国家科学技术学术著作出版基金
NFAPST

完全可积非线性方程的哈密顿理论

黄念宁 陈世荣 著

科学出版社
www.sciencep.com

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

完全可积非线性方程的哈密顿理论

黄念宁　陈世荣　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

哈密顿理论是完全可积的非线性方程的标志. 本书对孤子理论中研究得特别活跃的几种方程:NLS 方程,KdV 方程, sine-Gordon 方程, UNLS 方程, DNLS 方程, NLS^{+} 方程,和各向异性、各向同性及具轴对称三种情形的 L-L 方程的哈密顿理论进行了系统的讲述, 给出了这些方程的作用变量和角变量.

本书可以作为大学高年级学生和研究生的教学用书或参考书,对教师和研究人员也具有参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

完全可积非线性方程的哈密顿理论/黄念宁, 陈世荣著.—北京: 科学出版社, 2005

ISBN 7-03-015639-0

I.完… II.①黄… ②陈… III.非线性方程-哈密顿系统 IV.O311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 056651 号

责任编辑: 胡 凯 鄢德平 / 责任校对: 刘小梅
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005年8月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2005年8月第一次印刷 印张: 12 1/4
印数: 1—2 000 字数: 221 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换<路通>)

前　言

名高者未必吐辞为经, 深思者不能违道殉誉 —— 章太炎

1+1 维的完全可积方程的研究, 在 20 世纪七八十年代达到了高潮. 反散射方法的出现, 首次将非线性方程的求解与线性方程的反问题联系了起来. 除 1+2 维方程的探索研究外, 难见新的有效方法并存在应用上的局限, 这样的高潮很快就过去了. 但仍有一些值得做的课题, 如近可积方程的微扰理论, 以及过去做得不够的, 如哈密顿理论.

非线性方程的完全可积性, 就是说, 该方程描述的是一个多周期系统, 即它是一个哈密顿系统, 且可以引入作为正则共轭变量的作用变量和角变量. 作用变量是守恒量, 角变量是周期地依赖时间的量. 所以建立哈密顿理论的第一步就是要得出唯一涉及时间的单式矩阵元间的泊松括号. 通过相应的约斯特函数对方程的解的变分, 这一部分并不难做出正确的结果.

不论哪一个完全可积的非线性方程, 也不论单式矩阵的哪一对元, 它们的泊松括号都用一个对坐标 x 的积分来表出. 要此积分有简单结果, 被积函数应当是某一个函数对 x 的全微分. 能否找出这一相应的函数, 就成为操作能否继续前进的关键. 但对实验室系中的 sine-Gordon 方程, 要找出这样的函数颇不容易. 法捷也夫等引入单式矩阵的泊松括号的表述代替通常一对对单式矩阵元的泊松括号的表述是有价值的. 以 sine-Gordon 方程为例: 单式矩阵的泊松括号积分的被积函数是一个 4×4 矩阵, 且每个元都含有 4 个约斯特函数分量. 这大大简化了理论的表述和推导, 是有益的.

我们认为此 4×4 矩阵的被积函数应当是两对约斯特函数 (它们都是 2×2 矩阵) 的另一种直积对 x 的微商, 于是引入了这另一种直积, 得到一个 4×4 矩阵函数的微商. 由于每一对约斯特函数之间可以夹入不同的泡利矩阵 σ_1, σ_2, σ_3 和 I, 共 4 种可能, 两对函数间的各 4 种选择, 正好是 16 种. 注意泊松括号此被积函数有 16 个元, 就一定可以用此处 16 种可能的线性组合来表出. 这样引入的线性组合的方法具有直接的可操作性. 因而现存的那些没能建立哈密顿理论的可积方程, 主要的都用这里所提出的办法解决了. 当然, 由于种种对称性线性组合并不需包括这 16 种可能, 1 种、2 种最多 4 种就够了.

泊松括号是对同时的量而说的, 因此在得出作用变量和角变量的表达式时, 只要知道单式矩阵元中, 独立于时间的元将构成作用变量, 依赖于时间的元将用来构成角变量就够了. 作用变量和角变量表达式的具体形式从要求它们是互为共轭的广义坐标和共轭动量来决定. 为得出反散射法给出的角变量的时间相依, 哈密顿量的

谱参数积分表示式就被确定了, 它的被积函数是作用变量乘以谱参数的确定函数.

