

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材  
数学与应用数学专业系列教材

# 应用概率统计

主编 陶剑

中央广播电视大学出版社

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材  
数学与应用数学专业系列教材

# 应 用 概 率 统 计

主编 陶 剑

中央广播电视大学出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

应用概率统计/陶剑主编. - 北京: 中央广播电视大学出版社, 2003.7

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材.

数学与应用数学专业系列教材

ISBN 7-304-02415-1

I. 应... II. 陶... III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 067961 号

版权所有, 翻印必究。

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

数学与应用数学专业系列教材

### 应用概率统计

主编 陶 剑

---

出版·发行/中央广播电视大学出版社

经销/新华书店北京发行所

印刷/北京密云胶印厂

开本/B5 印张/25 字数/442 千字

---

版本/2003 年 7 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷

印数/0001-5000

---

社址/北京市复兴门内大街 160 号 邮编/100031

电话/66419791 68519502

(本书如有缺页或倒装, 本社负责退换)

网址/http://www.crtvup.com.cn

---

书号: ISBN 7-304-02415-1/O·130

定价: 32.00 元

## 主 要 内 容

本书是中央广播电视大学数学与应用数学专业（本科）应用概率统计课程教材，是以教育部最新制定的高等师范本科学历教育应用概率统计课程教学大纲为依据，结合中国远程教育特点编写的。全书从远程师范教育特点出发，在内容编排上力求突出重点，分散难点；在理论方面坚持以必需、够用为度，并注意与实践相结合；在编写工艺上具有国际远程教育教材的编写特色。

全书共有 10 章，包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析、正交试验设计。

本书也可供高等师范院校数学专业的师生学习参考。

# 序 言

21 世纪，中国全面地进入了一个新的发展与竞争的时代。归根结底，竞争是人才的竞争与知识的竞争，团体竞争的优胜者将是那些具有一批高水平人才的团体；个体竞争的优胜者将是那些具有现代科学知识与超群工作能力的人。在这竞争的时代，青年人渴望学习到适应工作岗位需要的知识。正是在这种环境下，中央广播电视大学与东北师范大学为满足一大批中学数学教师的要求，联合开办了（师范类）本科数学与应用数学专业。

本专业的开办，为追求知识的中学青年教师开辟了一条前进的道路，而知识的获取，要靠学习者的辛勤劳动。可以说，学习是一项艰苦的劳动。这项劳动与其他劳动的一个显著区别是：学习不能由别人代替来完成，甚至也不能合作完成。特别是数学知识的学习，必须经过学习者一番夜不能寐的（有时甚至是痛苦的）冥思苦想，才能掌握数学的本质，才能体会到数学的真谛，才能达到由此及彼、由表及里的境界。

数学是众多学科中最为抽象的学科。正是因为它高度的抽象性，决定了它广泛的应用性，同时也造成了数学学习的困难。毋庸讳言，相对其他学科来说，学习数学需要花费更多的时间与精力。但是，数学并不是高不可攀的科学。数学的学习如同攀登高楼一样，只要一步一个台阶（而不是两个台阶，三个台阶……，更不是飞跃）地拾级而上，我们并不觉得太困难即可攀上高楼。同样，只要学习者扎扎实实地掌握这一步知识，再去学习下一步的内容，循序渐进，数学就可以成为任你的思维纵横驰骋的自由王国。

作为教师，要充分地考虑到学生在自学过程中遇到的各种困难。我们在教材的编写中，尽最大可能地使教材通俗易懂，由易到难，深入浅出，便于自学，适当地做出一些注释，引导学生深入理解知识。每章开始给出本章学习目标和导学，每章的结尾做出本章的总结，指出本章的重点及难点，并安排了学习辅导内容，介绍典型例题，同时配备了自测题目。

## 2 应用概率统计

中央广播电视大学与东北师范大学联合开办的本科数学与应用数学专业处于刚刚起步阶段，我们的教师首次编写这套教材，一切处于探索的过程中，因此，这套教材难免有这样或那样的不妥之处。我们热情地欢迎本套教材的读者，提出宝贵的批评意见和改进的建议，使我们的教师及时地改进这套教材，以提高后面学生的学习效果。

