高等代数的265个反例

李玉文 编著

天津教育出版社

高等代数的265个反例

李玉文　　　　编著

王长钰　李师正
王品超　杨秋锁　审校

天津教育出版社

高等代数的265个反例

李玉文　编著

*

天津教育出版社出版发行

山东新华印刷厂德州厂印刷

*

787×1092　32开本　3.875印张　72千字

1991年7月第1版　　1991年7月第1次印刷

印数：1—5,000

ISBN 7—5309—1289—5

G·1024　　定价：1.60元

序　言

在当代数学教育的宗旨里，除了传统的教学内容与训练方法以外，重要的一个培养侧面是提高人的思维能力。例如要求数学的基础训练能达到如下状态：先把来自实际的具体问题予以提炼，得出正确的数学模型，再将该数学问题给出求解的公式或方法，最后又回到实际予以有效地应用。这就需要有以下两种能力。一、要具有善于把数学问题作形式逻辑程序化的形式化能力；二、要有从具体到抽象且作抽象演算的抽象化能力。形式化的训练需要有正反两方面反复推敲的准确分析，抽象化的训练需要对概念和命题的条件的作用有清晰的了解。

作为高等代数的课程，在高等学校中特别是对于师范院校与教育学院系统来说，对学生的课程教育，一方面是作为基础课并可密切联系中学教学实际，起某些指导作用；另一方面也是训练思维能力的极好教材。其中汇集在基本概念以及推理技巧中的若干反例，将是极其重要的环节。李玉文编著的这本265个反例一书，正是有益于当代数学教育思维能力训练提高目的的读物。是当代大学生代数业务训练的一本很好的补充读本。也是从事于高等代数教学的教师们的一本

参考用书。

反例对巩固和加深概念的理解有着正面例子所无法取代的作用，本书可以看成是在这一方向探索的一个尝试。但是也许在本书中的某些反例，有的可能过于简单，有的疑难问题反而例不得力，尚欠优美。这些都需我们再进一步作修改完善。我们诚希在该书作者与读者共同关注下，不久之后将有一个更好的修订本问世！

邵品琮　李师正

1991年5月23日写于济南

编者的话

数学中的例子有两种类型：说明性的例子和反例，即显示某件事为什么有意义和指出某件事为什么讲不通的例子。本书的主要内容是举出高等代数中的反例，这些反例是作者在长期教学实践中予以搜集和自行构造的。在举反例的过程中，所涉及到的定理、命题的论证，均可在高等代数中找到依据，为了有助于对问题的理解，我们还加入了部分说明性的例题，书中所用的符号，主要采用北京大学编《高等代数》及张禾瑞、郝钢新编《高等代数》中便于书写的符号体系。

在编排上，为了使某类问题相对集中，也与一般教材的顺序有所不同，例如，我们把在线性变换、欧氏空间、二次型中有关矩阵的问题尽量放在矩阵一章。

本书作为学习“高等代数”（或线性代数）的补充读物，可作为教学参考书，也可供广大数学爱好者阅读。

本书初稿于1989年12月完成，并油印成册，征求过同行的意见。其中（以姓氏笔划为序）尹丽君、李桂荣、周立先、孟详玉、季世栋、苑文章、周洪连、罗春彦、赵婷瑛、郑高峰、奚传志、高玉玲、魏立平等诸位老师认真审阅了书

稿，提出了许多宝贵意见，并补充了若干精彩的反例，作者在此深表感谢。

曲阜师大王长钰教授、山东师大李师正教授、曲阜师大王品超副教授和安阳师专杨秋锁副教授作为审校者，付出了辛勤的劳动；李师正教授还在原稿的基础上，独立增加了第七章：λ—矩阵。青岛大学邵品琮教授也审阅了书稿，并与李师正教授一起撰写序言；山东新华印刷厂德州厂厂长、高级经济师王庆华同志亲自作了印刷和出版的安排，作者在此一并致以最诚挚的谢意。

有位数学家曾经指出："一个数学问题用一个反例予以解决，给人的刺激犹如一出好的戏剧，为数学作出的许多最优雅的和艺术性很强的贡献属于这个流派。"最后，期望本书的读者也会和我们曾经经历过的那样，从这一汇集能予以得益。