由于哈密顿量的坐标积分表示式本是确定的. 所以对一个方程已有哈密顿量的两种积分表示式, 下面的问题是, 找出一个守恒量, 它的谱参数积分表示式是已确定的哈密顿量的谱参数积分表示式, 同时它的坐标积分表示式正是已确定的哈密顿量的坐标积分表示式. 这是数学物理中的夹逼法, 它使我们导出此守恒量时没有多余选择. 其实, 恰恰是没有自由使我们不至陷于无所适从的地步.

现在来看自旋链的朗道-栗弗席茨 (Landau-Lifshitz) 方程 (L-L 方程) 的守恒量推导中的问题. 各向同性情况的相容性条件第一个是

$$L = -\mathrm{i}k\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{1}$$

在 $|x| \to \infty$ 时, 取渐近自旋 $S = (0, 0, 1)$, 这时

$$L_0 = -\mathrm{i}k\sigma_3 \tag{2}$$

由此定义约斯特解. 约斯特解在 $|k| \to \infty$ 的渐近行为由第一个相容性方程决定, 如

$$v_{2xx} - L_{22x}v_2 - \frac{L_{21x}}{L_{21}}(v_{2x} - L_{22}v_2) = -(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21})v_2 \tag{3}$$

式中 $v_2 = \psi_2(x, k)$ 是约斯特解 $\psi(x, k)$ 的第 2 个分量. 以式 (1) 代入式 (3), 并写下 $v_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx+g}$, 得

$$g_{xx} + (-\mathrm{i}k + g_x)^2 + \mathrm{i}kS_{3x} - \frac{(S_1 + \mathrm{i}S_2)_x}{S_1 + \mathrm{i}S_2}(-\mathrm{i}k + g_x + \mathrm{i}kS_3) = -k^2 \tag{4}$$

当 $|k| \to \infty$ 时, 将展开

$$g_x = \nu_0 + (\mathrm{i}2k)^{-1}\nu_1 + (\mathrm{i}2k)^{-2}\nu_2 + \cdots \tag{5}$$

代入式 (4) 比较两端同次幂项, 得

$$\nu_0 = \frac{1}{2}\left(S_{3x} + \frac{(S_1 + \mathrm{i}S_2)_x}{S_1 + \mathrm{i}S_2}(1 - S_3)\right), \tag{6}$$

和

$$\nu_1 = \nu_{0x} + \nu_0^2 - \frac{(S_1 + \mathrm{i}S_2)_x}{S_1 + \mathrm{i}S_2}\nu_0. \tag{7}$$

$\nu_0 \neq 0$, 即 k^0 阶项不为 0. 但是通常 $a(k)$ 的色散关系给出 k^0 阶项为 0. 为解决这一矛盾, 法捷也夫等说, 传输系数应当还有一附加相, 即 $a(k)$ 要换成 $a(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 用这一附加相 φ 来抵消上述不为 0 的 0 阶项. 而且式 (7) 给出的渐近行为的 k^{-1} 阶项十分复杂, 怎么也看不出会给出哈密顿量所需的表示式. 不久, 有人指出各向同性的 L-L

方程与 NLS 方程的规范等价性, 引入附加相是不允许的. 因此传输系数 $a(k)$ 应当相同, 所以对此二方程其 0 阶项都是 0, 从 NLS 方程的 1 阶项, 将其解 u 由规范等价性换成 L-L 方程的自旋函数 $\boldsymbol{S}$, 此问题就解决了.

此二方程的等价性证明是这样的: 引入规范变换 B, 得变换后的相容性对成为

$$L' = BLB^{-1} + B_x B^{-1} \tag{8}$$

$$M' = BMB^{-1} + B_t B^{-1} \tag{9}$$

式中

$$B\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma}B^{-1} = \sigma_3 \tag{10}$$

和

$$B_x B^{-1} = U, \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -\bar{u} & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

于是得

$$L' = -\mathrm{i}k\sigma_3 + U \tag{12}$$

$$M' = -\mathrm{i}2k^2\sigma_3 + 2kU - \mathrm{i}(U^2 + U_x)\sigma_3 \tag{13}$$

人们看到式 (12) 和式 (13) 与非线性薛定谔方程的相容性对形式上一样. 以式 (12) 中的 L' 代替式 (3) 中的 L, 得

$$g'_{xx} + (-\mathrm{i}k + g'_x)^2 - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}} g'_x + |u|^2 = -k^2 \tag{14}$$

取展开式 (5), 相应的量加 $'$, 比较两端 k 的同次幂项, 得

$$\nu'_0 = 0, \qquad \nu'_1 = -2|u|^2 \tag{15}$$

利用式 (10) 和式 (11), 可以得到

$$\nu'_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{S}_x\cdot\boldsymbol{S}_x. \tag{16}$$

它正是所需的各向同性时的哈密顿密度.

