

主 编 莫智文
副主编 谢寿才 曾永康

理科类

大学数学

课程学习与考试指南

Daxue Shuxue
Kecheng Xuexi Yu Kaoshi Zhinan

大学数学课程学习与考试指南

(理科类)

主 编 莫智文

副主编 谢寿才 曾永康

西南交通大学出版社

• 成 都 •

图书在版编目 (C I P) 数据

大学数学课程学习与考试指南. 理科类 / 莫智文主编.
成都: 西南交通大学出版社, 2005. 9
ISBN 7-81104-133-2

I. 大... II. 莫... III. 高等数学—高等学校—教
学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 081536 号

大学数学课程学习与考试指南
(理科类)

主编 莫智文

*

责任编辑 孟苏成 张宝华

责任校对 韩松云

封面设计 肖 勤

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564)

<http://press.swjtu.edu.cn>

E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn

四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 170 mm×230 mm 印张: 15.625

字数: 296 千字

2005 年 9 月第 1 版 2005 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-81104-133-2/O · 015

定价: 20.00 元

图书如有印装问题 本社负责退换
版权所有, 盗版必究, 举报电话: 028-87600562

前 言

《大学数学课程学习与考试指南》是根据我校非数学专业的教学大纲的要求编写的,旨在帮助学生加深理解基本概念、基本理论,准确地抓住解题关键,清晰地辨明解题思路.

本书包括高等数学(上、下)、线性代数、概率论与数理统计三个部分,分别以教材《高等数学》(第五版)——同济大学应用数学系主编、《线性代数》(第四版)——同济大学应用数学系主编、《概率论与数理统计》(第三版)——浙江大学盛骤等主编的知识内容框架为依托,以考试要求为方向编著的.本书在章节的编排上除高等数学部分将定积分及定积分的应用编排成一章以外,其余各部分及其章节在编排上均与教材保持同步.本书每一章都分为基本要求、知识要点、典型例题、习题,各章针对教学大纲列出考试的基本要求、需要掌握的各个知识要点,针对基本概念、基本理论、基本方法配备了典型例题,帮助学生加深理解基本概念、基本理论,引导学生分析题意,构造解题方法,纠正易见易犯错误,同时将该章与前面已学过的内容融会贯通在一起.为突出考试的重点,每章配备了一些习题供学生练习.

书中带“*”内容为理科二类选学内容.

该书由四川师范大学基础部主任莫智文教授主持编写,高等数学、概率论与数理统计两部分由谢寿才老师编写,线性代数由曾永康老师编写,全书的统稿工作由莫智文教授完成.喻秉钧教授对全书的初稿进行了非常详细的审阅,提出了许多宝贵的修改意见,韩天勇老师对书稿的编排也做了不少的工作,在此表示诚挚地感谢.由于水平有限,不妥和错误之处在所难免,恳请读者和各位同仁批评指正.

作 者

2005年6月

目 录

第一部分 高等数学

第一章 函数与极限	1
一、基本要求	1
二、知识要点	1
三、典型例题	4
四、习题一	8
五、参考答案	9
第二章 导数与微分	10
一、基本要求	10
二、知识要点	10
三、典型例题	12
四、习题二	15
五、参考答案	16
第三章 微分中值定理与导数的应用	17
一、基本要求	17
二、知识要点	17
三、典型例题	19
四、习题三	24
五、参考答案	25
第四章 不定积分	26
一、基本要求	26
二、知识要点	26
三、典型例题	27
四、习题四	30
五、参考答案	31

第五章 定积分、定积分的应用、广义积分	32
一、基本要求	32
二、知识要点	32
三、典型例题	36
四、习题五	41
五、参考答案	42
第六章 空间解析几何与矢量代数	44
一、基本要求	44
二、知识要点	44
三、典型例题	49
四、习题六	51
五、参考答案	52
第七章 多元函数的微分法及其应用	53
一、基本要求	53
二、知识要点	53
三、典型例题	55
四、习题七	62
五、参考答案	63
第八章 重积分	64
一、基本要求	64
二、知识要点	64
三、典型例题	66
四、习题八	72
五、参考答案	74
*第九章 曲线积分与曲面积分	75
一、基本要求	75
二、知识要点	75
三、典型例题	81
四、习题九	85
五、参考答案	85
*第十章 无穷级数	86
一、基本要求	86

