自学参考用書

高中立体几何

半尊馨　孙賢銘編著

浙江人民出版社

自学参考用書

高中立体几何

丰寧馨 孙賢銘编著

浙江人民出版社

自学参考用書

高中立体几何

毛宁璞　孙甚銘編著

*

浙江人民出版社出版

杭州武林路万石里

浙江省书刊出版业营业許可証出字第001号

地方国营杭州印刷厂印刷·新华書店浙江分店发行

*

开本787×1092耗 1/32　印张 7 5/8　字数 166,000

1958年3月　第　一　版

1958年3月第一次印刷

印数：1—35,068

統一書号：13103·15

定　　价：(7)六角五分

出版者的話

本社出版这套叢書，是为了支援知識青年向科学進軍，使他們通过自学，進一步掌握科学基礎知識，更好地为社会主义建設事業服务。

这套叢書是本社已出版的初中自学参考用書的繼續，讀者对象主要是具有高中文化程度的青年群众和干部，包括高中畢業生在內。

这套叢書是根据自学这个特点進行編寫的，在合乎科学性和系統性的原則下，适当地联系实际，并結合貫徹思想政治教育。文字也力求淺近易懂。每一种科学各有重点，不是高中課本的复述，而是課本內容的概括和提高。因此，这套叢書不但可作为知識青年的自学参考讀物，也可作为高中教师教学上的輔助材料。

这套叢書难免存在着一些缺点甚至錯誤，希望讀者不吝指正。

浙江人民出版社

目　　錄

第一講　基本概念、平行

第二講　直綫和平面的垂直

第三講　二面角、多面角

第四講 多面体

第五講 多面体的体積

第六講 旋轉体

練習題解答

附錄： 在学習立体几何时常用到的三角学、代数学、平面几何学的重要公式和立体几何的重要公式

第一講　基本概念、平行

§1. 引言　在平面几何中，我們只研究所有的点都在同一个平面内的几何圖形，这样的圖形叫做**平面圖形**。如果一个圖形的点不全在同一个平面內，那末这个圖形就叫做**空間圖形**。立体几何就是研究空間圖形的性質的科学。

我們在研究空間圖形的性質时，除了利用模型帮助理解外，还时常把空間圖形用画在一个平面内的圖形來表示，这些圖形能够使我們得到和实际空間圖形相近似的印象。例如正方体可以画成圖1的样子。被遮住的綫可以不画，也可以画成虛綫。

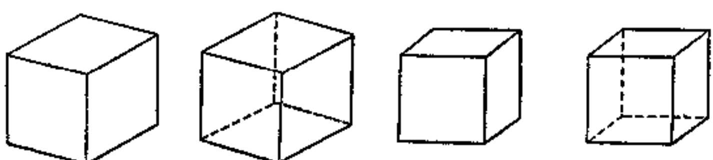


圖　1

在平面内画空間圖形，要注意下面兩点：

(1) 实际上平行的綫段或直綫必須画成平行，像圖2中正方体的棱 AB 和 DC，BC 和 AD 那样。但是兩条相交直綫間的角在圖上一般不画成和实际的角一样大小，像圖2中正方体的 $\angle ABC$ 和 $\angle B'BC$ 实际上都是直角，而圖中画成了鈍角和銳角。

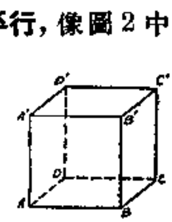


圖　2

(2) 兩条平行綫段或在同一条直綫上的兩綫段画在圖上

时，圖中綫段的比要和实际的比相同，像圖2中正方体的平行稜 AD、BC、$A'D'$ 和 $B'C'$ 都画成一样長。但是实际上不平行的兩綫段画在圖上时，它們的比一般要改变，像圖2中正方体的稜 AB 和 BC 实际上是相等的，而圖中 BC 画得較短。

