21世纪高等学校教材

董梅芳 黄 骏 主编

高等数学

GAODENGSHUXUE

（上册）

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高 等 数 学

上册

董梅芳　黄骏　主编

东南大学出版社

·南京·

内容提要

本书是按照教育部提出的高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的精神，参照原国家教委批准的“高等数学课程教学基本要求”，并总结多年来东南大学高等数学课程教学改革实践编写而成的教材；本书也是教育部立项支持的项目“电子与电气信息类专业人才培养改革成果的整合与深化”的研究成果之一.

本书分为上、下两册，上册包括一元函数极限和连续、一元函数微积分学及应用、多元函数微分学及应用(含复变函数的导数、解析函数)等内容；下册包括多元函数积分学及应用、复变函数的积分、级数、微分方程等内容. 另外，还包括三个附录及数学实验的内容，书后附有习题参考答案.

本书可作为高等院校电类各专业及其他需要学习复变函数的工科专业的高等数学课程的教材，也可作为各专业的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/董梅芳，黄骏主编. 一南京：东南大学出版社，2002.9

ISBN 7-81089-020-4

Ⅰ.高...　Ⅱ.①董...②黄...　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第065046号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号　邮编210096)

出版人：宋增民

江苏省新华书店经销　　华东有色地研所印刷厂印刷

开本：700mm×1000mm　1/16　　印张：24　字数：482千字

2002年9月第1版　2002年9月第1次印刷

定价：48.00元(上、下册)

前 言

本书是按照教育部提出的高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的精神，参照原国家教委批准的高等工业学校“高等数学课程教学基本要求”，并总结多年来东南大学高等数学课程教学改革的实践而编写的一本改革教材；本书也是教育部立项支持的项目“电子与电气信息类专业人才培养改革成果的整合与深化”的研究成果之一. 作为改革教材诸多模式中的一种，本书力求突出以下几点：

1）对教学内容进行了整合和改革，将复变函数的主要内容融入高等数学课程. 既注意到实分析与复分析在处理问题的思想方法上的相通之处，也强调了各自的特点，使实分析与复分析有机结合，相互呼应，相互渗透. 同时，将传统高等数学中空间解析几何的内容并入线性代数成为几何与代数课程，实行高等数学课程与几何与代数课程同步教学.

2）讲解数学内容的同时，加强对学生应用能力的培养. 注意对基本概念、基本定理和基本方法的几何背景和实际应用背景的介绍，选取与电类专业有关的例题与习题，增强学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力.

3）突出数学的基本思想和基本方法，削减次要内容. 在一元函数积分学部分，将不定积分与定积分相结合，以定积分为主线，不定积分主要介绍换元法和分部积分法两种基本积分法，淡化不定积分的计算技巧，删去了有理函数积分法等内容.

4）为学生学习现代数学的其他内容提供展示的窗口及利用计算机工具“用数学”提供延伸的接口. 尽量使用现代数学的语言、术语和符号；简单介绍偏微分方程中的分离变量法；增加了 Matlab 这一数学软件的介绍和利用 Matlab 进行数学实验的内容等.

此外，在习题的编排上，除每小节后给出一定量的练习外，每章后面设有总习题，其中的习题包括综合题、有一定难度的题和部分需上机计算的题，教师可根据学生的实际情况选用.

本书分为上、下两册，上册包括一元函数极限与连续、一元函数微积分学及应用、多元函数微分学及应用（含复变函数的导数、解析函数）等内容，下册包括多元函数积分学及应用、复变函数的积分、级数、微分方程等内容. 本书主要面向高等院校的电类专业和需要学习复变函数的工科专业.

本书的第1,2,3章由黄骏老师编写，第4,7,8章由董梅芳老师编写，第5,6章由黄安才老师编写，第9,10章由毛惠良老师编写，第11章由罗庆来老师、宋柏生

老师编写，周后型老师编写了数学实验的内容.全书由董梅芳和黄骏老师统稿.

在本书的编写过程中，得到了东南大学教务处及应用数学系老师的大力支持，应用数学系的管平教授对本教材的编写提出了许多有益的意见和建议，在此，我们表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，书中不妥与错误之处在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正.

