

编 号

高等数学练习册

(下 册)

G

西北工业大学高等数学教材编写组 编

AODENG SHUXUE LIANXICE

姓名 _____

45

班级 _____

学号 _____



西北工业大学出版社

高等数学练习册

(下册)

西北工业大学高等数学教材编写组 编

西北工业大学出版社

前　言

高等数学是工科院校最重要的基础课之一,学生对其内容掌握的程度如何,不仅直接影响到后续课程的学习,而且对今后工作将产生重要影响。在高等数学课程的学习中,学生不仅要注重获取必要的数学知识,更为重要的是,在获取数学知识的同时,要努力提高自己的抽象思维、逻辑推理、运算技能、综合应用等方面的能力。一本好的作业集,对内容的消化、所学知识的巩固以及上述各种能力的培养与训练,都将有重要的作用。

本练习册是由西北工业大学应用数学系具有丰富教学经验的教师于1993年编写完成并开始在教学中使用的。十二年来,曾几次修订、完善。习题的深广度,紧扣原国家教委颁发的“高等工业学校高等数学课程教学基本要求”。实践表明,使用该作业集,对保证高等数学课的教学质量起到了积极的作用。

本练习册与西北工业大学高等数学教材编写组编的《高等数学》教材配套使用。全书共分十二章,每一章由若干节及总习题组成。各节中的习题是大课后的作业,每一章的总习题是习题课后的作业。本作业集共分四册,这是为了方便学生交作业而编排的,为了提高学生对数学的兴趣,开阔眼界,增长知识,作业集中还穿插了一些数学家简介、数学笑话、智力趣题等,可以使学生的大脑在紧张中得到放松。每册书的末尾都附有习题答案。

参加本书编写工作的有肖亚兰、陆全、孟雅琴、杨月茜、刘哲、刘小冬、郑红婵、符丽珍、李云珠、郑兴媛、陈瑜、杨敬娟、王寿生、陈淑云。

限于编者水平,书中难免有错误、疏漏之处,敬请同行们批评指正。

编　者

2005年5月

目 录

第八章 多元函数微分法及其应用	1
第一节 多元函数的极限与连续	1
第二节 多元函数的偏导数	2
第三节 多元函数的全微分	4
第四节 多元复合函数的求导法则	5
第五节 隐函数的微分法	7
第六节 多元函数微分学的几何应用	9
第七节 方向导数与梯度	11
第八节 多元函数的极值与最优化问题	12
第九章 重积分	14
第一节 重积分的概念与性质	14
第二节 二重积分的计算	15
第三节 三重积分的计算	21
第四节 重积分的应用	25
第十章 曲线积分与曲面积分	28
第一节 第一类曲线积分	28
第二节 第二类曲线积分	30
第三节 格林公式	32
第四节 第一类曲面积分	35
第五节 第二类曲面积分	37
第六节 高斯公式 通量与散度	39
第七节 斯托克斯公式 环量与旋度	41
第十一章 无穷级数	43
第一节 常数项级数的基本概念和性质	43
第二节 正项级数及其审敛法	44
第三节 任意项级数的审敛法	46
第四节 幂级数	47
第五节 函数展开成幂级数	49
第六节 傅里叶级数	52

第七节 一般周期函数的傅里叶级数	54
第十二章 微分方程	56
第一节 微分方程的基本概念	56
第二节 可分离变量的微分方程和一阶线性微分方程	57
第三节 可利用变量代换法求解的一阶微分方程	61
第四节 全微分方程	63
第五节 可降阶的高阶微分方程	65
第六节 线性微分方程通解的结构	67
第七节 二阶常系数齐次线性微分方程	68
第八节 二阶常系数非齐次线性微分方程	71
习题答案与提示	74

第八章 多元函数微分法及其应用

第一节 多元函数的极限与连续

1. 填空.

(1) 设 $f(x, y) = 3x + 2y$, 则 $f(xy, f(x, y)) = \underline{\hspace{10mm}}$.

(2) 设 $f\left(y, \frac{x+y}{x}\right) = x + y^2$, 则 $f(x, y) = \underline{\hspace{10mm}}$.

(3) 设 $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x}-1)$, 若当 $y=1$ 时 $z=x$, 则函数 $f(x) = \underline{\hspace{10mm}}$,
 $z = \underline{\hspace{10mm}}$.

(4) 函数 $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{10mm}}$.

(5) 函数 $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{10mm}}$, 此定义域可用平

面图形表示为 $\underline{\hspace{10mm}}$.

(6) 函数 $u = \ln(1 - x^2 - y^2)$ 在 $\underline{\hspace{10mm}}$ 是间断的.

2. 求极限:

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{e^{x^2+y^2}(x^2 + y^2)}$;

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, a)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

3. 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = 0$.

4. 证明极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ 不存在.

5. 讨论函数 $z = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}, & x^4 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^4 + y^2 = 0 \end{cases}$, 的连续性.

第二节 多元函数的偏导数

1. 填空.

$$(1) z = \ln \tan \frac{x}{y}, \text{ 则 } \frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) z = (1+xy)^y, \text{ 则 } \frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3) u = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}, \text{ 则 } \frac{\partial u}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}, \frac{\partial u}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}, \frac{\partial u}{\partial z} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(4) u = x^{y^z}, \text{ 则 } \frac{\partial u}{\partial z} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(5) \text{ 设 } f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2, \text{ 则 } f_z(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}, \\ f_{xz}(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}, f_{zx}(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}, \\ \text{ 故 } f_{zx}(2, 5, 3) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(6) \text{ 设 } f(x, t) = \int_{x-a}^{x+a} \varphi(u) du, (\varphi \text{ 为连续函数}), \text{ 则}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}, \frac{\partial f}{\partial t} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(7) \text{ 设 } u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}, \text{ 则}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}, u_y(0, \frac{\pi}{4}, 0) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 证明函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 但偏导数不存在.