二、知识要点	86
三、典型例题	90
四、习题十	95
五、参考答案	96
第十一章 微分方程	97
一、基本要求	97
二、知识要点	97
三、典型例题	100
四、习题十一	104
五、参考答案	105
第二部分 线性代数	
第十二章 行列式	106
一、基本要求	106
二、知识要点	106
三、典型例题	109
四、习题十二	114
五、参考答案	115
第十三章 矩阵及其运算	116
一、基本要求	116
二、知识要点	116
三、典型例题	120
四、习题十三	125
五、参考答案	127
第十四章 向量组的线性相关性	129
一、基本要求	129
二、知识要点	129
三、典型例题	131
四、习题十四	135
五、参考答案	136
第十五章 线性方程组	137
一、基本要求	137
二、知识要点	137

三、典型例题	137
四、习题十五	143
五、参考答案	144
第十六章 相似矩阵及二次型	146
一、基本要求	146
二、知识要点	146
三、典型例题	148
四、习题十六	157
五、参考答案	158

第三部分 概率论与数理统计

第十七章 随机事件及其概率	159
一、基本要求	159
二、知识要点	159
三、典型例题	163
四、习题十七	168
五、参考答案	169
第十八章 随机变量及其分布	170
一、基本要求	170
二、知识要点	170
三、典型例题	174
四、习题十八	180
五、参考答案	181
第十九章 多维随机变量及其分布	182
一、基本要求	182
二、知识要点	182
三、典型例题	186
四、习题十九	193
五、参考答案	195
第二十章 随机变量的数字特征	197
一、基本要求	197
二、知识要点	197
三、典型例题	201

四、习题二十	207
五、参考答案	209
第二十一章 大数定律及中心极限定理	210
一、基本要求	210
二、知识要点	210
三、典型例题	211
四、习题二十一	212
五、参考答案	213
第二十二章 样本与抽样分布	214
一、基本要求	214
二、知识要点	214
三、典型例题	216
四、习题二十二	219
五、参考答案	220
第二十三章 参数估计	221
一、基本要求	221
二、知识要点	221
三、典型例题	223
四、习题二十三	227
五、参考答案	228
第二十四章 假设检验	229
一、基本要求	229
二、知识要点	229
三、典型例题	230
附录一 第一期期末考试样题	232
附录二 第二期期末考试样题	235
附录三 线性代数期末考试样题	237
附录四 概率论与数理统计期末考试样题	239

第一部分 高等数学

第一章 函数与极限

一、基本要求

- (1) 理解映射、函数、反函数、复合函数等概念；掌握函数的特性；能求函数的定义域。
- (2) 理解极限、无穷小、无穷大、函数在一点的连续性及间断点等概念。
- (3) 熟练掌握极限的运算法则，会求函数的极限。
- (4) 了解极限存在的两个准则，能熟练利用两个重要极限求某些函数的极限。
- (5) 知道极限与无穷小的关系，掌握无穷小的性质及无穷大与无穷小之间的关系。
- (6) 掌握连续函数的四则运算、复合函数的连续性；了解闭区间上的连续函数的性质。

二、知识要点

1. 函 数

- (1) 函数的定义及函数的三要素：定义域、值域、对应法则。
- (2) 函数的特性：有界性、单调性、奇偶性、周期性。
- (3) 反函数、基本初等函数及初等函数。

2. 极 限

- (1) 数列极限的定义和性质。

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \text{当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \epsilon \text{ 成立.}$

① 极限的唯一性. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 则 $a = b$.

② 收敛数列的有界性. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\exists M > 0$, 使对一切 n , 有 $|x_n| \leq M$.

- (2) 函数极限的定义。

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

(3) 函数极限的性质: 唯一性、有界性、保号性.

① 函数极限的唯一性: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则极限唯一.

② 函数极限的局部有界性: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

③ 函数极限的局部保号性: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

(4) 无穷小、无穷大、无穷小阶的比较.

① 无穷小: 如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 则称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小.

② 无穷大: 如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大, 则称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty)$$

③ 无穷小的比较: 设 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$.

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记为 $\beta = o(\alpha)$.

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 与 α 是同阶的无穷小.

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 是等阶的无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$.