史宁中

于长春

2002年4月25日

统计学是什么？  
统计学是什么？  
统计学是什么？

统计学是对令人困惑费解的  
问题作出数学设想的艺术

# 前 言

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律性的数学学科。一方面，它有其自己独特的概念和方法，内容十分丰富；另一方面，它已充分渗透到很多相关领域。近年来，随着科学技术的迅猛发展，概率论与数理统计在经济、教育、遗传、医药、物理、化学、环境污染、政治及社会科学、心理学等方面均发挥着至关重要的作用。

按照中央广播电视大学数学与应用数学专业本科培养目标的要求，结合教育部面向 21 世纪理科类课程教学和教学内容改革的有关精神，配合“广播电视大学开展人才培养模式改革”的研究进行课程设计，我们编写了本教材。

按照“以学生为中心”的现代教学思想，针对以电大学员业余学习为主的学习形式和学习对象、知识基础参差不齐的特点，本教材的编写在符合教学大纲要求的前提下，不过分追求深度，而是把着眼点放在激发学员的自学兴趣，最终达到以学员自主学习的目标。

本教材共分 10 章。在教材内容的选编方面，我们力求明确目的，突出重点，讲清难点，同时兼顾学生的特点，注重启发性，由浅入深，循序渐进。各章一开始就明确地提出了学习目标。同时，在选材和叙述上尽量做到从实际背景出发，注重应用，学员通过选材不难发现本门课程与生活实际的密切联系。每节后均配有练习题，章后配有习题。此外，为方便学员自学，各章后均有总结，概述了本章的主要内容。

为了让学员更好地理解 and 消化所学的基本内容，各章均配有学习指导。在学习指导中，首先指出了重点、难点，然后给出典型例题，再对应给出练习题，最后配有自测题，便于学员自测自检，积小胜为大胜。

本书的写作分工如下：第 1 章至第 5 章由陶剑执笔，第 6 章至第 8 章由朱晓鸽执笔，第 9 章至第 10 章由敬莲执笔；全书由陶剑统稿。本书从大纲审订到教材内容的编选，都得到了北京师范大学杨文礼教授、北京航空航天大学

## 2 应用概率统计

李卫国教授、北京大学耿直教授与首都师范大学姚芳博士的帮助与指导，他们为编者提出了很多宝贵的意见，使本书增色不少。在本书的编写过程中，东北师范大学数学系、中央广播电视大学师范部给予了大力支持。中央广播电视大学出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动。此外，本书编写过程中，参考了大量国内外优秀教材和文献资料，特别是在习题选配方面，吸取了其中不少精华。谨在此一并致谢。

由于我们水平有限，书中的缺点、错误一定不少，恳请读者、专家批评指正。

编 者

# 目 录

|                        |       |
|------------------------|-------|
| 第1章 随机事件与概率            | ( 1 ) |
| 1.1 样本空间与随机事件          | ( 4 ) |
| 1.2 概率的定义及性质           | (10)  |
| 1.3 古典概型               | (13)  |
| 1.4 条件概率与概率乘法公式        | (18)  |
| 1.5 随机事件的独立性           | (24)  |
| 1.6 伯努利 (Bernoulli) 概型 | (28)  |
| 学习指导                   | (35)  |
| 第2章 随机变量及其分布           | (44)  |
| 2.1 随机变量及分布函数          | (46)  |
| 2.2 离散型随机变量及其分布律       | (49)  |
| 2.3 连续型随机变量及其概率密度函数    | (59)  |
| 2.4 随机变量的函数的分布         | (66)  |
| 学习指导                   | (72)  |
| 第3章 多维随机变量及其分布         | (81)  |
| 3.1 二维随机变量与联合分布函数      | (83)  |
| 3.2 二维离散型随机变量          | (84)  |
| 3.3 二维连续型随机变量          | (88)  |
| 3.4 随机变量的独立性           | (94)  |
| 3.5 随机变量函数的分布          | (99)  |
| 学习指导                   | (114) |