对具易磁化轴、具易磁化面情况, 如果由相容性对原来的形式, 也将得到式 (6) 和类似于式 (7) 的结果. 所以人们试图寻找与之规范等价的类似于 NLS 方程的完全可积方程, 结果一无所获.

我们看到, 以上的等价性的讨论, 其实含有许多不必要的部分. 因为守恒律的形式是相容性对的第一个决定的, 所以不必管第二个. 其次, 因取 $|k|\to\infty$ 时的展开, 所以只要着眼于 k 的高次幂. 再者, 因不是各向同性, 我们需要上述规范变换的显

式, 除得到式 (11) 和式 (12) 外, 还需要对自旋的各个分量的规范变换后的结果. 丢掉这些不必要的束缚, 从得出 B 的显式就成功地导出了具易磁化轴和具易磁化面的守恒律, 建立了相应的哈密顿理论. 这两个方程的哈密顿理论过去一直没有得到.

完全各向异性情况的 L-L 方程, 斯克里亚宁首先给出了相容性对. 此相容性对是用椭圆函数表出的, 它们具有双周期性. 方程的哈密顿理论也由斯克里亚宁讨论过. 但是守恒律的导出除同样含有上述矛盾外, 主要公式也不正确. 我们利用上述规范变换也导出了应有的哈密顿量, 因而系统地建立了完全各向异性情况的 L-L 方程的哈密顿理论. 本书最后一章本拟写入这部分内容, 但版权法要求论文刊出后一年方可写进书中, 因此本书只好不写入, 读者请参阅相关论文.

我们的工作多年来得到国家自然科学基金和非线性科学基金的资助, 由于种种原因工作做得很不够, 值得一提的结果也不多. 现又面临要全力转做其他工作, 因此我请陈世荣一道写了这本书, 作为我们工作总结, 希望识者鉴察.

黄念宁

2004 年 12 月于武汉大学

目　录

第 1 章　NLS 方程的哈密顿理论

从原则上说, 非线性方程的完全可积性, 意味着该方程描述的是一个多周期系统, 即是一个哈密顿系统, 且可以引入作为正则共轭变量的作用变量和角变量. 对于KdV 方程的求解, 当反散射方法成功地实现后, KdV 方程的哈密顿理论就建立了. 随后对于NLS 方程的求解, 改进后的反散射方法也成功地做到了. NLS 方程的哈密顿理论也随之建立. 如果一个完全可积的非线性方程, 未能建立起它的哈密顿理论, 总显得事情似乎没有做完. 但是至今仍有若干重要的完全可积的非线性方程, 其哈密顿理论仍未建立. 其中究竟有什么困惑, 本书将逐一说明, 并予以解决. 由于 NLS 方程可从变分原理导出其哈密顿理论具有标准的形式, 所以本章先讲 NLS 方程的哈密顿理论.

1.1　NLS 方程

1.1.1　NLS 方程和变分原理

非线性薛定谔方程, 简记作NLS方程, 是

$$\mathrm{i}u_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0 \tag{1.1}$$

这里 u 是复数. 它在零边值条件

$$u \to 0, \qquad 当\ |x| \to \infty \tag{1.2}$$

下的求解, 由萨哈诺夫和沙巴特发展的反散射变换方法已实现, 可以得出 NLS 方程的多孤子解的显式. 这里, 我们用自然的方式讲述哈密顿方法. 所谓自然的方式即尽可能不涉及可以避开的知识来讲述.

首先利用变分原理来导出 NLS 方程. 设拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 依赖于 u, u_x, u_t 及其复共轭, 则拉格朗日方程是

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} - \partial_x \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_x} - \partial_t \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_t} = 0 \tag{1.3}$$

不难看出, 取拉格朗日密度 $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = -\mathrm{i}u_t\bar{u} + u_x\bar{u}_x - |u|^4 \tag{1.4}$$

代入, 就得出NLS 方程 (1.1). 有了拉格朗日密度, 就可定义动量密度

$$p(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial u_t(x)} = -\mathrm{i}\overline{u(x)} \tag{1.5}$$

由此得哈密顿密度 $\mathcal{H}$ 为

$$\mathcal{H}(x) = u_t(x)p(x) - \mathcal{L}(x) = -u_x\overline{u}_x + |u|^4 \tag{1.6}$$