3. 验证 $y = e^{-kt^2} \sin(nt)$ 满足 $\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

4. 求下列函数的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$(1) z = x^4 + y^3 - 4x^2y;$$

$$(2) z = \arctan \frac{y}{x}.$$

数学是科学的皇后, 而算术是数学的皇后, 而皇后又常常屈尊地为天文学和其他各门自然科学提供服务, 然而在整体关系中, 无论如何皇后总是被排列在首位的。

第三节 多元函数的全微分

1. 填空.

(1) 设 $z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 则 $dz = \underline{\hspace{10em}}$, $dz|_{(1,0)} = \underline{\hspace{10em}}$.

(2) 设 $u = \frac{s+t}{s-t}$, 则 $du = \underline{\hspace{10em}}$.

(3) 设 $u = (xy)^z$, 则 $du = \underline{\hspace{10em}}$.

2. 求函数 $z = \frac{y}{x}$ 当 $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.1, \Delta y = -0.2$ 时的全增量和全微分.

3. 求 $u(x, y, z) = x^y y^z$ 的全微分.

4. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 证明 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续且偏导

数存在, 但不可微.

第四节 多元复合函数的求导法则

1. 填空.

请把 d 及 ∂ 填入下列式子中的空括号里, 并写出计算结果.

(1) 设 $z = e^{x-2y}$, 而 $x = \sin t$, $y = t^3$, 则复合关系图为 _____, 从而

$$\frac{(\quad)z}{(\quad)t} = \frac{(\quad)z}{(\quad)x} \cdot \frac{(\quad)x}{(\quad)t} + \frac{(\quad)z}{(\quad)y} \cdot \frac{(\quad)y}{(\quad)t} = \quad,$$

(2) 设 $z = f(\sin x, \cos y, e^{x-y})$, 令 $u = \sin x$, $v = \cos y$, $w = e^{x-y}$, 则复合关系图为

_____, 且

$$\frac{(\quad)z}{(\quad)x} = \frac{(\quad)z}{(\quad)u} \cdot \frac{(\quad)u}{(\quad)x} + \frac{(\quad)z}{(\quad)w} \cdot \frac{(\quad)w}{(\quad)x} = \quad,$$

$$\frac{(\quad)z}{(\quad)y} = \frac{(\quad)z}{(\quad)v} \cdot \frac{(\quad)v}{(\quad)y} + \frac{(\quad)z}{(\quad)w} \cdot \frac{(\quad)w}{(\quad)y} = \quad.$$

2. 设 $z = u^2v - uv^2$, 而 $u = x\cos y$, $v = x\sin y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, 其中 $f(u)$ 为可导函数, 验证 $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

4. 设 $u = x^y$, 而 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 都是可微函数, 求 $\frac{du}{dt}$.

5. 设 $z = xy + xF(u)$, 而 $u = \frac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$.

6. 设 $z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

7. 设 $z = f(u, x, y)$, $u = xe^y$, 其中 f 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

8. 设 $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$, 其中 f 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

9. 如果 $F(x, y) = y \int_y^x e^{-t^2} dt$, 求 F_{xy} , F_{yy} .

第五节 隐函数的微分法

1. 设 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $e^z - xyz = 0$. (1) 用隐函数求导公式求 $\frac{\partial z}{\partial x}$; (2) 用复合函数求偏导数的方法求 $\frac{\partial z}{\partial x}$;

(3) 利用全微分形式不变性求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数, 证明由方程 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 满足 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$.

4. 已知 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ 时, 是把变量 _____ 视为自变量, 变量 _____ 与 _____ 视为变量 _____ 的函数. 求出 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{dz}{dx}$.

5. 已知 $\begin{cases} x = e^u + u \sin v \\ y = e^u - u \cos v \end{cases}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 时, 是把变量 _____ 与 _____ 看作自变量, 而把变量 _____ 与 _____ 都看作 _____ 与 _____ 的函数, 求出 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

6. 设 $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$, 求 dz .

第六节 多元函数微分学的几何应用

1. 求螺旋线 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = b\theta$ 在点 $(a, 0, 0)$ 处的切线及法平面方程.

2. 求曲线 $y^2 = 2mx, z^2 = m - x$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线及法平面方程.

3. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线及法平面方程.

4. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上的点, 使该点处的切平面与平面 $x - y + 2z = 0$ 平行.

5. 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使该点处的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$, 并写出该法线方程.

6. 证明锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} + 3$ 上任意一点处的切平面都通过锥面的顶点 $(0, 0, 3)$.

7. 试证曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a .

第七节 方向导数与梯度

1. 求函数 $u = xyz$ 在点 $(5, 1, 2)$ 处沿从点 $(5, 1, 2)$ 到点 $(9, 4, 14)$ 的方向导数.

2. 求函数 $u = x + y + z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 上点 $M_0(1, 1, 1)$ 处沿着球面在这点的外法线方向的方向导数.

3. 设 x 轴正向到方向 L 的转角为 φ , 求函数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(1, 1)$ 沿方向 L 的方向导数; 并分别确定转角 φ , 使该导数有:(1) 最大值;(2) 最小值;(3) 等于 0.

4. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上点 $(1, 1, 1)$ 处, 沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向) 的方向导数 .

5. 设函数 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$, 求 $\text{grad}f(0, 0, 0)$ 及 $\text{grad}f(1, 1, 1)$. 并求函数 $f(x, y, z)$ 在点 $(0, 0, 0)$ 处的方向导数的最大值 .

第八节 多元函数的极值与最优化问题

1. 求函数 $f(x, y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$ 的极值 .

2. 求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值 .