画一个像圖2中的正方体时，通常使 $\angle ABC=135^\circ$，$\angle B'BC=45^\circ$，$AB:BC=1:\frac{1}{2}$。这样，画得的圖就比較直观。在平面內画正方体，按照圖3所示的步驟來作，比較正确。一般在实际画圖时，先画上底面，其次画側稜，最后画下底面。

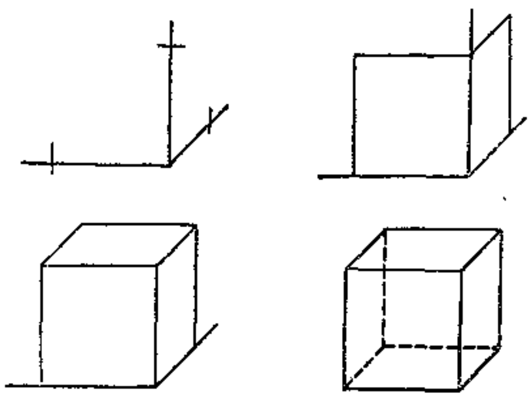
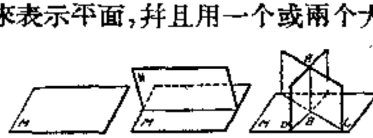


圖 3

§2. **平面的基本性質** 平面是立体几何的基本元素之一。我們可以从平靜的水面和光滑的玻璃板面獲得平面的概念。画圖时，我們通常用平行四边形來表示平面，并且用一个或兩个大寫的拉丁字母來記它，如圖4中的平面 M、平面 N、平面 AC 和平面 AD。不过要注意，几何学中所講的平面是四周沒有边界的。我們必須把圖中所画的平行四边形想像成是



(甲) (乙) (丙)

圖 4

在空間無限伸展着的平面。

平面有下列性質：

公理1　如果一条直綫上的兩点在一个平面內，那末这条直綫上所有的点都在这个平面內。

这时，我們說**直綫在平面內**，或**平面通过直綫**。

木工时常利用这个性質用曲尺的一边放在木板上移來移去，看尺边和木板之間有沒有空隙，來判断板面是不是平的。

公理2　如果兩个平面有一个公共点，那末它們相交于过这点的一条直綫。

兩个平面的交綫是一条直綫的实例很多，房間內兩牆面的交綫，就是一个例子。

公理3　过不在一条直綫上的任意三点可以作一个平面，而且只可以作一个平面。 也就是說，**不在一条直綫上的三点确定一个平面。**

平板仪

由不在一条直綫上的三点 A、B、C 所确定的平面，通常記作平面 ABC。

照相机和測量用的平板仪的架子都是三只脚的架子，就是根据这个性質的。如果用四脚架，便不容易放穩，因为四点不一定在同一个平面內。

从以上的公理，可以推得下面三个推論：

推論1　**过一条直綫和这条直綫外的一点可以作一个平面，而且只可以作一个平面。**

推論2　**过兩条相交直綫可以作一个平面，而且只可以作一个平面。**

推論3　**过兩条平行直綫可以作一个平面，而且只可以作**

一个平面。

現在來証明这些推論：

（1）設 A 是直綫 a 外的一点（圖 5）。在直綫 a 上任意取兩点 B 和 C，那末 A、B、C 是不在一条直綫上的三点。根据公理 3，过 A、B、C 三点可以作一个平面 M。因为直綫 a 上有兩点 B 和 C 在平面 M 内，根据公理 1，直綫 a 上所有的点都在平面 M 內。因此，平面 M 是过直綫 a 和点 A 的平面。

圖 5

其次，証明这样的平面只可以作一个。用反証法証明：如果过直綫 a 和点 A 的平面除平面 M 外，还有另一个平面 N，那末点 A、B、C 也都在平面 N 內。这样，过不在一条直綫上的三点 A、B、C 就可以作兩个平面 M 和 N 了。这就和公理 3 相矛盾。所以过直綫 a 和点 A 的平面只有一个。

