义，把它理解为零也不正确。

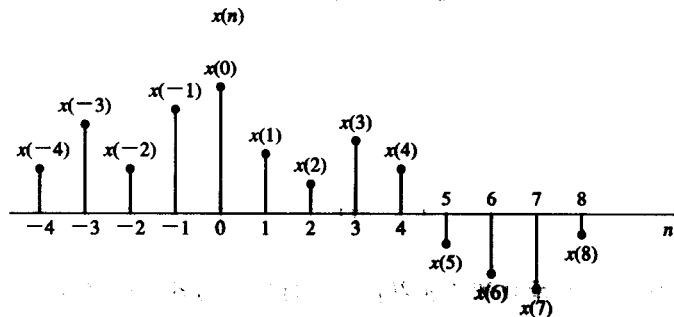


图 1.1 时间离散信号

### 1.2.1 常用序列举例

#### 1. 单位采样序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

单位采样序列如图 1.2 所示。它在时间离散信号与系统中所起的作用与模拟信号与系统中的单位冲激函数  $\delta(t)$  相仿，但在数学上没有冲激函数  $\delta(t)$  那么复杂，其定义如式 (1-1) 所示，十分明确和简单。

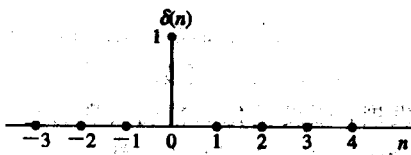


图 1.2 单位采样序列

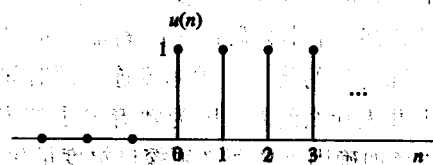


图 1.3 单位阶跃序列

#### 2. 单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

单位阶跃序列如图 1.3 所示，它与单位采样序列的关系为

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad (1-3)$$

类似地，单位采样序列与单位阶跃序列的关系为

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1-4)$$

### 3. 矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他 } n \end{cases} \quad (1-5)$$

图 1.4 所画的是样本点为  $N$  的矩形序列。它与  $u(n)$  及  $\delta(n)$  的关系分别为

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \quad (1-6)$$

及

$$R_N(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \cdots + \delta[n-(N-1)] = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(n-m) \quad (1-7)$$

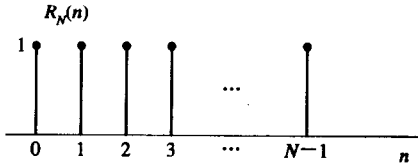


图 1.4 矩形序列

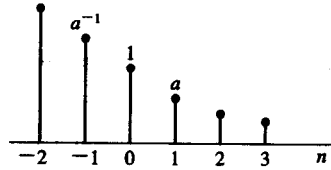


图 1.5 实指数序列

### 4. 实指数序列

$$x(n) = a^n \quad (1-8)$$

实指数序列是一个其值为  $a^n$  的任意序列，当这里的  $a$  为实数，且  $a$  值小于 1 时，实指数序列如图 1.5 所示。

### 5. 正弦序列

正弦序列如图 1.6 所示，其表达式为

$$x(n) = A \sin(\omega n + \phi) \quad (1-9)$$

式中的  $\omega$  代表正弦序列的数字角频率， $A$  是幅度， $\phi$  则为起始相位。

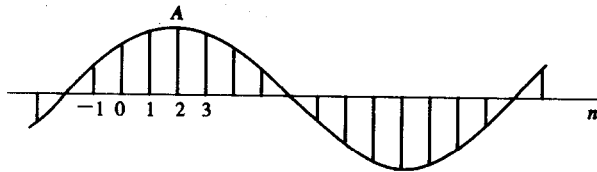


图 1.6 正弦序列

设正弦序列是模拟信号采样所得，而模拟信号的表达式为

$$x_a(t) = A \sin(\Omega t + \phi)$$

则

$$x_a(t) |_{t=nT} = A \sin(\Omega nT + \phi) \quad (1-10)$$

式中的  $\Omega$  为模拟角频率， $T$  为采样周期。对比式(1-10)与式(1-9)，可见序列的值与采样值相等，也就意味着

$$\omega = \Omega T \quad (1-11)$$

式(1-11)表明了采样所得的正弦序列的数字角频率与原先的正弦信号的模拟角频率间的对应关系。模拟角频率的单位为弧度/秒，而数字角频率的单位为弧度，它代表采样序

列相邻样本间的转角。

### 6. 复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega)n} \quad (1-12)$$

当  $\sigma=0$  时,

$$x(n) = e^{j\omega n} \quad (1-13)$$

### 1.2.2 序列的周期性

如果对所有的  $n$ , 具有一个最小的正整数  $N$ , 使  $x(n) = x(n+N)$ , 则  $x(n)$  为周期序列, 而周期就是  $N$ 。

