最优控制理论及参数优化

李国勇 等编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

最优控制理论及参数优化

李国勇　张翠平　郭红戈　曲兵妮　编著

国防工業出版社
·北京·

内容简介

本书对最优控制理论和参数最优化方法进行了较全面的论述。全书共分6章,深入浅出地介绍了最优控制理论的基本知识和参数最优化的基本方法。主要内容包括:最优化问题的基本概念、最优控制中的变分法、极大值原理、动态规划、线性二次型最优控制问题、线性规划、单变量函数的最优化方法、无约束条件下多变量函数的最优化方法和有约束条件下多变量函数的最优化方法。为了方便学习,在各章中都列举了大量的应用实例及利用MATLAB对其实现的方法。

本书可作为理工科高等院校自动化和机电工程等专业的研究生和高年级本科生的教材,也可作为从事相关专业的科技人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

最优控制理论及参数优化/李国勇等编著.
—北京:国防工业出版社,2006.1
ISBN 7-118-04238-2

Ⅰ.最... Ⅱ.李... Ⅲ.最佳控制-数学理论
Ⅳ.0232

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第136682号

※

国防工業出版社 出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码 100044)
腾飞胶印厂印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 18¼ 字数 424千字
2006年1月第1版第1次印刷 印数 1—4000册 定价 29.00元

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474
发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

前　言

随着现代科学技术与生产发展的需要以及计算机技术的飞速发展，最优控制理论的应用日益广泛，不仅在运筹学、系统工程、经济管理等学科领域内有重要意义，而且在实际工程设计和系统控制中得到了广泛的重视并取得了卓有成效的实用效果。本书从工程应用的角度出发，系统地介绍了最优控制理论及参数最优化方法，使读者对最优控制理论及参数最优化方法有较全面的了解和认识，并能正确运用最优控制理论及参数最优化方法去解决工程中的实际问题。

全书共分 6 章。第 1 章论述了最优化问题的基本概念及其常用的求解方法。第 2 章先介绍普通函数的极值问题，然后再讨论变分法的基本概念和它在动态最优控制中的应用。第 3 章着重讲述了极大值原理及其应用。第 4 章介绍了动态规划、基于动态规划的微分对策问题以及动态规划与变分法和极大值原理的关系等。第 5 章讨论了线性二次型问题、状态调节器、输出调节器、跟踪器和线性二次型微分对策等。第 6 章讲述了求解参数最优化的几种方法，如线性规划方法、单变量寻优方法、无约束条件下多变量的寻优方法和有约束条件下多变量的寻优方法。为了培养学生现代化的分析与设计能力，在每一章都列举了大量的应用实例及利用 MATLAB 对其实现的方法。

本书由李国勇任主编，并编写第 1 章、第 2 章和第 4 章；张翠平编写第 3 章和第 6 章的 6.3.4、6.4.3 和 6.4.4 小节；郭红戈编写第 5 章；曲兵妮编写第 6 章(除 6.3.4、6.4.3和 6.4.4 小节)。全书由李国勇教授统稿。

由于作者水平有限，书中难免有遗漏与不当之处，恳请广大读者批评指正。

编著者

2005 年 9 月

目　　录

第1章 绪 论

近50年来,科学技术的迅速发展,对许多被控对象,如宇宙飞船、导弹、卫星和现代工业设备与生产过程等的性能提出了更高的要求,在许多情况下要求系统的某种性能指标为最优。这就要求人们对控制问题都必须从最优控制的角度去进行研究分析和设计。最优化问题就是依据各种不同的研究对象以及人们预期要达到的目的,寻找一个最优控制规律或设计出一个最优控制方案或最优控制系统。最优控制理论是研究和解决从一切可能的控制方案中寻找最优解的一门学科,它是现代控制理论的重要内容。控制理论的发展来源于控制对象的要求。最优控制理论研究的主要问题是根据所建立的被控对象的数学模型,选择一个容许的控制律,使得被控对象按预定要求运行,并使给定的某一性能指标达到极小值(或极大值)。