编　者

2002.5

目　录

第1章　函数

函数是微积分的研究对象，是在自然科学、工程技术以至人文社会科学中广泛应用的数学概念.为准确理解函数概念，集合、映射与空间的基本知识是不可缺少的.本章将对中学已学过的集合、映射等知识作简要的复习和适当的补充.

1.1　点集

本节介绍实数集 $\mathbf{R}$，n 维实空间 $\mathbf{R}^n$ 及复数集 $\mathbf{C}$ 的基本概念、性质及基本运算.

1.1.1　集合的概念及简单运算

集合论的语言无疑是现代数学中最通用的语言，然而要给集合下一个严格的数学定义却非常困难，通常我们所称的**集合**(简称**集**)是指具有某种确定性质的对象的全体，组成集合的对象称为集合的**元素**(简称**元**).

习惯上，用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素，就说"a 属于 A"，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说"a 不属于 A"，记作 $a\notin A$.含有有限多个元素的集合称为**有限集**，不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$；既不是有限集也不是空集的集合称为**无限集**.习惯上，全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$；全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q}=\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}_+,p\text{ 与 }q\text{ 互质}\}$$

全体复数的集合记作 $\mathbf{C}$，即

$$\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{R},\mathrm{i}^2=-1\}$$

我们这里用加下标符号"+"表示集合内排除0的集，例如，$\mathbf{N}_+$ 表示正整数集，$\mathbf{R}_+$ 表示非零实数集.

设 A,B 是两个集合，若 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)，读作"A 含于 B"(或"B 包含 A")；如集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$；若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$.

规定空集是任何集合的子集，即对任何集合 A，都有 $\varnothing \subseteq A$. 显然有 $A \subseteq A$. 很容易看出，$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

集合的基本运算有三种：并、交、差.

设 A，B 是两个集合，由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**（**简称并**），记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**（**简称交**），记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A \setminus B$（简称**差**），即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

特别，若 $B \subseteq A$，则称差 $A \setminus B$ 为 B 关于 A 的**余集**或**补集**，记作 $C_A B$. 通常我们把研究某一问题时所考虑的对象的全体叫做**全集**，并用 I 表示，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集，此时称 $I \setminus A$ 为 A 的余集或补集，记作 A^c.

若 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B 不相交；若 $A \cap B \neq \varnothing$，则称 A 与 B 相交.

集合的并、交、差（补）运算满足如下运算律：

交换律　$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$；

结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

分配律　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$，
$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$；

幂等律　$A \cup A = A$，$A \cap A = A$；

吸收律　$A \cup \varnothing = A$，$A \cap \varnothing = \varnothing$，
$A \cup B = B$，$A \cap B = A$（其中 $A \subseteq B$）
$A \cup (A \cap B) = A$，$A \cap (A \cup B) = A$；

对偶律　$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

以上这些运算律都容易依据集合相等的定义验证.

集合的并与交的定义及对偶律都可推广到有限多个或无限多个集合的情形.

设 A，B 是两个非空集合，$x \in A$，$y \in B$，有序的一对元素 x，y 称为一个**序偶**，记作 (x, y). 两个序偶 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 相等，当且仅当 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$. 由集合 A，B 中所有元素构成的序偶组成的集合，称为 A 与 B 的**笛卡儿**（Descartes）①**积**，简称为**直积**，记作 $A \times B$，即

① Descartes (1596—1650)　法国数学家、物理学家、哲学家，在科学思想方法和认识论方面作出了重大贡献.

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

例如,设 $A = [-1,1], B = [-1,1]$,则 $A \times B = \{(x,y) \mid x \in [-1,1], y \in [-1,1]\}$ 表示平面上以点$(-1,1),(1,1),(1,-1),(-1,-1)$为顶点的正方形;$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$则表示 xy 平面上全体点的集合,通常记为 $\mathbf{R}^2$. 集合的直积运算可推广到有限多个和无限多个集合的情形,例如记 $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, \cdots, n\}$.

1.1.2 实数集

实数集 $\mathbf{R}$ 是我们特别关注的数集. 在研究实数集之前,我们先简要复习有理数集 $\mathbf{Q}$ 的基本性质.

任何一个有理数都可以在数轴上找到一个点与之对应,与有理数对应的点称为有理点.

有理数集 $\mathbf{Q}$ 具有下列性质:

1) 关于有理运算的封闭性　对有理数进行加减乘除(除法要求分母不为零)四则运算(简称为有理运算)后仍然是有理数.