我们以正弦序列为例, 讨论序列的周期性。此时

$$x(n) = A \sin(\omega n + \phi) \quad (1-14)$$

$$x(n+N) = A \sin[\omega(n+N) + \phi] \quad (1-15)$$

比较式(1-14)与式(1-15), 只要  $N=2\pi k/\omega$  ( $N, k$  为整数), 则该序列就是周期序列。这里有必要讨论下面所列的几种情况:

(1) 当  $\frac{2\pi}{\omega}$  为整数时, 只需取  $k=1$ ,  $N=\frac{2\pi}{\omega}$  即为其周期。

(2) 当  $\frac{2\pi}{\omega}$  虽非整数, 但它是个有理数时, 即可表示成一种分数,  $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{N}{k}$ ,  $N$  与  $k$  为互素的整数, 则最小的整数  $\frac{2\pi}{\omega} k$  就是它的周期, 也就是此时的周期将是  $\frac{2\pi}{\omega}$  的  $k$  倍。

(3) 当  $\frac{2\pi}{\omega}$  不是有理数时(例如等于  $8\pi$ ), 则任何整数  $k$  都无法使  $N$  成为整数, 因而该正弦序列将不具备周期性。

于是我们不难知道, 尽管正弦模拟信号始终是一种周期信号, 但是正弦序列, 即使它是由相应的模拟信号采样所得, 也不一定总是周期性信号, 这是因为时间离散时,  $n$  又要以整数定义带来的结果, 讨论时应该注意。

### 1.2.3 序列的能量

有时候, 引用序列的能量会带来某些方便。序列  $x(n)$  的能量  $E$  通常定义为该序列所有序列值的平方和, 即

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1-16)$$

### 1.2.4 任意序列的 $\delta(n)$ 表示

我们知道, 将单位采样序列  $\delta(n)$  作  $k$  步位移的表达式为  $\delta(n-k)$ , 其中  $k>0$  时为延迟,  $k<0$  时为导前。于是, 任何序列都可以表示成各延迟单位采样序列的幅度加权和。例如如图 1.7 所示的序列  $x(n)$  可表示成

更一般地, 对于任意序列可以表示成

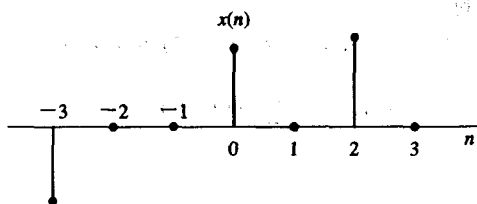


图 1.7 可表示成各延迟的单位采样序列的幅度加权

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (1-17)$$

即任意序列  $x(n)$  均可表示成  $\delta(n)$  的移位加权和。

### 1.3 线性移不变系统

一个离散时间系统如图 1.8 所示，它被定义为将输入序列  $x(n)$  转换成输出序列  $y(n)$  的一种运算或变换，即

$$y(n) = T[x(n)]$$

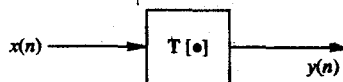


图 1.8 将  $x(n)$  转换成  $y(n)$  的变换表示

变换  $T[\cdot]$  的不同特性，反映了系统的不同性质。由于线性移不变系统在数学上易于表征，尤其是它们可以比较方便地用来实现各种信号处理功能，因此本书将重点讨论这种系统。

我们先考虑线性系统。所谓线性系统，实际上就是我们熟知的满足线性叠加原理的系统，此时，如果系统对输入序列  $x_1(n)$  及  $x_2(n)$  的输出分别为  $y_1(n)$  与  $y_2(n)$ ，即

$$y_1(n) = T[x_1(n)]$$

与

$$y_2(n) = T[x_2(n)]$$

则当输入为  $ax_1(n) + bx_2(n)$  时，线性系统的输出一定为  $ay_1(n) + by_2(n)$ ，这里的  $a$ 、 $b$  为任意常数，即此时的

