北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

偏微分方程

周蜀林 编著

北京大学出版社

北京大学数学教学系列丛书

偏微分方程

周蜀林　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

偏微分方程 / 周蜀林编著. — 北京：北京大学出版社，2005.8

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 7-301-08529-X

I. 偏 ⋯ II. 周 ⋯ III. 偏微分方程 – 高等学校 – 教材 IV. O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 093114 号

书　　名:	**偏微分方程**
著作责任者:	周蜀林　编著
责 任 编 辑:	曾琬婷
标 准 书 号:	ISBN 7-301-08529-X/O · 0634
出　版　者:	北京大学出版社
地　　址:	北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:	http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
电 子 信 箱:	zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:	北京大学印刷厂
发　行　者:	北京大学出版社
经　销　者:	新华书店
	890×1240　A5　7.25 印张　207 千字
	2005 年 8 月第 1 版　2005 年 8 月第 1 次印刷
印　　数:	0001—4000 册
定　　价:	13.50 元

内容简介

本书是为高等院校基础数学和计算数学等专业的"偏微分方程"课程编写的教材.

全书共分为四章, 重点论述偏微分方程中最简单的位势方程、热方程和波动方程的基本理论和基本方法. 在各章节中, 分别介绍这些方程的初值问题和混合问题的求解方法, 同时介绍关于这些问题的一些先验估计, 从而解决这些问题解的存在性、惟一性和稳定性等关键问题.

本书的基本想法是利用数学分析 (微积分) 来讲解"偏微分方程". 本书在选材上贯彻少而精的原则, 充分反映了"偏微分方程"中的核心内容; 在内容处理上, 由浅入深, 循序渐进; 在叙述表达上, 严谨精炼, 清晰易读, 有利于教学与自学. 为了使读者理解和拓宽所学知识, 每章配置了许多富有启发性的习题, 并对难度比较大的习题给出了提示.

本书可作为高等院校基础数学、计算数学、应用数学、金融数学、统计学、物理学等专业以及相关学科的本科生教材或教学参考书, 也可供在实际工作中需要利用偏微分方程基础知识的科研人员参考.

作者简介

周蜀林　北京大学数学科学学院教授、博士生导师. 主要研究方向是偏微分方程及其应用. 对偏微分方程领域的方法应用熟练, 在退化椭圆和抛物型方程 (方程组), 完全非线性椭圆和抛物型方程方面已取得一些突出的研究成果.

序　　言

自 1995 年以来，在姜伯驹院士的主持下，北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际，创造性地贯彻教育部“加强基础，淡化专业，因材施教，分流培养”的办学方针，全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势，在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新，以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革，取得了显著的成效。2001 年，北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖，在国内外产生很大反响。

在本科教育改革方面，我们按照加强基础、淡化专业的要求，对教学各主要环节进行了调整，使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上，接受学时充分、强度足够的严格训练；在对学生分流培养阶段，我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则，大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容，为新的培养方向、实践性教学环节，以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间。这样既使学生打下宽广、坚实的基础，又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向。与上述改革相适应，积极而慎重地进行教学计划的修订，适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时。并增加了数学模型和计算机的相关课程，使学生有更大的选课余地。

在研究生教育中，在注重专题课程的同时，我们制定了 30 多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门)，重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解。

教材建设是教学成果的一个重要体现。与修订的教学计划相

配合,我们进行了有组织的教材建设,计划自1999年起用8年的时间修订、编写和出版40余种教材,这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考,记录了我们教学实践的足迹,体现了我们教学改革的成果,反映了我们对新世纪人才培养的理念,代表了我们新时期的数学教学水平。

经过20世纪的空前发展,数学的基本理论更加深入和完善,而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛,而且活跃于生产第一线,促进着技术和经济的发展,所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识。同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学,正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化,数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素,将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区,但要十分稳重和积极;人才培养无止境,既要遵循基本规律,更要不断创新。我们现在推出这套丛书,目的是向大家学习。让我们大家携起手来,为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张 继 平

2002年5月18日

于北京大学蓝旗营

前　言

本书力求利用尽可能少的大学本科的数学知识来阐述“偏微分方程”的基本理论和基本方法. 本书的基本点在于利用数学分析 (微积分) 来讲解“偏微分方程”. 读者只需要具备多元微积分的一些基础知识就能读懂本书的全部内容. 读完本书后，读者可以对偏微分方程最基本的内容有一定的了解.