（2）設 a 和 b 是相交于一点 A 的兩条直綫（圖 6）。在直綫 a 上取点 A 以外的任意一点 B，在直綫 b 上也取点 A 以外的一点 C。根据公理 3，过不在一条直綫上的三点 A、B、C 可以作一个平面 M。根据公理 1，平面 M 是过直綫 a 和 b 的平面。用推論 1 的証明中所用的同样方法可以証明，过直綫 a 和 b 的平面只有一个。

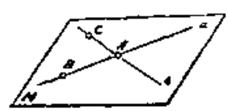


圖 6

（3）設 a 和 b 是兩条平行直綫（圖 7），那末根据平行直綫的定义（在同一个平面内不相交的兩条直綫叫做平行直綫），过直綫 a 和 b 可以作一个平面 M。如果还有一个平面 N 通过直綫 a 和 b，那末过直綫 a 和直綫 b 上的任意一点 A 就可以作兩个平面 M 和 N 了。这是不可能的。所以过平行

圖 7

直綫 a 和 b 的平面只有一个。

公理 3 和上面的三个推論是在空間确定平面位置的主要根据。

練 習 題

1. 求証：一个平面和不在这个平面內的一条直綫最多只能有一个公共点。

2. 設有不在一个平面內的四点。如果过其中的任意三点各作一个平面，一共可作几个平面？

3. 設有相交于一点而不在一个平面的三条直綫。如果过其中的任意兩条各作一个平面，一共可以作几个平面？

4. 設有一条直綫分別和兩条平行直綫相交。試問这三条直綫是不是在一个平面內？为什么？

§3. 空間的作圖題 解平面几何中的作圖題时，我們可以用直尺和圓規等画圖仪器在平面內把圖形作出來。但是，解空間几何的作圖題就不能用这种簡單的方法來完成了，因为首先我們不能用直尺和圓規直接在空間作圖；其次，在作空間圖形的时候又多了一个新的元素——平面，而在空間作平面是不能用直尺和圓規來完成的。所以，对于空間圖形的作圖，我們不要求用直尺和圓規在空間把圖形作出來。

关于空間圖形的作圖，我們首先規定下面的一些基本作圖是可以完成的：

1. 作一个平面，使它：1) 过不在一条直綫上的三个已知点；2) 过一条已知直綫和这条直綫外的一个已知点；3) 过兩条已知的相交直綫；4) 过兩条已知的平行直綫。

2. 作兩个已知的相交平面的交綫。

3. 在一个已知平面內用直尺和圓規作平面几何中所能完

成的一切作圖。

我們又規定，如果一个空間作圖題的作圖能够有限次地运用上面的基本作圖來完成，那末就称**这个作圖題是可以解的。**

下面举几个空間作圖的例題。

例 1. 过已知直綫 a 外的一个已知点 A，求作这条直綫的平行綫(圖 8)。

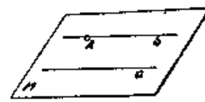


圖 8

要作直綫，必須先作出这条直綫所在的一个平面，然后在这个平面內再作所要求的直綫。

因为要求作的直綫通过点 A 而和直綫 a 平行，所以它一定在过直綫 a 和点 A 的平面內。而这个平面是可以作的。因此得到如下的作法：

过直綫 a 和点 A 作平面 M (基本作圖 1)。在平面 M 內过点 A 作直綫 a 的平行直綫 b(基本作圖 3)。直綫 b 就是所求作的直綫。

根据平行公理，过点 A 而平行于直綫 a 的直綫只有一条，所以本題只有一解。

例 2. 求作已知平面 M 和不在这个平面內的已知直綫 a 的公共点(圖 9)。

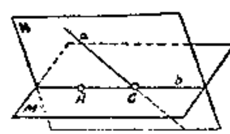


圖 9

要作平面 M 和直綫 a 的公共点，必須先作出一个过直綫 a 而和平面 M 相交的平面。如果直綫 a 和平面 M 有公共点，那末这个点就是直綫 a 和这兩个平面的交綫的交点。因此得到下面的作法：