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n) \quad (1-18)$$

移不变系统的主要特征是：如果  $y(n)$  是系统对  $x(n)$  的响应，那么  $y(n-k)$  将是系统对  $x(n-k)$  的响应。或者说输入作多大移位，输出也将作同样的移位，而  $k$  则是可正可负的整数。如果  $n$  描述的是时间，则移不变系统也就是我们熟悉的时不变系统。

对于同时兼有线性与移不变特性的线性移不变系统，它对输入是  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x(n-k)$  的响应将是  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(n-k)$ 。为此，我们引入一个新的变量  $h(n)$ ，称作单位采样响应，即

$$h(n) = T[\delta(n)] \quad (1-19)$$

它是系统对单位采样序列的响应。

对于线性移不变系统，其输入  $x(n]$  依式(1-17)可表示成

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

于是，系统的输出

$$\begin{aligned} y(n) &= T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \end{aligned} \quad (1-20)$$

这就是卷积和表示式，而且经常表示成式(1-21)所示的形式：

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (1-21)$$

线性移不变系统输入输出的卷积和关系如图 1.9 所示。

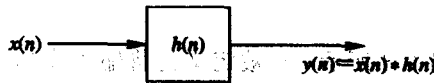


图 1.9 线性移不变系统的输入输出的卷积和表示

上述讨论表明，对一个线性移不变系统，如果把加于它的输入序列写成由式(1-17)所示的移位的单位采样序列的加权的话，系统所得的输出则可用式(1-20)所示那样由其对应的单位采样响应作同样的加权和获取。

如果对式(1-20)作变量替换，则可得另一种卷积表达式，即

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = h(n) * x(n) \quad (1-22)$$

这表明卷积结果与进行卷积的两个序列的书写次序无关，也即输入为  $x(n]$ ，单位采样响应为  $h(n]$  的线性移不变系统与输入为  $h(n]$ ，单位采样响应为  $x(n]$  的线性移不变系统具有同样的输出。

卷积和是一种十分重要的表达式，它不仅与模拟系统中的卷积积分具有完全相当的理论意义，尤其是其只需求和而无需积分运算，这在工程上更有重要价值。实现卷积和计算的软硬件方法也已十分成熟。

例 如果一个系统的单位采样响应  $h(n]$  及其输入  $x(n]$  如图 1.10 所示，试求系统对该输入的响应。

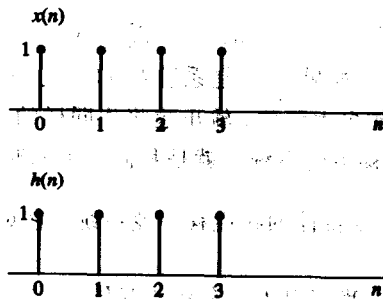


图 1.10 系统的输入及单位采样响应举例

从式(1-20)可以看到,为了得到  $y(n)$  的第  $n$  个序列值,我们需要计算  $x(n)$  与  $h(n-k)$  的乘积,并作相应的累加。为此我们先将  $x(n)$  与  $h(n)$  改为以  $k$  表示的形式,并将  $h(k)$  卷折至零点的左边,成为  $h(-k)$ ,  $h(-k)$  也可写作  $h(0-k)$ 。不同的  $n$ , 则有不同  $h(n-k)$ 。于是如图 1.11 所示,我们不难求得最终的  $y(n)$  输出。