本书主要介绍偏微分方程中最简单的三个方程：位势方程、热方程和波动方程. 在各章节中，分别介绍这些方程初值问题和混合问题的求解方法，同时介绍关于这些问题解的一些先验估计. 这样，也就解决了这些问题解的存在性、惟一性和稳定性问题.

本书共分四章进行编写. 第一章先介绍偏微分方程的术语和一些准备知识. 第二章主要介绍位势方程的基本理论. 由于调和函数在现代分析中占有重要的地位，该章重点介绍 n 维欧式空间 $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ 上的调和函数及其性质. 与此同时，该章还介绍位势方程的基本解和如何使用基本解来构造位势方程边值问题 Green 函数，进而得到位势方程边值问题解的表达式. 然后再介绍位势方程最重要的先验估计 —— 极值原理和最大模估计. 第三章主要介绍热方程的基本理论. 该章先重点介绍 Fourier 变换方法和分离变量法，利用 Fourier 变换方法求出热方程初值问题解的表达式，并由此导出热方程的基本解；利用分离变量法来解出一维波动方程的混合问题解的表达式，由此导出热方程相应问题的 Green 函数. 然后介绍关于热方程混合问题和初值问题的各种极值原理和最大模估计. 第四章主要介绍波动方程的基本理论. 首先介绍特征线法、球平均法和降维法，利用这些方法求解出一维、二维和三维波动方程初值问题解的表达式. 同时，将介绍波动方程最重要的概念 —— 特征线 (特征锥)，推导波动方程最基本的先验估计 —— 能量不等式. 然后利用分离变量法来求解出一维波动方程混合问题的解的表达式，进

而推导波动方程混合问题的能量不等式.

本书每一章收集了一些很有趣和富有启发性的习题. 这些习题可以帮助读者理解偏微分方程的基础理论, 牢固掌握偏微分方程的基本方法, 同时也可以作为已知的结果应用在偏微分方程的实际问题的研究中.

作者曾以本书作为北京大学数学科学学院本科生的基础课程“偏微分方程”的教材, 给北京大学数学科学学院 98 级, 99 级, 00 级和 02 级讲授过. 原教材《数学物理方程讲义》(姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐编) 是一本水平很高的书, 深受国内偏微分方程同行的喜爱. 与原教材相比, 本书需要更少的学时和更少的准备知识, 同时也增添了一些更现代化的内容. 作者重写此教材的目的是希望《偏微分方程》变得通俗易懂, 满足更多层次的读者的需要, 让更多的读者了解偏微分方程最基本的理论和方法.

在撰写本书过程中, 作者得到了北京大学数学科学学院《北京大学数学教学系列丛书》编委会和北京大学出版社的正确指导和大力支持, 也得到了本院数学系陈亚浙、吴兰成、刘西垣、刘嘉荃、王耀东、黄少云、应隆安、林源渠、郭懋正和谭小江各位教授的热情鼓励和鼎力相助, 作者在此衷心地感谢他们慷慨的帮助. 在本书的出版过程中, 责任编辑曾琬婷女士和出版社的刘勇老师倾注了很多心血, 做了大量辛勤的工作, 作者对他们表示衷心的感谢. 与此同时, 作者还要特别感谢北京大学数学科学学院 98 级, 99 级, 00 级和 02 级的同学们, 尤其是邢浩、王晓宇和黄晶等同学, 他们在学习“偏微分方程”这门课程时, 逐字逐句地阅读了本书的全部内容, 认真解答了本书的绝大部分习题, 给作者指出了原稿中的许多错误和提出了许多修改意见. 另外还要感谢首都经贸大学的李峰教授, 他在北京大学访问期间, 也帮助作者改正了原稿中的许多错误.