在平面 M 內任意取一点 A。过点 A 和直綫 a 作平面 N。因为平面 N 和 M 有公共点 A，所以一定相交。作平面 M 和 N 的交綫 b。如果在平面 N 內的直綫 a 和 b 相交，那末作出它們的交点 C，点 C 就是所求作的点。这时，本題只有一解(假定直綫 a 和平面 M 除点 C 外还有别的公共点，那末直綫 a 就在平面 M 內了)。如果直綫 a 和 b 平行，那末本題沒有解。

練 習 題

5. 过已知直綫 a 外的一个已知点 A，求作直綫，使它和直綫 a 垂直

相交。

6. 过已知直綫 a 上的一个已知点 A，求作直綫 a 的垂綫。这样的垂綫有多少条？

7. 在已知平面 M 內，求作一条直綫，使它过这平面內的一个已知点 A，并且和不在这平面內的一条已知直綫 a 相交。

§4. 兩直綫的位置关系 兩条不重合的直綫如果有公共点，它們只能有一个公共点(假定它們有兩个公共点，那末这兩条直綫就合而为一了)。有一个公共点的兩条直綫(相交直綫)一定在同一个平面內(根据 §2 的推論 2)。如果兩条直綫沒有公共点而在同一个平面內，那末它們是平行直綫。我們可以証明，在空間还存在着不在同一个平面內的直綫。例如在圖 10 中，直綫 a 是不在平面 M 內而与平面 M 有公共点 A 的一条直綫，直綫 b 是在平面 M 內而不过点 A 的另一条直綫，那末直綫 a 和 b 就不在同一面平个內(假定直綫 a 和 b 在同一个平面內，那末过直綫 b 和点 A 就可以作兩个平面了，这是不可能的)。不在同一个平面內的兩条直綫叫做**異面直綫**，它們既不相交，也不平行。

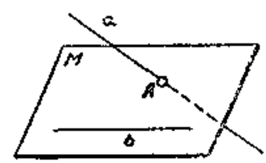


圖 10

根据以上的討論，我們得出空間兩条直綫可以有下列各种位置关系：

(1) 兩条直綫在同一个平面內(共平面)，这时它們可以 1) 有一个公共点(相交直綫)，或者 2)沒有公共点(平行直綫)。

(2) 兩条直綫不在同一个平面內，它們沒有公共点(异面直綫)。

§5. 直綫和平面的位置关系 如果一条直綫和一个平面有

两个公共点，那末这条直綫就在这个平面内。由此可以知道，不在平面内的一条直綫和这个平面的公共点不能多于一个。如果一条直綫和一个平面只有一个公共点，那末就說这条直綫和平面相交。

如果一条直綫和一个平面沒有公共点，那末我們就說**这条直綫和这个平面互相平行。**

从下面的定理可以知道互相平行的直綫和平面是存在的。

定理 1　不在一个平面内的一条直綫，如果和在这个平面内的一条直綫平行，那末这条直綫和这个平面互相平行。

假設：直綫 a 不在平面 M 内，它平行于平面 M 内的直綫 b (圖 11)。

圖　11

求証：直綫 a 平行于平面 M（記作 $a /\!/ M$）。

証明：因为 $a /\!/ b$，所以过直綫 a 和 b 可以作一个平面 N。这时直綫 b 就是平面 M 和 N 的交綫。假定直綫 a 和平面 M 有公共点，那末这个公共点一定在平面 N 内，又在平面 M 内，因此它就在平面 N 和 M 的交綫 b 上；这样，直綫 a 和直綫 b 就是相交直綫了，这和假設"直綫 a 和 b 平行"相矛盾，所以直綫 a 和平面 M 不能有公共点，即 $a /\!/ M$。