于是引入基本泊松括号 (本书约定泊松括号中广义坐标在前、共轭动量在后)

$$\{u(x),\, p(y)\} = \delta(x-y) \tag{1.7}$$

即

$$\{u(x),\, \overline{u(y)}\} = \mathrm{i}\delta(x-y) \tag{1.8}$$

可见一般两个量 S, R 的泊松括号是

$$\{S,\, R\} = \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big(\frac{\delta S}{\delta u(x)} \cdot \frac{\delta R}{\delta\overline{u(y)}}\{u(x),\, \overline{u(y)}\} + \frac{\delta S}{\delta\overline{u(x)}} \cdot \frac{\delta R}{\delta u(y)}\{\overline{u(x)},\, u(y)\}\Big) \tag{1.9}$$

以式 (1.8) 代入得

$$\{S,\, R\} = \mathrm{i}\int \mathrm{d}x\Big(\frac{\delta S}{\delta u(x)} \cdot \frac{\delta R}{\delta\overline{u(x)}} - \frac{\delta S}{\delta\overline{u(x)}} \cdot \frac{\delta R}{\delta u(x)}\Big) \tag{1.10}$$

以哈密顿量 H

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\mathcal{H}(x) \tag{1.11}$$

代入, 得

$$\{u(x),\, H\} = \mathrm{i}\frac{\partial\mathcal{H}(x)}{\partial\overline{u(x)}} = \mathrm{i}\big(u_{xx} + 2|u|^2u\big) \tag{1.12}$$

可见哈密顿方程

$$u_t = \{u(x),\, H\} \tag{1.13}$$

正是NLS 方程 (1.1).

1.1.2　反散射法

非线性方程的完全可积性说, 该方程描述的是一个哈密顿系统, 且可以引入作为正则共轭变量的作用变量和角变量. 作用变量是守恒量, 角变量是周期地依赖时间的量. 这表示, 要能引入这样的量, 我们要特别着眼于在完全可积方程求解时得到的那些与时间有关的量. 在反散射变换解法中, 我们知道, 解对时间的相依是通过所谓散射数据表出的. 而散射数据的时间相依则是由单式矩阵元的时间相依来决

定的. 由此可见, 建立哈密顿理论的第一步就是要得出单式矩阵元间的泊松括号, 下面讲单式矩阵.

反散射变换法给出的NLS 方程的相容性对是

$$L=-\mathrm{i}\lambda\sigma_3+U \tag{1.14}$$

和

$$M=-\mathrm{i}2\lambda^2\sigma_3+2\lambda U-\mathrm{i}(U^2+U_x)\sigma_3 \tag{1.15}$$

式中

$$U=u\sigma_+-\bar{u}\sigma_-,\qquad \sigma_+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \tag{1.16}$$

相容性条件

$$L_t-M_x+[L,M]=0,\qquad [L,M]=LM-ML \tag{1.17}$$

给出NLS 方程 (1.1). 凡相容性对的第一个具有式 (1.14) 的形式的, 称为 Z-S 形式, 因为有这种形式的相容性对的方程, 最先是由萨哈诺夫和沙巴特建立了反散射解法.

第一个相容性方程是

$$\partial_x\Phi(x,\lambda)=L(x,\lambda)\Phi(x,\lambda) \tag{1.18}$$

其中 λ 是谱参数. 因为泊松括号只涉及同时的量, 所以这里只需要第一个相容性方程. 由渐近条件 (1.2), 即当 $U=0$ 时, 方程 (1.18) 的渐近解是

$$E(x,\lambda)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x\sigma_3} \tag{1.19}$$

当 λ 为实数时, 上式 $E(x,\lambda)$ 表示两个独立的二分量解

$$E_{\cdot 1}(x,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x},\qquad E_{\cdot 2}(x,\lambda)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \tag{1.20}$$

用边条件定义方程 (1.18) 的解是

$$\begin{aligned}&\Psi(x,\lambda)\to E(x,\lambda),\qquad \text{当 } x\to\infty\\&\Phi(x,\lambda)\to E(x,\lambda),\qquad \text{当 } x\to-\infty\end{aligned} \tag{1.21}$$

这里解是 2×2 矩阵, 它们通常写成两个二分量解如下

$$\Psi(x,\lambda)=\left(\tilde{\psi}(x,\lambda),\ \psi(x,\lambda)\right)=\begin{pmatrix}\tilde{\psi}_1(x,\lambda)&\psi_1(x,\lambda)\\\tilde{\psi}_2(x,\lambda)&\psi_2(x,\lambda)\end{pmatrix} \tag{1.22}$$