④ 等价无穷小的性质: 设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'} = \lim \frac{\beta}{\alpha}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

(5) 无穷小的性质, 无穷小与无穷大之间的关系.

① 有限个无穷小之和、差是无穷小.

② 有限个无穷小之积是无穷小.

③ 有界函数与无穷小之积是无穷小.

④ 在自变量的同一变化过程中, 无穷小的倒数(分母不为零)是无穷大; 无穷大的倒数是无穷小.

(6) 两个有关极限的充要条件.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha \quad (\text{其中 } \lim \alpha = 0).$$

(7) 极限存在准则.

准则 I 如果数列 x_n 、 y_n 及 z_n 满足:

$$\textcircled{1} y_n \leq x_n \leq z_n (n=1, 2, \dots);$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

准则 II 单调有界数列必有极限.

$$(8) \text{ 两个重要极限: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

3. 函数的连续性及间断点

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点左连续 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点右连续 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

函数的不连续点称为函数的间断点.

(2) 间断点的分类.

① $f(x_0 - 0)$ 、 $f(x_0 + 0)$ 存在不相等的间断点为跳跃间断点.

② $f(x_0 - 0)$ 、 $f(x_0 + 0)$ 存在相等 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在) 的间断点为可去间断点.

③ $f(x_0 - 0)$ 或 $f(x_0 + 0)$ 不存在的间断点为第二类间断点 (如无穷间断点、振荡间断点等).

④ 跳跃间断点、可去间断点统称为第一类间断点.

(3) 连续函数的运算及初等函数的连续性.

① 连续函数的和、差、积、商 (除去分母为 0 的点) 仍是连续函数.

② 连续函数的复合函数也是连续函数.

③ 初等函数在其定义区间内连续.

(4) 闭区间上连续函数的性质.

① 最大、最小值定理: 闭区间上的连续函数一定能取到最大值和最小值.

② 零点存在定理: 如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

③ 介值定理: 如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则对介于 $f(a)$ 、 $f(b)$ 之间的任意一个数 c , $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = c$.

三、典型例题

例1 函数 $y = \sqrt{\lg \frac{x^2+5x}{6}}$ 的定义域是_____.

答案: $(-\infty, -6] \cup [1, +\infty)$.

例2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$, 则函数 $f(x^2+3)$ 的定义域是_____.

解 因 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$, 那么要使 $f(x^2+3)$ 有定义, 则 $0 \leq x^2+3 \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$, 即 $x \in [-1, 1]$.

例3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求 $f(x-a)+f(x+a)$ ($a>0$) 的定义域.

解 因函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 要使函数 $f(x-a)+f(x+a)$ 有定义, 则

$$\begin{cases} 0 \leq x-a \leq 1 \\ 0 \leq x+a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq x \leq 1+a \\ -a \leq x \leq 1-a \end{cases}$$

即当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $a \leq x \leq 1-a$; 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $x = \frac{1}{2}$; 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 定义域为空集.

例4 设 $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2x$, 其中 $x \neq 0, x \neq 1$, 求 $f(x)$.

解 令 $t = \frac{x-1}{x}$, 有 $f\left(\frac{1}{1-t}\right) + f(t) = \frac{2}{1-t}$, 即

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{1-x} \quad (1.1)$$

再令 $\frac{1}{1-x} = \frac{u-1}{u}$, 即 $x = \frac{1}{1-u}$, 代入上式, 得

$$f\left(\frac{1}{1-u}\right) + f\left(\frac{u-1}{u}\right) = \frac{2(u-1)}{u}$$

$$\text{即} \quad f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{2(x-1)}{x} \quad (1.2)$$

由式(1.1)、(1.2)及原方程, 得

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - 1$$

例5 判别函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解 因 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1})$

$$= \ln \frac{(-x + \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

例 6 设对一切实数 x , 有 $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 求 $f(x)$ 的周期.

$$\begin{aligned} \text{解 因 } f(x+1) &= f\left[\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} + \sqrt{f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f^2\left(x + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} = \frac{1}{2} + \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] = f(x) \end{aligned}$$

由题设 $f(x) \geq \frac{1}{2}$, 故 $f(x)$ 的周期是 1.