|                              |       |
|------------------------------|-------|
| <b>第4章 随机变量的数字特征</b> .....   | (128) |
| 4.1 数学期望 .....               | (131) |
| 4.2 方差 .....                 | (138) |
| 4.3 协方差及相关系数 .....           | (143) |
| 4.4 原点矩与中心矩 .....            | (147) |
| 学习指导 .....                   | (151) |
| <b>第5章 大数定律与中心极限定理</b> ..... | (159) |
| 5.1 契比雪夫不等式 .....            | (161) |
| 5.2 大数定律 .....               | (164) |
| 5.3 中心极限定理 .....             | (168) |
| 学习指导 .....                   | (174) |
| <b>第6章 数理统计的基本概念</b> .....   | (180) |
| 6.1 总体与样本 .....              | (182) |
| 6.2 样本函数与统计量 .....           | (186) |
| 6.3 3种重要分布 .....             | (193) |
| 6.4 正态总体统计量的分布 .....         | (205) |
| 学习指导 .....                   | (212) |
| <b>第7章 参数估计</b> .....        | (223) |
| 7.1 矩估计 .....                | (225) |
| 7.2 最大似然估计 .....             | (230) |
| 7.3 判断估计量好坏的标准 .....         | (236) |
| 7.4 区间估计 .....               | (240) |
| 学习指导 .....                   | (251) |
| <b>第8章 假设检验</b> .....        | (262) |
| 8.1 假设检验的基本思想和概念 .....       | (264) |
| 8.2 正态总体均值的假设检验 .....        | (267) |
| 8.3 正态总体方差的假设检验 .....        | (275) |

|                            |              |
|----------------------------|--------------|
| 学习指导 .....                 | (283)        |
| <b>第9章 回归分析与方差分析 .....</b> | <b>(293)</b> |
| 9.1 回归分析 .....             | (295)        |
| 9.2 方差分析 .....             | (308)        |
| 学习指导 .....                 | (324)        |
| <b>第10章 正交试验设计 .....</b>   | <b>(338)</b> |
| 10.1 正交表及应用实例 .....        | (339)        |
| 10.2 正交试验设计的实施步骤 .....     | (344)        |
| 学习指导 .....                 | (349)        |
| <b>附    表 .....</b>        | <b>(354)</b> |
| <b>参考文献 .....</b>          | <b>(383)</b> |

# 第 1 章 随机事件与概率

- 1.1 样本空间与随机事件
- 1.2 概率的定义及性质
- 1.3 古典概型
- 1.4 条件概率与概率乘法公式
- 1.5 随机事件的独立性
- 1.6 伯努利(Bernoulli)概型

## [相关资料]

### 赌博与概率论

《重要的艺术》一书的作者，意大利医生、数学家卡当 (Cardano)，据说曾大量地进行过赌博游戏。他在赌博时研究不输的方法，实际上这正是概率论的萌芽。

据说卡当曾参加过这样的一种赌博：把 2 颗骰子掷出去，以每个骰子朝上的点数之和作为赌的内容。已知骰子的 6 个面上分别为 1~6 点，那么，赌注下在多少点上最有利呢？

表 1-1

|   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|----|----|----|
| 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

2 个骰子朝上的面共有 36 种可能，点数之和分别可为 2~12，共 11 种。从表 1-1 中可知，7 是最容易出现的和数，它出现的概率是  $6/36 = 1/6$ 。

卡当曾预言说押 7 最好. 现在看来这个想法是很简单的, 可是在卡当的时代应该说是很杰出的思想方法. 在那个时代, 虽然概率论的萌芽有些进展, 但还没有出现真正的概率论.

公元 1651 年夏天, 当时盛誉欧洲、号称“神童”的数学家巴斯卡 (Pascal), 在旅途中偶然遇到了赌徒德·美尔 (De Mere). 德·美尔是一个贵族公子哥儿, 他对巴斯卡大谈“赌经”, 以消磨旅途时光. 德·美尔还向巴斯卡请教一个亲身所遇的“分赌金”问题.

问题是这样的: 一次, 德·美尔和赌友掷骰子, 各押赌注 32 个金币, 德·美尔若先掷出 3 次“6 点”, 或赌友先掷出 3 次“4 点”, 就算赢了对方. 赌博进行了一段时间, 德·美尔已掷出了 2 次“6 点”, 赌友也掷出了 1 次“4 点”. 这时, 德·美尔奉命要立即去晋见国王, 赌博只好中断. 那么两人应该怎么分这 64 个金币的赌金呢?