限于编者的水平和经验，书中可能有不少缺点和错误，诚恳地希望读者批评指正。

李玉文

于德州教育学院数学系

1991年5月

目　录

第一章　基本概念

本章主要围绕集合、映射、数学归纳法、数环和数域等基本概念和基本知识，举出相关的反例。

§1　集合

1　若$B=C$，则$A\cup B=A\cup C$，反之不真。

例　设$A=\{a,\ b\}$，$B=\{a\}$　$C=\{b\}$则有

$A\cup B=A\cup C=A$，但$B\neq C$。

2　若$B=C$，则$A\cap B=A\cap C$，反之不真。

例　设$A=\{a\}$　$B=\{a,\ b\}$　$C=\{a,\ c\}$则有

$A\cap B=A\cap C=A$，但$B\neq C$。

3　若$B=C$，则$A-B=A-C$，反之不真。

例　设$A=\{a\}$　$B=\{b\}$　$C=\{c\}$则有

$A-B=A-C=\{a\}=A$，但$B\neq C$。

4　若对于任意集合M，都有$A\cup M\subset B\cup M$　则$A\subset B$，此命题为真。但若变动条件：对某个M有$A\cup M\subset B\cup M$，是否能推出$A\subset B$？答案是否定的。

例　设$A=\{a\}$　$B=\{b\}$　$M=\{a, b\}$

则有$A\cup M=B\cup M$，当然$A\cup M\subset B\cup M$成立。

但$A\subset B$不成立。

5　若$A-B=M-N$是否必有$A\cup N=B\cup M$，回答是不一定。

例　$A=\{a,\ b,\ c\}$，$B=\{b,\ c,\ d\}$，$M=\{a,b\}$，$N=\{b\}$　$A-B=\{a\}$　$M-N=\{a\}$。

$A\cup N=\{a,\ b,\ c\}$　$B\cup M=\{a,\ b,\ c,\ d\}$

故$A\cup N\neq B\cup M$

6　若$\chi\in A$或$\chi\in B$。则$\chi\in A\cap B$，此结论不真。

例　$A=\{a,\ b\}$，$B=\{b\}$　$a\in A$　但$a\notin A\cap B$，正确的结论应为$\chi\in A\cup B$。

7　若$X\notin A\cap B$，则$X\notin A$且$X\notin B$，此结论不真。

例　$A=\{a,\ b\}$，$B=\{b\}$，$a\notin A\cap B$,但$a\in A$。正确结论应为X不同时属于A、B。

8　"在等价关系中，自反律可以不要。"理由是："从$a\sim b$，由对称性得$b\sim a$，再由传递性得$a\sim a$。"此理由不正确。

例　令$M=\{0,\ 1,\ 3\}$规定

$a\sim b$当且仅当$ab>a+b$，

这显然不是M的一个等价关系，因为$0\sim 0$，及$1\sim 1$都不成立。但此关系显然满足对称律，也满足传递律。

§2　映射

定义1　设给定两个集合A、B，如果通过一个确定的法则，使得A中的每一个元素X，在B中都有一个唯一确定的

元素Y与它对应。那么这个法则就叫做A到B的一个映射。

如果映射f使元素$b\in B$与元素$a\in A$对应，那么就记为$f(a)=b$，或f：$a\longmapsto b$。

9 若法则f不能使集A中每个元素在集B中有像，则f不是A到B的映射。

例 $A=B=N$，f：$n\longmapsto n-1$

则f不是A到B的映射。因为$f(1)=1-1=0\overline{\in}B$。

10 若法则f是集A到集B的映射，则f必使A中每个元素在B中的像是唯一的，否则f就不是A到B的映射。

例 $A=\{$全体非负实数$\}$，$B=R=\{$全体实数$\}$。令f：$x\longmapsto y$（其中$y^2=x$），则f不是A到B的映射。因为$x>0$时，x的平方根都有两个不同值。

11 若法则f使A中的相同元素对应着B中的不同元素，则f不是A到B的映射。

例 $A=Q$，$B=N$，

f：分数 $\dfrac{b}{a}\longmapsto a+b$

则f不是A到B的映射，因为相等的有理数$\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{4}$却对应着不同的像3和6。