例 7 计算下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \sin \frac{1}{n}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{95} \cdot (2x-1)^5}{(x^2+1)^{50}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 (1) 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \\ &= e \cdot 1 \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x+1)^{95} (2x-1)^5}{x^{100}}}{\frac{(x^2+1)^{50}}{x^{100}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{95} \cdot \left(2 - \frac{1}{x}\right)^5}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{50}} = 2^5.$$

例 8 计算下列极限.

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}; \\ (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解 (1) 原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} \quad (\text{因 } x \rightarrow 1, x \neq 1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} = \frac{2}{\pi}.$$

$$(3) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1.$$

$$(4) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}}$$

$= \infty$ (无穷小的倒数(分母不为0)时, 是无穷大).

[评析] 以上几个极限都不能直接利用极限的四则运算法则来求, 对“ $\infty - \infty$ ”、“ $0 \cdot \infty$ ”、“ $\frac{0}{0}$ ”等不定型, 需采取对函数进行变换, 配重要极限等方法来解决.

例9 设 $0 < x_1 < 3$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ ($n=1, 2, \dots$), 证明: 数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

分析 此题利用极限存在准则“单调有界数列必有极限”来解决.

证 因 $0 < x_1 < 3$, 故

$$0 < x_2 = \sqrt{x_1(3-x_1)} \leq \frac{1}{2}[x_1 + (3-x_1)] = \frac{3}{2}$$

设 $0 < x_k \leq \frac{3}{2}$, $k > 1$, 则

$$0 < x_{k+1} = \sqrt{x_k(3-x_k)} \leq \frac{1}{2}[x_k + (3-x_k)] = \frac{3}{2}$$

即 $\{x_n\}$ 有界.

$$\begin{aligned} \text{又因 } x_{n+1} - x_n &= \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n = \sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n} - \sqrt{x_n}) \\ &= \frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n} + \sqrt{x_n}} \geq 0 \quad (n > 1) \end{aligned}$$

即当 $n > 1$ 时, $x_{n+1} \geq x_n$. 说明 $\{x_n\}$ 是单调数列.

由极限存在准则 II, 数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 由 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$, 得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $a = \sqrt{a(3-a)} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$ 或 $a = 0$, 再加上对一切 n , 有 $x_n \geq x_1 > 0$, 从而 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq x_1 > 0$, 因

此, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}$.

例 10 讨论下列函数在点 $x=0$ 的连续性, 并指明间断点的类型.

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} & (x>0), \\ 0 & (x \leq 0); \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

分析 本题可利用函数在一点的连续性的定义来解决.

解 (1) 因 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, 又因

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1} = 0 \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

$$(2) \text{ 因 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-2^{-\frac{1}{x}}}{1+2^{-\frac{1}{x}}} = 1$$

则

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不连续, $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例 11 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+t) = f(x) + f(t)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $t \in (-\infty, +\infty)$. 证明: 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

分析 要证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 由连续性的定义, 只需证明 $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0) + f(\Delta x) - f(x_0) = f(\Delta x)$, 有 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. 这样, 只需要证 $f(0) = 0$ 即可.

证明(略).

例 12 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (常数). 证明:

$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

分析 闭区间上的连续函数必有最大值与最小值, 而本题 $[a, +\infty)$ 为半无限区间. 因此将 $[a, +\infty)$ 分成两个区间来考虑.

证 因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 对 $\varepsilon = 1$, $\exists X > 0$, 当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon = 1$ 成立. 此时

$$|f(x)| = |[f(x) - A] + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$$

即 $f(x)$ 在 $(X, +\infty)$ 上有界.

又由于 $f(x)$ 在 $[a, X] \subset [a, +\infty)$ 上连续, 由闭区间上连续函数的最值定理, $\exists m, M \in \mathbb{R}$, 当 $x \in [a, X]$ 时, 有 $m \leq f(x) \leq M$, 取 $K = \max\{|m|, |M|, 1 + |A|\}$, 则有 $|f(x)| \leq K, x \in [a, +\infty)$, 即 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

四、习题一

1. 填空题:

(1) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$, 则 $f\{f[f(x)]\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 4$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} + ax + b \right) = 0$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 $f(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 如果函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + a & (x < 0) \\ e^x + 1 & (x \geq 0) \end{cases}$, 在 $x = 0$ 点连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{3} - 1) \sin \frac{n^2 + 1}{n + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)}{x^2 - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(8) 设 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

(9) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$, 在 $x = 0$ 点连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.