1.1 概 述

20世纪50年代,随着生产的发展,特别是空间技术的发展,对自动控制所提出的要求愈来愈高,控制系统日趋复杂。于是,那种建立在传递函数、频率特性基础上的自动控制理论,即所谓经典控制理论,日益暴露出它的局限性:传递函数只适用于处理集中参数的定常系统;用原来的传递函数方法、频率特性方法处理问题变得很复杂,以致难以应用;以解决伺服系统稳定性为主要目标的经典方法也无法适用按综合性能设计控制系统的要求;至于凭经验凑试及手工计算显然难以用来处理复杂问题。面对客观实际所提出的种种亟待解决的理论问题,人们从问题的原始提法出发,更深入地去讨论控制系统内在的规律性,这就导致从变化后的频率域回到原来的时间域,建立了以状态空间法为基础的现代控制理论。

现代控制理论所能处理的问题范围很广。原则上,它可以用来处理时变系统、非线性系统、多输入多输出系统以及分布参数系统的问题。用它来处理随机系统问题和离散系统问题同样是很方便的。

现代控制理论以多变量控制、最优控制、最优估计和自适应控制为主要内容。其中,最优控制理论是现代控制理论中发展较早的重要组成部分之一。它的形成与发展和整个现代自动控制理论的形成与发展是分不开的。在20世纪50年代初期,就开始发表了从工程观点研究最短时间控制问题的文章,尽管其最优性的证明多半借助于几何图形,带有启发性质,但毕竟为发展现代控制理论提供了第一批实际模型。由于最优控制问题的引人注目的严格表述形式,更由于空间技术的迫切需要,从而吸引了大批数学家的密切注意。人们发现,最优控制问题就其本质来说,乃是一变分学问题。然而,经典变分理论只能解决一类简单的最优控制问题,因为它只对无约束或开集性约束是有效的。而实际上

碰得更多的却是容许控制,属于闭集的一类最优控制问题,这就要求人们去探索、求解最优控制问题的新途径。在种种新方法中,有两种方法最富有成效。一种是苏联学者庞特里亚金(Л.С.Понтрягин)的"极大值原理";另一种是美国学者贝尔曼(R.E.Bellman)的"动态规划"。受力学中哈密顿原理的启发,庞特里亚金等人把"极大值原理"作为一种推测首先推出来,不久又提供了一种严格的证明,并于1958年在爱丁堡召开的国际数学会议上首先宣读。"极大值原理"发展了经典变分原理,成为处理闭集性约束变分问题的强有力工具。"动态规划"是贝尔曼在1953年—1957年逐步创立的。它依据最优性原理,发展了变分学中的哈密顿-雅克比(Hamilton-Jacobi)理论,构成了"动态规划",它是一种适用于计算机计算,处理问题范围更广的方法。此外,在现代控制理论的形成与发展中,起过重要的推动作用的还有库恩(H.W.Kuhn)和图克(A.W.Tucker)共同推导的关于不等式约束条件下的非线性最优必要条件(库恩-图克定理)以及卡尔曼(R.E.Kalman)的关于随机控制系统最优滤波器等。

现代控制理论的形成与发展和数字计算机的飞速发展及广泛应用是密不可分的。作为经典控制理论技术基础的模拟技术,由于运算精度及运算功能上的限制,已经逐渐被高速电子计算机所代替。由于数字计算机运算速度的提高、存储容量的扩大、体积的缩小以及软件的广泛应用,数字计算机不仅是控制系统分析与设计的强有力工具,并且逐渐成为自动控制的主要技术工具之一。由于计算机"在线"参与控制,这样,既不要求把控制器归结为简单的校正网络,也不一定要求有封闭形式的解析解,因此,使得最优控制的工程实现有了可能。反过来又提出了许多新的理论问题,导致诸如最优控制的直接和间接计算方法的大批研究成果的出现,进一步推动了控制理论的发展。

50多年来,现代控制工程和现代控制理论吸收现代技术进步和现代数学的一切成就,又得到了很大发展,并渗透到生产、生活、国防乃至规划、管理等一切领域,发挥愈来愈大的作用,在此期间最优控制无论在深度和广度上都有了很大发展,比如分布参数的最优控制、随机最优控制、自适应控制、大系统的最优控制和微分对策等。其中有大量的工程和理论问题尚待解决。毫不夸张地说,最优控制问题仍是一个十分活跃的研究领域。