12 非满射、非单射的例。

例 设$A=B=\{1,2,3,4\}$

则 f：$1\longmapsto 1$

$2\longmapsto 1$

$3\longmapsto 2$

$4\longmapsto 2$

f不是满射，因为B中的3、4不是A中任何元素的像。f不是单射，因为$1 \neq 2$，但$f(1)=f(2)=1$。

13 对于有限集A，单射变换与满射变换互相等价。但对于无限集则不然。

例 设$A=Z$

$$f: n \longmapsto 2n$$

f是一个单射变换而不是满射变换。而

$$g: n \longmapsto \frac{n}{2} \quad (\text{当}n\text{是偶数时})$$

$$n \longmapsto \frac{n+1}{2} \quad (\text{当}n\text{是奇数时})$$

g是一个满射而不是单射变换。

14 映射的合成不满足交换律。

（i）当$g \circ f$有意义时，$f \circ g$未必有意义。

例 设$A=\{1, 2, 3\}$、$B=\{a, b\}$、$C=\{1, -1\}$，

$$f: 1 \longmapsto a \qquad g: a \longmapsto 1$$
$$2 \longmapsto a \qquad b \longmapsto -1$$
$$3 \longmapsto a$$

f是A到B的映射，g是B到C的映射。$g \circ f$是A到C的映射，但$f \circ g$没有意义。

（ii）当$f \circ g$、$g \circ f$都有意义时，它们未必相等。

例 设f：$R \to R \quad x \to x+b$

$$g: R \to R \quad x \to x^2+c$$

$$g \circ f: R \to R \quad x \longmapsto x^2+2bx+b^2+c$$

$$f \circ g: R \to R \quad x \longmapsto x^2+c+b$$

所以$g \circ f \neq f \circ g$。

定义2 $A\times A$到A的一个映射叫做集合A的一个代数运算。

15 非代数运算的例

例 $A=\{$全体整数$\}$，则法则$a\cdot b=a^b$不是A的代数运算. 因为$0\cdot(-1)=0^{-1}$无意义，又

$2\cdot(-1)=2^{-1}\overline{\in}A$

16 交换律满足，但结合律不满足的例。

例 令$A=\{$全体整数$\}$ 法则$a\circ b=a^2+b^2$

因为$a\circ b=a^2+b^2=b^2+a^2=b\circ a$，故交换律满足。

而$(1\circ 1)\circ 0=(1^2+1^2)\circ 0=2\circ 0=2^2+0^2=4$

$1\circ(1\circ 0)=1\circ(1^2+0^2)=1\circ 1=1^2+1^2=2$

所以结合律不满足。

17 结合律和交换律都不满足的例。

例 令$A=\{$全体非零实数$\}$，法则为

$a\circ b=\dfrac{a}{b}$ 因$1\circ 2=\dfrac{1}{2}$ $2\circ 1=2$ 故$1\circ 2\neq 2\circ 1$，即交换律不满足.又$(1\circ 2)\circ 3=\dfrac{1}{6}\neq\dfrac{3}{2}=1\circ(2\circ 3)$，故结合律也不满足。

§3 数学归纳法

第一数学归纳法

设有一个与自然数n有关的命题$S(n)$，如果

（1）当$n=1$时，命题成立.〔即$S(1)$成立〕；

（2）如果$n=k$时命题成立，则$n=k+1$时，命题也成

立。〔即$S(k)$成立，则就有$S(k+1)$也成立〕；那么这个命题对于一切自然数n都成立〔即$S(n)$成立〕。

第二数学归纳法

设$P(n)$是与自然数n有关的命题，如果

（1）$P(1)$成立。

（2）当$1\leqslant m\leqslant k$时$P(m)$成立，就有$P(k+1)$成立。

那么$P(n)$对于任意自然数都成立。

数学归纳法的步骤是缺一不可的。

18 只有第一步骤而无第二步骤的归纳证明可能导出错误的结论。

例 在函数$f(n)=n^2+n+17$中，由$f(1)=19$，$f(2)=23$，$f(3)=29$，……，$f(15)=257$等都是质数，便说"n为任何自然数时$f(n)=n^2+n+17$的值都是质数"便是错误的，因为$f(16)=16^2+16+17=16(16+1)+17=17(16+1)$