周蜀林

2005 年 8 月于燕园

目　　录

第一章　引　　言

§1.1　偏微分方程的基本概念

在数学分析的课程中，我们已经学习过一元函数的导数和多元函数的偏导数的概念，并了解许多与导数和偏导数有关的定理、结论. 在本书中我们将研究一些非常简单而具有很强实际背景的偏微分方程.

什么是偏微分方程呢？粗略地说，与导数有关的方程我们称之为常微分方程，而与偏导数有关的方程我们称之为偏微分方程. 更精确地，我们给出如下定义.

定义 1.1　一个偏微分方程是与一个未知的多元函数及它的偏导数有关的方程；一个偏微分方程组是与多个未知的多元函数及它们的偏导数有关的方程组.

下面我们介绍关于偏微分方程的一些术语和基本概念.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个集合， $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 Ω 上的点. 假设 $u=u(x):\Omega\to\mathbf{R}$ 是一个函数. 对固定正整数 k, 我们用符号 D^ku 表示 u 的所有 k 阶偏导数

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}},$$

其中 $(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中 k 个元素的任意排列. 因此，我们可以把 D^ku 看成是 n^k 维欧氏空间 $\mathbf{R}^{n^k}$ 上的向量，并记它的长度为

$$|D^ku|=\left(\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}\left|\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

特别地，当 $k=1$ 时，我们称 n 维向量

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

为 u 的**梯度**; 当 $k=2$ 时, 我们称 $n \times n$ 矩阵

$$D^2 u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

为 u 的 **Hessian 矩阵**. 通常记符号 $\triangle$ 为 Laplace 算子,

$$\triangle u = \mathrm{tr}\,(D^2 u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

也就是 u 的 Hessian 矩阵的迹, 即 u 的 Hessian 矩阵的对角线元素之和.

设 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \cdots, F_n) : \Omega \to \mathbf{R}^n$ 是一个向量函数, 记 $\boldsymbol{F}$ 的散度为

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

于是 $\triangle u$ 是 u 的梯度的散度, 即

$$\triangle u = \mathrm{div}\,(Du).$$

为简单起见, 我们通常也使用如下符号

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

下面我们定义偏微分方程的阶.

定义 1.2 如下形式的方程

$$F[D^k u(x), D^{k-1} u(x), \cdots, Du(x), u(x), x] = 0, \quad x \in \Omega \tag{1.1}$$

称为一个 k **阶偏微分方程**, 其中

$$F:\mathbf{R}^{n^k}\times\mathbf{R}^{n^{k-1}}\times\cdots\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\Omega\to\mathbf{R}$$

是一个给定函数, $u:\Omega\to\mathbf{R}$ 是一个未知函数. 一个偏微分方程的**阶**就是此偏微分方程中出现的未知函数的偏导数的最高次数.

我们将满足方程 (1.1) 的所有函数称为方程 (1.1) 的**解**. 如果方程 (1.1) 的解是实解析的或无穷次可微的, 那将是最理想的事. 然而在大多数情况下这不可能成立. 也许对 k 阶偏微分方程 (1.1) 来说, 希望它的解 k 次连续可微更现实. 这样, 在方程 (1.1) 中出现的函数 $u(x)$ 的所有偏导数都连续, 于是方程 (1.1) 在 Ω 上有意义.

我们用 $C(\Omega)$ 表示在 Ω 上的连续函数构成的线性空间. 对于它的元素 $u\in C(\Omega)$, 其模定义为

$$\|u\|_{C(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

我们用 $C^k(\Omega)$ 表示 Ω 上所有 k 阶偏导数都存在和连续的函数构成的线性空间, 也就是在 Ω 上 k 次连续可微的函数构成的线性空间. 对于它的元素 $u\in C^k(\Omega)$, 其模定义为

$$\|u\|_{C^k(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|+\sum_{|\alpha|=1}^{k}\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha u(x)|,$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 表示多重指标,

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\quad D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