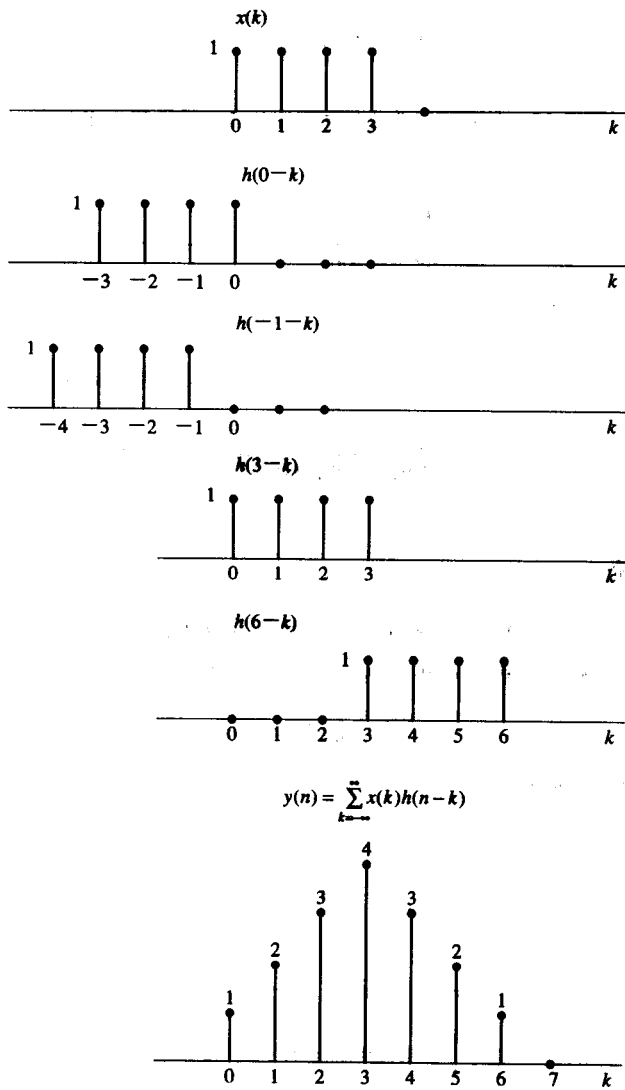


图 1.11 线性卷积和求解举例

此外,两个线性移不变系统的级联,依旧是一个线性移不变系统;其单位采样响应将是原先的两个单位采样响应的卷积;而且,由于两个序列的卷积与序列的次序无关,因此这个新线性移不变系统的单位采样响应与它们级联的次序没有关系。图 1.12 概括了这种特性,三个系统将有相同的单位采样响应及相同的输出。从式(1-20)或式(1-22)还可以看出,两个并联的线性移不变系统也可以等效成一个系统,其单位采样响应将等于原来两个系统的单位采样响应之和,如图 1.13 所示。

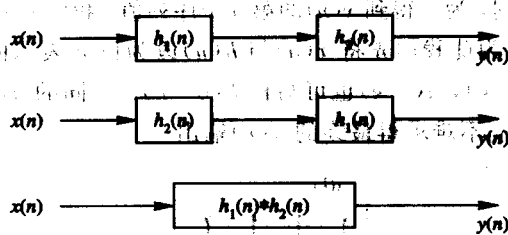


图 1.12 具有相同单位采样响应的三个线性移不变系统

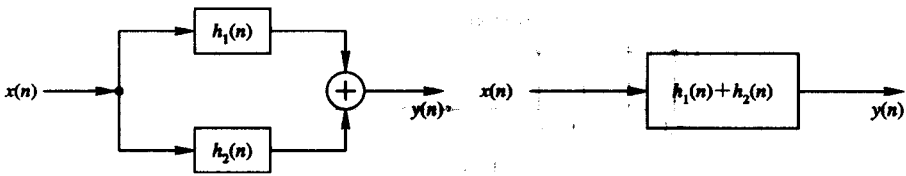


图 1.13 线性移不变系统的并联组合及其等效系统

## 1.4 系统的稳定性与因果性

### 1.4.1 稳定系统

对于每个有界输入都产生有界输出的系统被定义为稳定系统。线性移不变系统稳定的充分和必要条件为该系统的单位采样响应绝对可和，即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (1-23)$$

下面我们对此作简要的证明：

(1) 充分性：只要

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

则当  $x(n)$  有界，即

$$|x(n)| < M \quad -\infty < n < \infty$$

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n+k) \right| < M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

也定有界。

(2) 必要性：假设

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty$$

我们考虑一有界输入

$$x(n) = \begin{cases} 1 & h(-n) \geq 0 \\ -1 & h(-n) < 0 \end{cases}$$

那么只要观察  $n=0$  的一个输出样本  $y(0)$ ，即可证明

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

应该是系统稳定的必要条件，因为这时的

$$|y(0)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k) \right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(-k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty$$

即当系统的单位采样响应不是绝对可和时其输出序列将是无界的。

### 1.4.2 因果系统

因果系统是指其输出变化不会发生在输入变化之前的系统，也就是某一时刻  $n_0$  的输出  $y(n_0)$  只取决于  $n \leq n_0$  时的输入  $x(n)$  的系统。如果系统当前的输出还有赖于未来的输入，那就是非因果系统，按传统的说法也就是所谓不可实现系统。