1.2 最优化问题

1.2.1 最优化问题的数学描述

所谓最优化问题,就是寻找一个最优控制方案或最优控制规律,使所研究的对象(或系统)能最优地达到预期的目标。例如,在控制发射 N 级火箭时,如何规划各级火箭的质量使得火箭的总质量为最小;或在雷达高炮随动系统中,当发现敌机后,如何以最快的速度跟踪目标而将敌机击落。也就是说,最优化问题就是依据各种不同的研究对象以及人们预期要达到的目的,寻找出一个最优控制规律或设计出一个最优控制方案或最优控制系统。

最优化技术是研究和解决最优化问题的一门学科,它研究和解决如何从一切可能的方案中寻找最优的方案。也就是说,最优化技术是研究和解决如何将最优化问题表示为

数学模型，以及如何根据数学模型尽快求出其最优解的两大问题。一般而言，用最优化方法解决实际工程问题可分为以下几步进行：

(1) 根据所提出的最优化问题，建立最优化问题的数学模型，确定变量，给出约束条件和目标函数(或性能指标)；

(2) 对所建立的模型进行具体分析和研究，选择合适的最优化求解方法；

(3) 根据最优化方法的算法，列出程序框图和编写程序，用计算机求出最优解，并对算法的收敛性、通用性、简便性、计算效率及误差等做出评价。

例 1－1　国民收入的最优积累率问题。

在社会主义计划经济中，国民收入可分为消费基金和积累基金两部分，而积累基金与国民收入的比值，称为国民收入的积累率，即

$$\text{积累率} = \frac{\text{积累基金}}{\text{国民收入}} \times 100\% \tag{1-1}$$

积累率可以由政府有计划地进行控制，控制得好，可以促进国民收入和消费水平的不断提高，经济快速增长。但积累率过高，则影响劳动积极性，经济增长和人民生活水平反而下降。因此，如何选择合理的积累率，就是一个值得深入研究和讨论的最优化问题。

单位时间内国民收入增长额可表示为

$$\dot{x}(t) = \alpha(t)x(t)u(t) \tag{1-2}$$

式中，$x(t)$为时刻 t 的国民收入；$u(t)$为时刻 t 的积累率，它是一个可以控制的变量；$\alpha(t)$为时刻 t 的积累效果系数，表示单位积累基金在单位时间内产生的国民收入的增长额。

积累效果系数 $\alpha(t)$主要受积累率 $u(t)$的影响。根据我国历史统计资料分析，$\alpha(t)$与 $u(t)$近似呈直线关系，即

$$\alpha(t) = a - bu(t) \tag{1-3}$$

式中，a，b 为常数。

将式(1－3)代入式(1－2)中，则有

$$\dot{x}(t) = [a - bu(t)]x(t)u(t) \tag{1-4}$$

由于国民收入应为正的增长，即 $\dot{x}(t) \geqslant 0$，由式(1－2)可知，此时 $\alpha(t) \geqslant 0$。于是，由式(1－3)和积累率的定义有

$$0 \leqslant u(t) \leqslant \frac{a}{b} \tag{1-5}$$

可以根据不同的具体要求，建立不同的目标函数：

(1) 若要求在考虑的计划时间$[t_0, t_f]$内，使国民收入的增长总额最大，则目标函数可表示为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_f} [a - bu(t)]u(t)x(t)\mathrm{d}t \tag{1-6}$$

(2) 若要求在考虑的计划时间$[t_0, t_f]$内，使消费基金的增长最大，以最大限度地提高人民的物质文化生活水平。根据消费基金等于国民收入减去积累基金的关系，则目标函

数可表示为

$$J=\int_{t_0}^{t_f}[1-u(t)][a-bu(t)]u(t)x(t)\mathrm{d}t \tag{1-7}$$

国民收入的最优积累率问题，就是如何选择满足式(1－5)的容许控制，使所建立的目标函数式(1－6)或式(1－7)取得极大值。

例 1－2 关于飞船的月球软着陆问题。

飞船靠其发动机产生一与月球重力方向相反的推力 $u(t)$，赖以控制飞船实现软着陆(落到月球上时速度为零)。问题要求选择一最好发动机推力 $u(t)$程序，使燃料消耗最少。