$$=17^2=289\text{就不是质数。}$$

19 只有第二步骤而无第一步骤的归纳证明同样可能导致错误结论。

例 假定$n=k$时，等式$2+4+\cdots+2n=n^2+n+1$成立

即：$2+4+\cdots+2k=k^2+k+1$ ①

两边同时加上$2(k+1)$，则有

$$2+4+\cdots+2(k+1)=(k+1)^2+(k+1)+1\text{ 成立}$$

这就是说，如果$n=k$时等式①成立，则$n=k+1$时，等式也成立。

由此得出结论：对于一切自然数n，等式①都成立。这是错误的。因为$n=1$时有$2=3$的谬误。

20 我们知道，第二数学归纳法与第一数学归纳法的主

要区别在于第二数学归纳法较第一数学归纳法的归纳假设要来的强些，它不是只假定命题对某一个自然数成立，而是假定对一串自然数命题都成立。因此又得名串值归纳法。基于这些差别，凡是可用第一归纳法证明的命题，当然可用第二数学归纳法证明，反之却不然。

例 设有数列a_1，a_2，a_3，…，a_n，…

其中$a_1=3$，$a_2=7$，而

$$a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}\ (n=3,\ 4,\ \cdots)$$

试证通项公式为

$$a_n=2^{n+1}-1 \qquad ②$$

对于第一归纳法：

1）当$n=1$时，$a_1=2^{1+1}-1=3$，②式成立。

2）假设当$n=k$时，②式成立，即有$a_k=2^{k+1}-1$，再看$n=k+1$时的情形：因为在$a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1}$中不知a_{k-1}，故不能推得a_{k+1}对②式的正确性。但是换成第二数学归纳法就迎刃而解了。

§4 数环和数域

定义1 设S是复数域C的一个非空子集，如果对于S中的任意两个数a，b来说，$a+b$、$a-b$、$a\cdot b$都在S内，那么S就称为一个数环。

定义2 设P是一个数环，如果

（1）P中至少有一个不等于零的数。

（2）如果任意a，$b\in P$，且$b\neq 0$，有$\frac{a}{b}\in P$，则P称为

一个数域。

21 不作成数环的数集

例 $S=\{a+bi \mid a$为任意有理数，b为任意实数$\}$因为$0+1\cdot i$，$1+\sqrt{2}i\in S$，但是，由于$\sqrt{2}$是无理数，故$i(1+\sqrt{2}i)=-\sqrt{2}+i\overline{\in} S$。即$S$对乘法不封闭。

22 不作成数域的数集。

当然凡是作不成数环的数集都不是数域。下面举一个是数环但非数域的例。

例 $S=\{a+b\sqrt{2} \mid a，b$是任意整数$\}$

显然S是一个数环 但因$\frac{1}{2+\sqrt{2}}=1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

因为a，b均为整数，所以$1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$不能写成$a+b\sqrt{2}$的形式，否则利用$\sqrt{2}$为无理数，有$1-\frac{1}{2}\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}\Rightarrow$

$(a-1)+(b+\frac{1}{2})\sqrt{2}=0\Rightarrow a-1=0 \quad b+\frac{1}{2}=0\Rightarrow a=1$，$b=-\frac{1}{2}$矛盾，故$\frac{1}{2+\sqrt{2}}\overline{\in} S$，$S$不是数域。

23 两个数环的并不一定是数环。

例 $S_1=\{2n \mid n\in Z\} \quad S_2=\{5n \mid n\in Z\}$

S_1、S_2都是数环，取$2\in S_1$，$5\in S_2$则

$2+5=7\overline{\in} S_1\cup S_2$，$S_1\cup S_2$不作成数环。

24 两个数域的并不一定是数域。

例 $F_1=\{a+b\sqrt{2} \mid a，b\in Q\}$

$F_2=\{a+b\sqrt{3} \mid a，b\in Q\}$

F_1、F_2都是数域，取$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}\in F_1\cup F_2$

$\sqrt{2}+\sqrt{3}\overline{\in}F_1\cup F_2$，所以$F_1\cup F_2$不是数域。

25 任何复数都是1与i的线性组合，但1与i的线性组合的数集不一定就是复数域C。

例 令$A=\{a+bi\mid a, b\in Q\}$，则$A\neq C$，因

$3+\sqrt{2}i\overline{\in}A$，但$3+\sqrt{2}i\in C$。

26 任何数域都包含有理数域Q，但包含有理数域Q的数集不一定是数域。

例 $P=Q\cup\{\sqrt{2}\}$，则$1+\sqrt{2}\overline{\in}P$，即$P$对加法不封闭。因此不构成数域。