线性移不变系统是因果系统的充分与必要条件为

$$h(n) = 0 \quad n < 0 \quad (1-24)$$

证

(1) 充分性：设  $n < 0$  时， $h(n) = 0$ ，则必有  $k > n_0$  时， $h(n_0 - k) = 0$ 。我们不妨观察  $n_0$  时刻的输出

$$\begin{aligned} y(n_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0 - k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n_0} x(k)h(n_0 - k) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} x(k)h(n_0 - k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n_0} x(k)h(n_0 - k) \end{aligned}$$

这表示  $y(n_0)$  只与  $k \leq n_0$  时的  $x(k)$  有关，而与  $k > n_0$  时的  $x(k)$  无关，因而证明了  $n < 0$  时， $h(n) = 0$  是因果系统的充分条件。

(2) 必要性：如果  $n < 0$  时， $h(n) \neq 0$ ，则在  $n_0$  时刻的输出

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{n_0} x(k)h(n_0 - k) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} x(k)h(n_0 - k)$$

即此时的  $y(n_0)$  不仅与  $k < n_0$  时的  $x(k)$  有关，而且与  $k > n_0$  时的  $x(k)$  有关，从而表明它与未来的输入也有关系，这显然与因果性条件相矛盾。因而  $n < 0$  时， $h(n) = 0$  也是其必要条件。

按照习惯，我们也将  $n < 0$ ， $h(n) = 0$  的序列称作因果序列。此外，因频率特性是理想矩形的低通滤波器及理想微分器等都是非因果的不可实现系统，人们也将非因果系统称作不可实现系统。事实上，只要可以存储，这种称谓就不甚确切。例如我们把一个人的讲话用磁带记录下来，然后将它倒过来播放，这时虽然我们已听不出讲话的内容，作为一个系统，它也已成了非因果系统，但是它毕竟是一个具体实现了的系统，而且我们不难构思出把这种输出转换成能够重现原先讲话内容的具体途径。更有价值的是只要不十分强调实时处理要求，或者虽有此要求但仍允许一定的时间延迟，我们总可以把“将来”的输入值存储起来备用，然后用具有足够延时的因果系统去逼近非因果系统，这是数字系统远较模拟设备优越的重要因素之一。



## 1.5 线性常系数差分方程

与用集中参数构成的线性时不变系统可用常系数微分方程描述一样,以延迟元件、加法器及作常系数加权的乘法器等构成的线性移不变系统,其输入输出关系则可用一  $N$  阶的常系数差分方程表示,即

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (1-25)$$

式中,  $a_k$ 、 $b_r$  为常系数。如将式(1-25)写成

$$a_0 y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (1-26)$$

且进而设  $a_0=1$ , 则式(1-26)可以表示成输入与输出之间的显式关系,即

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (1-27)$$

当然,不设  $a_0=1$  也行,因为只需将式(1-26)中的每一项除以  $a_0$ , 并将各系数重新标注即可得到式(1-27)的表示式。

式(1-27)所示的  $N$  阶差分方程表明,系统输出的第  $n$  个样本可以从此前  $N$  个输出的过去值( $N$  阶)、当前的输入值以及过去的  $M$  个输入值计算得到。与卷积和相仿,差分方程不仅可以从理论上表征系统,而且也能方便地完成系统的具体实现。

下面先看  $N=0$  的情况,此时式(1-27)可表示成

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (1-28)$$

如果设

$$h(r) = \begin{cases} b_r & 0 \leq r \leq M \\ 0 & r \text{ 为其他} \end{cases} \quad (1-29)$$

这时不难理解,式(1-28)实际上就是系统的卷积表示式。而且可以进一步看到,该系统的输出只与输入有关,而与输出本身无关,因而从结构考虑的话,又常将它称作非递归型系统。不过,如从系统单位采样响应的长度考虑,因其  $h(n)$  为有限长序列,所以又常被称作有限冲激响应(FIR)系统。

例 设  $M=1$ ,  $b_0=1$ ,  $b_1=0.5$ , 此时的  $y(n)=x(n)+0.5x(n-1)$ , 其输入输出关系如图 1.14 所示。



图 1.14 简单 FIR 系统框图

如果再设  $n < 0$  时,  $y(n)=0$ , 即满足初始静止条件, 则当  $x(n)=\delta(n)$  时,  $y(n)=h(n)$ , 而且  $n < 0$  时,  $h(n)=0$ , 于是有

$$h(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-1)$$