设飞船质量为 $m(t)$，它的高度和垂直速度分别为 $h(t)$和 $v(t)$，月球的重力加速度可视为常数 g，飞船自身质量及所带燃料质量分别是 M 和$F(t)$。

飞船自某一时间 $t=0$ 时刻开始进入着陆过程，其运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{h}(t)&=v(t)\\ \dot{v}(t)&=\frac{u(t)}{m(t)}-g\\ \dot{m}(t)&=-ku(t)\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

式中，k 是一常数。

要求控制飞船从初始状态

$$h(0)=h_0,v(0)=v_0,m(0)=M+F(0) \tag{1-9}$$

出发，在某一终端 t_f 时刻实现软着陆，即

$$h(t_f)=0,v(t_f)=0 \tag{1-10}$$

控制过程中推力 $u(t)$不能超过发动机所能提供的最大推力 $u_{\max}$，即

$$0\leqslant u(t)\leqslant u_{\max} \tag{1-11}$$

满足上述约束，使飞船实现软着陆的推力 $u(t)$程序不止一种，其中消耗燃料最少的才是问题所要求的最好推力程序，即问题可归纳为求

$$J=m(t_f) \tag{1-12}$$

最大的数学问题。

飞船的月球软着陆的最优化问题是在满足方程式(1－8)和式(1－11)的推力约束条件下，寻求发动机推力的最优变化律 $u^*(t)$，使飞船由已知初始状态转移到要求的终端状态，并使性能指标 $J=m(t_f)=\max$，从而使飞船软着陆过程中燃料消耗量最少。显然可见，这个最优化问题是一个最少燃料消耗的最优控制问题。

通过以上两例分析可知，凡属最优化问题的数学描述，应包含以下几方面的内容。

1．*受控系统的数学模型*

受控系统的数学模型即系统的微分方程，它反映了动态系统在运动过程中所应遵循的物理规律或化学规律。在集中参数情况下，动态系统的运动规律可以用一组一阶常微分方程及状态方程来描述

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t] \tag{1-13}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)$为 n 维状态向量；$\boldsymbol{u}(t)$为 r 维控制向量；$f[\cdot]$为 $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$和 t 的n 维函数向量；t 为实数自变量。

式(1－13)不仅能概括式(1－8)所属飞船的运动方程，而且它还可以概括一切具有集中参数的受控系统数学模型。如定常非线性系统、线性时变系统和线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)]$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

都是式(1－13)系统的一种特例。

2．边界条件与目标集

动态系统的运动过程，是系统从状态空间的一个状态到另一个状态的转移，其运动轨迹在状态空间中形成曲线 $\boldsymbol{x}(t)$。为了确定要求的曲线 $\boldsymbol{x}(t)$，需要确定曲线的两点边界值如式(1－9)和式(1－10)。因此，要求确定初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$和终端状态 $\boldsymbol{x}(t_f)$，这是求解状态方程式(1－13)必需的边界条件。

在最优化问题中，初始时刻 t_0 和初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$通常是已知的，但是终端时刻 t_f 和终端状态 $\boldsymbol{x}(t_f)$可以固定、也可以自由。

一般地说，对终端的要求可以用如下的终端等式或不等式约束条件来表示，即

$$N_1[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]=0 \quad 或 \quad N_2[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]\leqslant 0 \tag{1-14}$$

它们概括了对终端的一般要求。实际上，终端约束规定了状态空间的一个时变或非时变的集合，此种满足终端约束的状态集合称为目标集，即为 M，并可表示为

$$M = \{\boldsymbol{x}(t_f):\boldsymbol{x}(t_f)\in \boldsymbol{R}^n, N_1[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]=0 \quad 或 \quad N_2 = [\boldsymbol{x}(t_f),t_f]\leqslant 0\}$$