这个定理說明了互相平行的直綫和平面是存在的，同时还可以用它來判定直綫和平面的平行。

根据上面所講，我們得到直綫和平面有下列三种不同的位置关系：

（1）直綫在平面内，或平面通过直綫，这时直綫上的所有点都在平面内。

（2）直綫和平面相交，这时直綫和平面有一个公共点。

(3) 直綫平行于平面，这时直綫和平面沒有公共点。

互相平行的直綫和平面有下面的性質：

定理 2　如果一条直綫和一个平面平行，并且过这条直綫的一个平面和这平面相交，那末这条直綫就和这兩个平面的交綫平行。

假設：直綫 a 和平面 M 平行，平面 N 过直綫 a 而与平面 M 相交于直綫 b (圖 12)。

求証：$a /\!/ b$。

証明：直綫 a 和 b 在同一个平面 N 内，因此，要証明它們平行，只要証明它們沒有公共点就可以了。假定直綫 a 和 b 有公共点，那末由于这个公共点在直綫 b 上，因而也在平面 M 内。这样，直綫 a 就和平面 M 相交。这就和假設相矛盾了，所以直綫 a 和 b 不能有共同点，也就是 $a /\!/ b$。

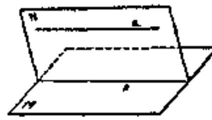


圖 12

定理 3　如果一条直綫和一个平面平行，那末过这平面内的一点而和这直綫平行的直綫必在这个平面内。

假設：直綫 a 和平面 M 平行，直綫 b 是过平面 M 内的一点 A 而和直綫 a 平行的直綫(圖 13)。

求証：直綫 b 在平面 M 内。

証明：过平行直綫 a 和 b 作一个平面 N，那末平面 N 必和平面 M 相交于过点 A 的一条直綫 b'。因为 $a /\!/ M$，根据定理 2，$a /\!/ b'$。但是过点 A 只能有一条直綫和直綫 a 平行，所以直綫 b' 和 b 重合。因此，直綫 b 在平面 M 内。

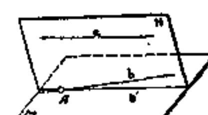


圖 13

用前面的定理可以推得下面的判定空間兩条直綫平行的定理。

定理 4　如果兩个相交平面分別通过兩条平行直綫，那末它們的交綫就和这兩条直綫平行。

假設：直綫 a 和 b 平行，平面 M 和 N 分別过直綫 a 和 b，并且相交于直綫 c（圖 14）。

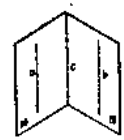


圖 14

求証：$c \parallel a$，$c \parallel b$。

証明：因为直綫 a 和平面 N 內的直綫 b 平行，所以 $a \parallel N$（根据定理 1）。因为 $a \parallel N$，直綫 c 是过直綫 a 的平面 M 和平面 N 的交綫，所以 $a \parallel c$（根据定理 2）。同理可以証明 $b \parallel c$。

定理 5　如果兩条直綫都平行于第三条直綫，那末它們也互相平行。

假設：直綫 a 和 b 都和直綫 c 平行（圖 15）。

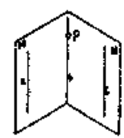


圖 15

求証：$a \parallel b$。

証明：如果这三条直綫在同一个平面內，那末这个定理就是平面几何中的定理。

如果这三条直綫不在同一个平面內，那末平面几何中的証法就不能用了，我們要用另外的方法來証明：

要証明直綫 a 和 b 平行，只要証明直綫 b 是过直綫 a 的平面和过直綫 c 的平面的交綫。

我們先在直綫 b 上任取一点 P，过点 P 和直綫 a 作一个平面 M，再过点 P 和直綫 c 作一个平面 N，这兩个平面必相交于过点 P 的一条直綫。根据定理 3，这条直綫平行于直綫 a 和 c。但是直綫 b 是过点 P 而平行于直綫 c 的直綫，所以由平行公理，直綫 b 就是平面 M 和 N 的交綫。因此 $a \parallel b$。

§6. 兩平面的位置关系　兩个平面如果有一个公共点，那末根据公理 2，它們必相交于过这个公共点的一条直綫。如果兩