2) 有序性　任意给定两个有理数 $a, b \in \mathbf{Q}$,下列三种关系必有一种且仅有一种成立:

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b$$

3) 稠密性　任意两个不相等的有理数之间必存在一个有理数. 若 $a, b \in \mathbf{Q}$,且 $a \neq b$,则 $c = \dfrac{a+b}{2} \in \mathbf{Q}$,且 c 介于 a, b 之间. 由此可得,任意两个有理数之间必有无穷多个有理数.

有理数集在数轴上的稠密性直观上反映了有理点密集地分布在整个数轴,但它们之间是否还存在空隙呢?例如,边长为 1 的正方形的对角线长为$\sqrt{2}$,根据定义可以证明$\sqrt{2}$ 不是一个有理数,它所对应的点就不是有理点,这说明数轴上除了有理点外还有许多空隙,这些空隙所对应的数称为无理数. 有理数与无理数统称为实数,实数布满了整个数轴而无空隙. 实数集 $\mathbf{R}$ 除了满足对有理运算的封闭性、有序性和稠密性等有理数集 $\mathbf{Q}$ 满足的性质以外,还有一个与 $\mathbf{Q}$ 不同的独特性质:实数集与数轴上的点存在一一对应关系,即给定一个实数,数轴上就有惟一的一个点与它对应;反之,数轴上的任意一点也一定对应着一个实数. 今后我们将经常利用数轴上的点表示实数,将点和实数统一起来,不加区别. 实数的这种性质称为实数的连续性或完备性.

确界概念及确界存在定理是刻画实数完备性的重要概念和定理. 为此,首先引入有界数集的概念.

定义 1　设 $A \subset \mathbf{R}$,且 $A \neq \varnothing$,若存在 $L \in \mathbf{R}$,使得对任意 $x \in A$,都有 $x \leqslant$

L,则称 A **有上界**(或**上有界**),称 L 为 A 的一个**上界**.类似可给出 A **有下界**(或**下有界**)的定义.若 A 既有上界又有下界,则称 A **有界**,否则,称 A **无界**.

显然,A 有界当且仅当存在$M \in \mathbf{R}$,使得任意 $x \in A$,都有 $|x| \leqslant M$.有上界(下界)的实数集的上界(下界)不是惟一的,同样,有界数集的界也不是惟一的.

例 1 $A = \{x \mid x = \sin t, -\infty < t < +\infty\}$是一个有界数集,$L = 1$是它的一个上界,$l = -1$是它的一个下界.任何大于1的数也都是它的上界,任何小于-1的数也都是它的下界.因而它的上界和下界都有无穷多个。

显然,任何一个有上界(下界)的数集都有无穷多个上界(下界).

如果数集 A 有上界,那么它的无穷多个上界中是否一定存在最小的上界,具有特别重要的意义.这里所谓 A 的最小上界s,有两层含义:首先,s 应当是A 的一个上界,即对所有 $x \in A$,都有 $x \leqslant s$;其次,任何小于 s 的数都不是A 的上界,即 s 是A 的所有上界中最小的一个.用精确的数学语言表述,就是对无论多么小的 $\varepsilon > 0$,都能找到 $x_0 \in A$,使得 $x_0 > s - \varepsilon$.由此得到如下定义:

定义 2(上确界) 设 $A \subset \mathbf{R}$,且 $A \neq \varnothing$,若 $\exists s \in \mathbf{R}$ 满足:(1) $\forall x \in A$,都有 $x \leqslant s$;(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$,使 $x_0 > s - \varepsilon$,则称 s 是A 的**上确界**,记作 **supA**.其中符号“$\forall$”表示“对任给的”,“对所有的”;符号“$\exists$”表示“存在”,“有”.

类似地可以定义 A 的**下确界**,记作 **infA**.

容易证明,如果一个数集存在上确界(下确界),那么它必定是惟一的.