为简单起见，有时终端约束式(1－14)笼统地称为目标集。

3．容许控制

控制向量 $\boldsymbol{u}(t)$的各个分量 $u_i(t)$往往是具有不同物理属性的控制量。在实际控制问题中，大多数控制量受客观条件限制只能取值于一定范围，如式(1－11)。这种限制范围，通常可用如下不等式的约束条件来表示

$$0\leqslant \boldsymbol{u}(t)\leqslant \boldsymbol{u}_{\max} \tag{1-15}$$

或

$$|u_i|\leqslant m_i, i = 1,2,\cdots,r \tag{1-16}$$

式(1－16)表示一个控制空间 $\boldsymbol{R}^r$ 中包括原点在内的超方体；式(1－15)和式(1－16)都规定了 $\boldsymbol{R}^r$ 空间中的一个闭集。

由控制约束条件所规定的点集称为控制域，并记为 $\boldsymbol{R}_u$。凡在闭区间$[t_0,t_f]$上有定义，且在控制域 $\boldsymbol{R}_u$ 内取值的每一个控制函数 $\boldsymbol{u}(t)$均成为容许控制，并记为 $\boldsymbol{u}(t)\in \boldsymbol{R}_u$。

通常假定容许控制 $\boldsymbol{u}(t)\in \boldsymbol{R}_u$ 是一有界连续函数或者是分段连续函数。

需要指出，控制域为开集或闭集，其处理方法有很大差别。后者的处理较难，结果也很复杂。

4．性能指标(目标函数)

为了实现动态过程中状态从给定初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$转移到终端状态 $\boldsymbol{x}(t_f)$，可通过不同

的控制律 $u(t)$来实现，而各种控制效果的好坏，可通过能否达到所规定的性能指标来判断。对于最优化问题的性能指标，其内容与形式主要取决于最优化问题所完成的任务。例如，在关于飞船的月球软着陆问题中，式(1－12)表示使飞船软着陆过程中燃料消耗量最少的目标函数。

1.2.2 最优化问题的分类

根据系统的结构性能和完成的任务各不相同，最优化问题通常可以按下述情况进行分类。

1. 单变量函数与多变量函数最优化问题

如果系统中需要寻优的变量仅有一个，则为单变量函数的最优化问题。如果系统中需要寻优的变量多于一个，则为多变量函数的最优化问题。尽管实际生产过程中往往需要寻优的变量是很多的，即为多变量函数的最优化问题，但对于不少多变量的优化问题，往往归结为反复地求解一系列单变量函数的最优值，因此，单变量函数的最优化方法是求解最优化问题的基本方法。

2. 无约束与有约束最优化问题

如果控制变量的取值范围不受限制，则为无约束的最优化问题。求无约束函数的极值时，问题的最优解即为目标函数的极值。但是，在实际的控制问题中，控制变量的取值范围总是会受到限制的，也就是说，总是要在一定的约束条件下来研究目标函数的最优化问题，这为有约束的最优化问题。约束条件可分为等式约束条件和不等式约束条件。等式约束条件上各点称为可行解。等式约束曲线表示可行解域。满足不等式约束条件的区域范围称为解的可行域。在该域内的解称为可行解，而可行解的数目会有无限多个，其中必有一个为最优解。

3. 确定性和随机性最优化问题

在确定性最优化问题中，每个变量的取值是确定的、可知的。在随机性最优化问题中，某些变量的取值是不确定的，但可根据大量的实验统计，知道变量取某值服从一定的概率分布规律。例如，电子系统的可靠性问题是一个随机性最优问题，这是因为人们无法确切知道电子系统中某些组成器件或部件的失效时间，而只能根据经验或统计资料，掌握其概率分布规律。解决随机性最优化问题一般可采用卡尔曼滤波。对于某些能表示成数学规律模型的随机性最优问题，可以和确定性最优问题一样采用规划方法求解，这称为随机规划。

4. 线性和非线性最优化问题

如果目标函数和所有的约束条件式均为线性，即它们是变量的线性函数，则称为线性最优化问题或线性规划问题。如果目标函数或约束条件式(即使只是部分约束条件式)中任一个是变量的非线性函数，则称为非线性最优化问题或非线性规划问题。线性最优化问题可采用线性规划方法解决。非线性最优化问题通常采用非线性规划方法来解决，非线性最优化问题的求解方法大致可分为间接法(解析法)和直接法(数值解法)。事实上，线性规划问题是非线性规划问题的特殊情况。显然，求解非线性规划问题要比求解线性规划问题困难得多。因此，在实际的求解过程中，往往可用线性函数来近似非线性规划问题中的非线性函数，即非线性函数的线性化。这样，就可以用线性规划方法来求解非线性