赌友说, 德·美尔要再掷 1 次“6 点”才算赢, 而他自己若能掷出 2 次“4 点”也就赢了. 这样, 自己所得应该是德·美尔的一半, 即得 64 个金币的  $1/3$ , 而德·美尔得  $2/3$ . 德·美尔争辩说, 即使下一次赌友掷出了“4 点”, 两人也是秋色平分, 各自收回 32 个金币, 何况那一次自己还有一半的可能得 16 个金币呢? 所以他主张自己应得全部赌金的  $3/4$ , 赌友只能得  $1/4$ .

公说公有理, 婆说婆有理, 德·美尔的问题居然把巴斯卡给难住了. 他为此苦苦想了 3 年, 终于在 1654 年悟出了一点儿道理. 于是他把自己的想法写信告诉他的好友, 当时号称数坛“怪杰”的费尔马 (Fermat), 两人对此展开热烈的讨论. 后来荷兰数学家惠更斯 (Huygens) 也加入了他们的探讨行列. 最后, 他们一致认为, 德·美尔的分法是对的! 惠更斯还把他们的讨论的结果载入 1657 年出版的一本叫《论赌博中的推理》的书中, 这本书至今被公认为概率论的第一部著述.

赌金风波终于以一个新的数学分支——概率论登上历史舞台宣告平息.

概率论从赌博的游戏开始, 完全是一种新的数学方法, 现在它在许多领域发挥着越来越大、十分重要的作用.

## [学习目标]

- 1) 了解随机事件的概念, 掌握事件间的关系与运算.
- 2) 理解概率的含义, 掌握概率的基本性质和加法定理, 会计算简单的古典

概率.

3)理解条件概率的概念和事件独立性概念,掌握乘法定理,会利用全概率公式和贝叶斯公式.

4)掌握伯努利概型和二项概率的计算方法.

## [导 学]

本章介绍一种新的但普遍存在的现象——随机现象.在大量随机现象中存在着统计规律性,概率论便是研究随机现象的一门数学学科.

“事件”与“概率”是概率论中最基本的两个概念.为了使读者清楚地理解事件与概率的直观意义,我们将采用由具体到抽象,由简单到复杂,由特殊到一般的方式介绍概率的计算方法,并从中归纳出事件与概率的本质特征,为读者深入学习奠定基础.

独立性是概率论中最重要的概念之一,它是概率论中特有的概念.在独立性假定下得到的结果构成了经典概率论的主要内容.

事件的运算与概率的计算是本章的基本内容,也是学习以后各章的必要基础,务必牢固掌握.正确地进行概率计算的前提和常用的技巧是恰当地将复杂的事件“拆分”成一些较简单的事件的关系式,而后运用加法公式与乘法公式即可算出结果.

鉴于本章的内容对于中学数学教学有直接的指导作用,希望读者多做练习,熟练掌握各种解题技巧.

## [思 考]

- 1)概率与条件概率有何区别?又有何联系?
- 2)如何理解事件的独立与互斥?
- 3)事件的相互独立与两两独立关系如何?

100张电影票中,有1张甲票,99张乙票.从这100张电影票中任取1张,众所周知,最可能取得乙票.取得甲票的可能性不能说没有,却是很小的.投掷一枚硬币,正面朝上的可能与反面朝上的可能应该说是一样的,由此,人们常常用投掷硬币的办法来决定一场球赛中哪个队先发球.诸如此类的事情,在

实践中还会遇到许多. 我们必须对每个事件讨论其发生的可能性的, 并进行比较.

概率就是事件发生可能性大小的一种数值量度. 在这一章中, 我们将定义事件及事件的概率, 并讨论相应的性质, 重点放在如何计算一个事件的概率上.

## 1.1 样本空间与随机事件

### 1.1.1 随机试验与随机事件

在自然界, 在人们的实践活动中所遇到的现象一般可分为 2 类:

一类现象是, 在一定条件下, 必然会出现某种确定的结果. 例如, 在标准大气压下, 水加热到  $100^{\circ}\text{C}$  时沸腾, 是确定会发生的现象. 向上抛一枚硬币, 由于受到地心引力的作用, 硬币上升到某一高度后必定会下落. 我们把这类现象称为确定性现象 (或必然现象).