对于函数 $u\in C(\Omega)$, 定义 u 的**支集**为所有满足 $u(x)\neq 0$ 的点集在 Ω 上的闭包, 记为

$$\operatorname{spt}u=\overline{\{x\in\Omega|u(x)\neq 0\}}.$$

我们用 $C_0^k(\Omega)$ 表示 $C^k(\Omega)$ 中具有紧支集的函数类. 同时我们用 $C^\infty(\Omega)$ 表示在 Ω 上任意阶偏导数都存在和连续的函数类, 即

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega).$$

定义 1.3 如果 $u \in C^k(\Omega)$ 满足方程 (1.1), 则我们称它是方程 (1.1) 的**古典解**.

在本书中, 如果没有特别的说明, 我们所讨论的解都是古典解. 当然我们也将在本书第四章的最后一节介绍一下广义解的概念. 现在, 在偏微分方程及其相关领域, 方程或方程组解的概念很丰富. 对于不同的方程或方程组, 人们提出不同的解的概念, 例如, 广义解、弱解、粘性解、熵解、重规范化解, 等等.

方程 (1.1) 是形式最一般的偏微分方程, 在这里我们列出一些形式较简单的偏微分方程和偏微分方程组, 并介绍一些在偏微分方程中广泛使用的术语.

定义 1.4 (1) 如果方程 (1.1) 可表示成

$$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x),$$

其中 a_α ($|\alpha| \le k$) 和 f 是给定的函数, 则称方程 (1.1) 为**线性偏微分方程**;

(2) 如果方程 (1.1) 可表示成

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f\left[D^{k-1}u(x), \cdots, Du(x), u(x), x\right],$$

其中 a_α ($|\alpha| = k$) 和 f 是给定函数, 则称方程 (1.1) 为**半线性偏微分方程**;

(3) 如果方程 (1.1) 可表示成

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \left[D^{k-1}u(x), \cdots, Du(x), u(x), x\right] D^\alpha u$$

$$= f\left[D^{k-1}u(x), \cdots, Du(x), u(x), x\right],$$

其中 a_α $(|\alpha| = k)$ 和 f 是给定函数，则称方程 (1.1) 为**拟线性偏微分方程**;

(4) 如果方程 (1.1) 非线性地依赖于 $u(x)$ 的最高阶偏导数 $D^k u$，则称方程 (1.1) 为**完全非线性偏微分方程**.

§1.2 实 例

首先，我们介绍一些著名的偏微分方程.

较著名的一些线性偏微分方程有：

(1) Laplace 方程

$$\triangle u = 0;$$

(2) 特征值方程

$$\triangle u + \lambda u = 0 \quad (\lambda \text{ 为常数});$$

(3) 热方程

$$u_t - a^2 \triangle u = 0 \quad (a > 0 \text{ 为常数});$$

(4) Schrödinger 方程

$$u_t - \mathrm{i} \triangle u = 0;$$

(5) Kolmogorov 方程

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} = 0,$$

其中 a_{ij}, b_i $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 为常数;

(6) Fokker-Planck 方程

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i u)_{x_i} = 0,$$

其中 a_{ij}, b_i $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 为常数;

(7) 输运方程

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} = 0,$$

其中 b_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为常数;

(8) 波动方程

$$u_{tt} - a^2 \triangle u = 0 \quad (a > 0 \text{ 为常数});$$

(9) 电报方程

$$u_{tt} - a^2 \triangle u + b u_t = 0,$$

其中 a 为正常数， b 为常数.

较著名的一些非线性偏微分方程有:

(1) 非线性 Poisson 方程

$$\triangle u = u^3 - u;$$

(2) 极小曲面方程

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{(1 + |Du|^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = 0;$$

(3) Monge-Ampère 方程

$$\det(D^2 u) = f(x);$$

(4) Hamilton-Jacobi 方程

$$u_t + H(Du) = 0,$$

其中 $H : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为已知函数;

(5) Burgers 方程

$$u_t + u u_x = 0;$$

(6) 守恒律方程

$$u_t + \operatorname{div} \boldsymbol{F}(u) = 0;$$

(7) 多孔介质方程