对上面提到的数集 $A = \{x \mid x = \sin t, -\infty < t < +\infty\}$,由定义 2 易知,$\sup A = 1, \inf A = -1$.设 $B = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\}$,可以证明 $\sup B = 1, \inf B = \frac{1}{2}$.设 $C = \{1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots\}$,易见 $\inf C = 1$,但 C没有上界,因而没有上确界,这时我们规定 $\sup C = +\infty$,同样对于没有下界的数集,规定其下确界为 $-\infty$.对于有限数集 A,其最大数就是上确界,最小数就是下确界.对于无限数集,则未必存在上(下)确界,如上面定义的数集 C 就没有上确界.即使数集 A 存在上(下)确界,此上(下)确界可能属于 A,也可能不属于 A.如上面定义的数集 A,有 $\inf A \in A$, $\sup A \in A$,但对于集合 B, $\sup B \notin B$.当集合 A 的上(下)确界属于 A 时,称为上(下)确界可达到,此上(下)确界必是 A 的最大(最小)数.我们不加证明地给出下列确界存在定理.

定理 1 有上(下)界的非空实数集 A 必有上(下)确界.

微积分中最常用的一类实数集是区间,设 $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$,集$\{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$称为**开区间**,记作$(a,b)$,即$(a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$. a,b 称为区间的**端点**,它们均不属于开区间(a,b).可类似地定义以 a,b 为端点的闭区间,半开半闭区间等:

闭区间 $[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;

半开半闭区间　$[a,b) = \{x \in \mathbf{R} | a \leqslant x < b\}$;

$(a,b] = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leqslant b\}$.

以上这些区间称为**有限区间**，它们都可以用数轴上长度有限的线段表示，图1-1(a)、(b) 分别表示闭区间$[a,b]$和开区间(a,b). 此外，还有**无限区间**，如$[a,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} | a \leqslant x < +\infty\}$，$(-\infty,b) = \{x \in \mathbf{R} | -\infty < x < b\}$，$(-\infty,+\infty) = \{x | x \in \mathbf{R}\}$，图 1-1(c)、(d) 分别表示区间$[a,+\infty)$ 和$(-\infty,b)$.

图 1-1

邻域也是一种常用的集合. 开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$，其中 δ 是某个正实数，称为 $\boldsymbol{x_0}$ **的** $\boldsymbol{\delta}$ **邻域**，记作 $N(x_0,\delta)$，点 x_0 称作邻域的中心，δ 叫做邻域的半径. 如果将邻域的中心去掉，得到的集合称为点 x_0 **的去心** $\boldsymbol{\delta}$ **邻域**，记作 $\mathring{N}(x_0,\delta)$，即 $\mathring{N}(x_0,\delta) = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$. 开区间$(x_0 - \delta, x_0)$ 称为 $\boldsymbol{x_0}$ **的左** $\boldsymbol{\delta}$ **邻域**，记作 $N_-(x_0,\delta)$，开区间$(x_0, x_0 + \delta)$ 称为 $\boldsymbol{x_0}$ **的右** $\boldsymbol{\delta}$ **邻域**，记作 $N_+(x_0,\delta)$.

1.1.3　$\boldsymbol{n}$ 维实空间 $\mathbf{R}^n$

在上一段中，我们已定义 $\mathbf{R}^n$ 为 n 个实数集 $\mathbf{R}$ 的 Descartes 乘积，即

$$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{n}$$
$$= \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots,n\}$$

我们称一个 $n(n \geqslant 2)$ 元有序实数组

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad x_i \in \mathbf{R}; i = 1,2,\cdots,n$$

为一个 n 维实向量.

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$，定义两个向量的**加法**为

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

定义向量 $\boldsymbol{x}$ 与数 $\alpha \in \mathbf{R}$ 的**数乘**为

$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$$

此时，由于 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$，$\alpha\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，则称 $\mathbf{R}^n$ 构成一个 n 维实向量空间.

本书经常用到的是 $n=2$ 或 $n=3$ 的情形,即二维实空间 $\mathbf{R}^2$ 和三维实空间 $\mathbf{R}^3$. 读者在理解 $\mathbf{R}^n$ 的有关概念时如发生困难,不妨视 $n=2$ 或 $n=3$.

n 维实空间 $\mathbf{R}^n$ 中的向量也称为**点**,向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量 x_i 也称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个**坐标**,向量常用小写黑体英文字母表示,如 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 等,有时也用大写英文字母 P,Q 等表示 $\mathbf{R}^n$ 中的点. 两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的距离可仿照 $\mathbf{R}^2$ 的情形定义为

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

可以证明,距离函数 ρ 满足以下性质:

1) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$(非负性);

2) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$(对称性);

3) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\leqslant\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$(三角不等式).