另一类现象则是, 在一定的条件下, 可能会出现各种不同的结果, 也就是说, 在完全相同的条件下, 进行一系列观测或实验, 却未必出现相同的结果. 例如, 抛掷一枚硬币, 当硬币落在地面上时, 可能是正面朝上, 也可能是反面朝上, 在硬币落地之前我们不能预知究竟哪一面朝上. 我们把这类现象称为随机现象 (或偶然现象).

我们生活着的世界充满着不确定性, 人们虽然能够精确地预卜尚未发生的确定现象的结果, 却难以预卜尚未发生的随机现象的结果. 我们人类就生活在这种随机现象的海洋里.

从表面上看, 随机现象的每一次观察结果都是偶然的, 似乎是不可捉摸的, 其实不然. 人们通过实践观察到并且证明了, 在相同的条件下, 多次观察某个随机现象, 立即可以发现: 在大量的偶然之中存在着必然的规律. 例如, 多次重复抛一枚硬币, 正面朝上和反面朝上的次数几乎相等; 对某个靶进行多次射击, 虽然各次弹着点不完全相同, 但这些点却按一定的规律分布; 等等. 我们把随机现象的这种规律性称为统计规律性.

应用概率统计就是研究大量随机现象统计规律性的一门数学学科.

为了研究随机现象的统计规律性, 我们把各种科学试验和对某一事物的观测统称为试验. 如果试验具有下述特点:

1° 可以在相同的条件下重复地进行,

2° 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果,

3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现,  
则称这种试验为**随机试验**, 简称**试验**. 通常用字母  $E$  或  $E_1, E_2, \dots$  表示随机试验.

随机试验  $E$  的所有可能基本结果组成的集合称为  $E$  的**样本空间**, 记为  $S$ . 样本空间的元素, 即  $E$  的每个结果, 称为**样本点**.

试验  $E$  的样本空间  $S$  的子集称为  $E$  的**随机事件**, 简称**事件**. 在每次试验中, 当且仅当给定子集中的一个样本点出现时, 称这一事件发生. 从直观上讲, 所谓随机事件是指在一次试验中可以发生(出现), 也可以不发生(不出现)的事件.

由一个样本点组成的单点集, 称为**基本事件**. 由若干基本事件复合而成的事件称为**复合事件**.

样本空间  $S$  包含所有的样本点, 它是  $S$  自身的子集, 在每次试验中它总是发生的, 称为**必然事件**. 空集  $\emptyset$  不包含任何样本点, 也是  $S$  的子集, 它在每次试验中都不发生, 称为**不可能事件**.

**例 1.1.1** 试验  $E$ : 在一个口袋中装有白、黑 2 个球, 从中随机取 1 球, 记下它的颜色. 在这个试验中, 样本空间  $S$  由下列 2 个基本事件构成:

$$\omega_1 \triangleq \{\text{取得白球}\}, \omega_2 \triangleq \{\text{取得黑球}\},$$

$$S = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

**例 1.1.2** 试验  $E$ : 在一个口袋中装有白、黑 2 个球, 从中随机取 1 球, 记下它的颜色. 然后放回, 再取 1 球, 又记下它的颜色. 在这个试验中要考虑取球的顺序. 为简便起见, 我们把“第 1 次取得白球, 第 2 次取得白球”这一事件记为  $\{\text{白、白}\}$ , 并依此类推, 可知样本空间  $S$  由下列 4 个基本事件构成:

$$\omega_1 \triangleq \{\text{白、白}\}, \omega_2 \triangleq \{\text{白、黑}\}, \omega_3 \triangleq \{\text{黑、白}\}, \omega_4 \triangleq \{\text{黑、黑}\},$$

$$S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}.$$

**注** 由于取球的顺序应予考虑, 所以事件  $\{\text{黑、白}\}$  与事件  $\{\text{白、黑}\}$  是 2 个不同的事件.

**例 1.1.3** 试验  $E$ : 观察某电话交换台在某一段时间内接到的呼唤次数. 这时, 样本空间由下面可列个基本事件组成:

$$\omega_i \triangleq \{\text{接到 } i \text{ 次呼唤}\}, i = 0, 1, 2, \dots$$