规划问题。当然，这种线性近似法只能在局部范围内适用，但可以采用一连串的线性规划去近似求解一个非线性规划问题，称为近似规划。

5. 静态和动态最优化问题

控制系统最优化问题一般可分为静态最优化（参数最优化）问题和动态最优化（最优控制）问题。

静态最优化问题是指在稳定工况下实现最优化，它反映系统达到稳态后的静态关系。系统中各变量不随时间 t 变化，而只表示对象在稳定工况下各参数之间的关系，其特性用代数方程来描述。大多数的生产过程受控对象可以用静态最优化问题来处理，并且具有足够的精度。静态最优化问题一般可用一个目标函数 $J=f(\boldsymbol{x})$ 和若干个等式约束条件或不等式约束条件来描述。要求在满足约束条件下，使目标函数 J 为最大或最小。

动态最优化问题是指系统从一个工况变化到另一个工况的变化工程中，应满足最优要求。在动态系统中，所有的参数都是时间 t 的函数，其特性可用微分方程或差分方程来描述。动态最优控制要求寻找出控制作用的一个或一组函数而不是一个或一组数值，使性能指标在满足约束条件下为最优值。这样，目标函数不再是一般函数，而是函数的函数，即目标函数是一个泛函。因此，在数学上这是属于泛函求极值的问题。

静态最优化问题可以采用线性规划和非线性规划方法（包括间接法和直接法）来解决。而解决动态最优化问题则采用经典变分法、极大（极小）值原理、动态规划和线性二次型最优控制法等。对于动态系统，当控制无约束时，采用经典变分法。当控制有约束时，采用极大值原理或动态规划。如果系统是线性的，性能指标是二次型形式的，则可采用线性二次型最优控制问题求解。

应当指出，在求解动态最优化问题中，若将时域 $[t_0, t_f]$ 分成许多有限区域段，在每一分段内，将变量近似看做常量，那么动态最优化问题可近似按分段静态最优化问题处理，这就是离散时间最优化问题，显然分段越多，近似的精确程度越高。所以静态最优和动态最优问题不是截然分立，毫无联系的。如果动态最优问题能够表示成线性规划的数学模型，则完全可以用线性规划方法来求解动态最优问题。

1.2.3 最优化问题的求解方法

最优化问题的数学模型建立后，主要问题是如何通过不同的求解方法解决寻优问题。一般而言，最优化问题的求解方法大致可分成以下几类。

1. 间接法（解析法）

对于目标函数及约束条件具有简单而明确的数学表达式的非线性最优化问题，通常可采用间接法来解决。间接法（又称解析法）的求解方法是先按照函数极值的必要条件，用数学分析方法（求导或变分法）求出其解析解，然后按照充分条件或问题的实际物理意义间接地确定最优解。这类方法主要用来解决动态最优化问题。其中经典变分法用来求解无约束的动态最优化问题；极大（极小）值原理和动态规划主要用于求解有约束的动态最优化问题。另外，经典微分法可用来求解静态最优化问题。

2. 直接法（数值解法）

对于目标函数较为复杂或无明确的数学表达式或无法用解析法求解的非线性最优化问题，通常可采用直接法来解决。直接法（又称数值解法）的基本思想，就是用直接搜索方

法经过一系列的迭代以产生点的序列，使之逐步接近到最优点。直接法常常是根据经验或实验而得到的，直接法可以分为函数逼近法、区间消去法和爬山法。函数逼近法（又称插值法或曲线拟合法）是在若干点上估计出目标函数值，给出目标函数的近似曲线，再用区间消去法寻优。区间消去法主要包括菲波纳奇（Fibonacci）法和黄金分割法（又称 0.618 法）。区间消去法实质上是在搜索过程中不断缩小最优点存在的区域，即通过搜索区间的逐步缩小来确定最优点。函数逼近法和区间消去法对单变量无约束函数的最优化问题的求解十分有效，而爬山法主要用于解决多变量无约束函数的最优化问题。爬山法是根据已求得的目标函数值或利用已有的信息，通过空间点的移动和比较（进一步选择搜索方向和迭代步长），逐步改善目标函数，最后达到最优点。爬山法的搜索过程实质上是由选定搜索的方向和在确定的方向上爬山搜索两部分组成，由于所选取的搜索方向和爬山前进的方式不同，可以构成各种不同的爬山法，例如变量轮换法、步长加速法、方向加速法、单纯形法和随机搜索法等。