设 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$,则集合 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})<\delta\}$ 称为点 $\boldsymbol{a}$ 的 δ **邻域**,记为 $N(\boldsymbol{a},\delta)$. 集合 $N(\boldsymbol{a},\delta)\setminus\{\boldsymbol{a}\}$ 称为点 $\boldsymbol{a}$ 的**去心 δ 邻域**,记为 $\mathring{N}(\boldsymbol{a},\delta)$. 点集 $N(\boldsymbol{a},\delta)$ 与 $\mathring{N}(\boldsymbol{a},\delta)$ 可分别简记为 $N(\boldsymbol{a})$ 与 $\mathring{N}(\boldsymbol{a})$.

在直线 $\mathbf{R}$ 上,邻域 $N(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$;在平面 $\mathbf{R}^2$ 上,邻域 $N(\boldsymbol{a},\delta)$ 就是以 $\boldsymbol{a}$ 为圆心,δ 为半径的圆 $\{(x_1,x_2)\mid\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}<\delta\}$;在空间 $\mathbf{R}^3$ 上,邻域 $N(\boldsymbol{a},\delta)$ 就是以 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^3$ 为球心,δ 为半径的球

$$\{(x_1,x_2,x_3)\mid\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2}<\delta\}$$

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集,点 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$,若对 $\forall\delta>0$,使得 $\mathring{N}(\boldsymbol{a},\delta)\cap A\neq\varnothing$,则称 $\boldsymbol{a}$ 为 A 的**聚点**. 点 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$,若 $\exists\delta>0$,使 $N(\boldsymbol{a},\delta)\subseteq A$,则称 $\boldsymbol{a}$ 为 A 的**内点**. 如 A 的点都是 A 的内点,则称 A 是**开集**. 设 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$,若对 $\forall\delta>0$,$\mathring{N}(\boldsymbol{a},\delta)\cap A\neq\varnothing$,且 $\mathring{N}(\boldsymbol{a},\delta)\cap A^c\neq\varnothing$,则称 $\boldsymbol{a}$ 是 A 的**边界点**. A 的边界点的全体叫做 A 的**边界**,记为 ∂A.

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集,若存在原点 O 的某个 r 邻域 $N(O,r)$,使 $A\subseteq N(O,r)$,则称 A 是**有界集**,反之,则称 A 是**无界集**.

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界点集,$D=\{\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid\boldsymbol{x}\in A,\boldsymbol{y}\in A\}$ 是一个有上界的实数集,称 $\sup D$ 为点集 A 的**直径**,记为 $\mathrm{d}(A)$. 我们约定,无界点集的直径是无穷大,用记号 ∞ 表示.

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集,若 A 中的任意两点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$,都可用一条完全含在 A 中的折线相连接,则称 A 是**连通集**. $\mathbf{R}^n$ 中连通的开集称为 $\mathbf{R}^n$ 中的**区域**,区域连同其边界组成的集合称为**闭区域**.

例 2 设 $A=\{(x,y)\mid(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 且 $1\leqslant x^2+y^2<4\}$. A 的内点组成的集合为 $\{(x,y)\mid(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 且 $1<x^2+y^2<4\}$, A 的边界 $\partial A=\{(x,y)\mid(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 且 $x^2+y^2=1,x^2+y^2=4\}$, A 是一有界点集, A 的直径 $\mathrm{d}(A)=4$. A 是连通集，但 A 不是开集，当然 A 也不是区域.

例3 点集 $\{(x,y)\mid(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 且 $a^2<x^2+y^2<b^2\}$ 是区域，点集 $\{(x,y)\mid(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 且 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$ 是闭区域，它们都是有界集. 点集 $\{(x,y)\mid(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 且 $xy>0\}$ 是开集但不连通，它不是区域，且它是无界集.

习题 1.1

1. 设 A,B 分别为下列两个给定的集合:

(1) $A=\{3,6,9,12\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$,

(2) $A=\{x\mid 0\leqslant\sqrt{1-x^2}\leqslant 1\}$, $B=\{x\mid 0<x<2\}$,

(3) A 为平面上平行四边形的全体, B 为矩形的全体,

试求 $A\cup B, A\cap B, A\setminus B, B\setminus A$.