3. *以解析法为基础的数值解法*

以解析法为基础的数值解法是以梯度法为基础的一种直接法，它是一种解析与数值计算相结合的方法。这类方法主要用于多变量的寻优问题。其中最速下降法、共轭梯度法、牛顿法与拟牛顿法、变尺度法和牛顿－高斯最小二乘法等适用于多变量无约束的最优化问题。解决多变量有约束的最优化问题通常也采用以解析法为基础的数值解法，这类方法很多，大致可分为以下 3 种类型：一是将有约束的最优化问题化为一系列无约束的最优化问题，然后采用无约束最优化方法来求解，这种方法称为变换算法或序列无约束极小化方法，如拉格朗日乘子法和惩罚函数法；二是采用一系列线性或二次规划问题的解来逼近原非线性约束问题的解，这种方法称为线性近似化技术，如序列线性规划化、割平面法和序列二次规划化；三是直接处理约束条件，研究在约束边界处如何搜索以获得使目标值逐步改善的可行点列，最后趋近约束问题的极小值点，这种方法称为可行方向法（如卓坦狄克（Zoutendijk）可行方向法）、梯度投影法和简约梯度法。

此外，解决多变量有约束的最优化问题还有不需要求目标函数导数而只利用目标函数值的直接方法，如复合形法等。

对于以上 3 种类型最优化问题的求解方法可详细描述如下：

- (1) 间接法（解析法）
  - 无约束
    - 经典微分法
    - 经典变分法
  - 有约束
    - 极大值原理
    - 动态规划
- (2) 直接法（数值解法）
  - 函数副近法（插值法或曲线拟合法
  - 区间消去法
    - 菲波纳奇法
    - 黄金分割法（0.618 法）
  - 爬山法
    - 变量轮换法
    - 步长加速法
    - 方向加速法
    - 单纯形法
    - 随机搜索法

- (3) 以解析法为基础的数值解法
  - 无约束梯度法
    - 最速下降法
    - 共轭梯度法
    - 牛顿法与拟牛顿法
    - 变尺度法
    - 牛顿－高斯最小二乘法
  - 有约束梯度法
    - 可行方向法
    - 梯度投影法
    - 简约梯度法
  - 化有约束为无约束问题
    - 序列无约束极小化法
    - 线性近似化法

1.3 最优控制问题

所谓最优控制问题，就是指在给定条件下，对给定系统确定一种控制规律，使该系统能在规定的性能指标（目标函数）下具有最优值。也就是说，最优控制就是要寻找容许的控制作用（规律），使动态系统（受控对象）从初始状态转移到某种要求的终端状态，且保证所规定的性能指标（目标函数）达到最大（小）值。

最优控制问题就其本质来说，乃是一变分学问题，而经典变分理论只能解决一类简单的最优控制问题。为了满足工程实践的需要，20 世纪 50 年代中期，出现了现代变分理论，其中最常用的方法是极大值原理和动态规划，它们为最优控制问题做了奠基性的工作。最优控制在被控对象参数已知的情况下，已经成为设计复杂系统的有效方法之一。

1.3.1 最优控制问题的性能指标

从给定初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 到目标集 $\boldsymbol{M}$ 的转移可通过不同的控制律 $\boldsymbol{u}(t)$ 来实现，为了在各种可行的控制律中找出一种效果最好的控制，这就需要建立一种评价控制效果好坏或控制品质优劣的性能指标函数。性能指数的内容与形式，取决于最优控制问题所完成的任务，不同的最优控制问题，有不同的性能指标，即使是同一问题其性能指标也可能不同。尽管不能为各种各样的最优控制问题规定一个性能指标的统一格式，但是通常情况下，对连续系统时间函数的最优控制问题的性能指标可以归纳为以下 3 种类型。

1．综合型或波尔扎（Bolza）型性能指标

$$J[\boldsymbol{u}(\cdot)] = \Phi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]\mathrm{d}t \tag{1-17}$$

式中，L 为标量函数，它是向量 $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$ 和 t 的函数，称为动态性能指标；Φ 为标量函数，与终端时间 t_f 及终端状态 $\boldsymbol{x}(t_f)$ 有关，称为终端性能指标；J 为标量函数，对每个控制函数都有一个对应值；$\boldsymbol{u}(\cdot)$ 表示控制函数整体，而 $\boldsymbol{u}(t)$ 表示 t 时刻的控制向量。

式（1－17）类型的性能指标称为综合型或波尔扎问题，它可以用来描述具有终端约束下的最小积分控制，或在积分约束下的终端最小时间控制。

2．积分型或拉格朗日（Lagrange）型性能指标

若不计终端性能指标，则式（1－17）成为如下形式

$$J[\boldsymbol{u}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]\mathrm{d}t \tag{1-18}$$

这时的性能指标称为积分型或拉格朗日问题，它更强调系统的过程要求。在自动控制中，要求调节过程的某种积分评价为最小(或最大)就属于这一类问题。

3. 终端型或麦耶尔(Mager)型性能指标

若不计动态性能指标，式(1-17)成为如下形式

$$J[\boldsymbol{u}(\cdot)] = \Phi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] \tag{1-19}$$

这时的性能指标称为终端型或麦耶尔问题。这要求找出使终端的某一函数为最小(或最大)值的 $\boldsymbol{u}(t)$，终端处某些变量的最终值不是预先规定的。

以上讨论表明，所有最优控制可以用上述 3 种类型的性能指标之一来表示，而综合性问题是更普遍的情况。通过一些简单的数学处理，即引入适合的辅助变量，它们三者可以互相转换。

在特殊情况下，可采用如下的二次型性能指标

$$J[\boldsymbol{u}(\cdot)] = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t$$

式中，$\boldsymbol{F}$ 为终端加权矩阵；$\boldsymbol{Q}(t)$为状态加权矩阵；$\boldsymbol{R}(t)$为控制加权矩阵。

综上所述，性能指标与系统所受的控制作用和系统的状态有关，但是它不仅取决于某个固定时刻的控制变量和状态变量，而且与状态转移过程中的控制向量 $\boldsymbol{u}(t)$和状态曲线 $\boldsymbol{x}(t)$有关，因此性能指标是一个泛函。

1.3.2 最优控制问题的提法

最优控制是一门工程背景很强的学科分支，其研究的问题都是从大量实际问题中提炼出来的，它尤其与航空、航天、航海的制导、导航和控制技术密不可分，由于这些领域拥有最先进的计算机，使最优控制有条件首先在这些领域得到应用和发展。但是近 20 年来，随着计算机性能不断提高，小型化和价格大幅度下降，最优控制已广泛应用于工业过程、交通运输、经济管理、生态环境、生物医学等领域，并得到了很大的发展。

例 1-3 升降机的最速升降问题。

将升降机简化成一个内部带控制器的物体 M，如图 1-1 所示。控制器可以产生一个作用力 $u(t)$，控制物体 M 的上下运动。由于作用力的大小有限，所以 $u(t)$满足 $u(t)\leqslant k$，其中，k 为常数。

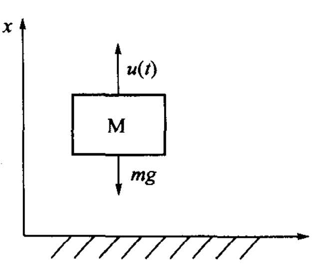

图 1-1 物体升降运动

已知 M 在 $t=t_0$ 时离地面的高度为 $h(t_0)$，垂直运动的速度为 $v(t_0)$。寻找作用力 $u(t)$的最优变化规律，使得 M 最快地到达地面，并且到达地面时的速度为零。

设物体 M 的质量为 m，则物体 M 的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2h(t)}{\mathrm{d}t^2} = u(t) - mg \tag{1-20}$$

令