2. 已知 A 与 B 分别为下列两个给定的集合:

(1) $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 4\}\cup\{2\}$, $B=\{y\mid 1\leqslant y\leqslant 2\}$,

(2) $A=\{x\mid-\infty<x<\infty\}$, $B=\{y\mid-1\leqslant y\leqslant 1\}\cap\{y\mid \sin y=\dfrac{1}{2}\}$,

试在平面直角坐标系内画出 $A\times B$.

3. 设 $A=\{\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{4},\cdots,\dfrac{n+2}{n+1},\cdots\}$, 求 $\sup A$, $\inf A$.

4. 在数轴上画出下列点集 A 的图形，并写出 A 的全体内点的集合; A 的全体边界点的集合:

(1) $A=\{x\mid x^2-1\leqslant 0$ 且 $x\neq 0\}$;

(2) $A=\{x\mid \sin\dfrac{1}{x}=0\}$;

(3) $A=\{x\mid \sin x\cos x=0\}$.

5. 在坐标平面上画出下列点集 A 的图形，并写出 A 的全体内点的集合; A 的边界; 并判断集合 A 是否为开集，是否为区域? 是有界集还是无界集?

(1) $A=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}$;

(2) $A=\{(x,y)\mid y<x^2\}$;

(3) $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$;

(4) $A=\{(x,y)\mid x+y-1>0,2-x-y\geqslant 0\}$;

(5) $A=\{(x,y)\mid -1<x<1,y=0\}$.

1.2 函数

本节主要介绍映射与函数的基本概念及简单性质.

1.2.1 函数(映射)的概念

定义 1 设 A,B 是两个非空集合,如果存在一个对应法则 f,对每个 $x \in A$,按法则 f 在 B 中有惟一的元素 y 与之对应,则称 f 是从 A 到 B 的一个**映射**,记为

$$f:A \to B \quad 或 \quad f:x \to y = f(x), x \in A$$

并称 y 为 x 在映射 f 下的**像**,而称 x 为 y 在映射 f 下的一个**原像**(或**逆像**).集合 A 称为映射 f 的**定义域**,A 中所有元素的像所组成的集合 $f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$ 称为 f 的**值域**.

映射的概念中有两个基本要素,即定义域与对应法则.若 f,g 都是从 A 到 B 的映射,并且 $\forall x \in A$,都有 $f(x) = g(x)$,则称映射 f 与 g **相等**.

设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射,若 $f(A) = B$,即 B 中任一元素均是 A 中某个元素的像,则称 f 是 A 到 B 的**满射**;若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$,必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 是**单射**;若 f 既是单射又是满射,则称 f 为 A 到 B 的**一一映射**,或称 f 为 A 与 B 之间的一一对应.

下面介绍复合映射与逆映射的概念.

设有映射 $f:A \to B$ 与 $g:B \to C$,由

$$(g \circ f)(x) \xlongequal{\text{def}} g(f(x)) \qquad x \in A$$

所确定的映射 $g \circ f:A \to C$ 称为 f 与 g 的**复合映射**,其中 $y = f(x) \in B$ 称为**中间元**.由定义易知,任给两个映射 $f:A \to \mathbf{R}$ 与 $g:B \to \mathbf{R}$,当且仅当 $f(A) \subseteq B$ 时才存在复合映射 $g \circ f:A \to \mathbf{R}$.

两个映射的复合不难推广到有限个映射的情形,且映射的复合满足结合律,即若有映射 $f:A \to B, g:B \to C, \varphi:C \to D$,则有

$$\varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f$$

若一个定义在集合 A 上的映射将 A 中的每个元素映为自己,则称该映射为 A 上的**恒等映射**或**单位映射**,记为 I_A 或 I,即 $\forall x \in A, Ix = x$.显然恒等映射是一个一一映射.

设有映射 $f:A \to B$,若存在一个映射 $g:B \to A$,使 $g \circ f = I_A, f \circ g = I_B$,则称 f 是**可逆映射**,并称 g 是 f 的**逆映射**,记作 $g = f^{-1}$.

注意,只有一一映射才存在逆映射,因此也把一一映射称为可逆映射.由定义