编 号

高等数学练习册

（下 册）

西北工业大学高等数学教材编写组 编

GAODENG SHUXUE LIANXICE

姓名 ____________________

班级 ____________________

学号 ____________________

西北工业大学出版社

高等数学练习册

（下册）

西北工业大学高等数学教材编写组　编

西北工业大学出版社

前 言

高等数学是工科院校最重要的基础课之一，学生对其内容掌握的程度如何，不仅直接影响到后续课程的学习，而且对今后工作将产生重要影响。在高等数学课程的学习中，学生不仅要注意获取必要的数学知识，更为重要的是，在获取数学知识的同时，要努力提高自己的抽象思维、逻辑推理、运算技能、综合应用等方面的能力。一本好的作业集，对内容的消化、所学知识的巩固以及上述各种能力的培养与训练，都将有重要的作用。

本练习册是由西北工业大学应用数学系具有丰富教学经验的教师于1993年编写完成并开始在教学中使用的。十二年来，曾几次修订、完善。习题的深广度，紧扣原国家教委颁发的“高等工业学校高等数学课程教学基本要求”。实践表明，使用该作业集，对保证高等数学课的教学质量起到了积极的作用。

本练习册与西北工业大学高等数学教材编写组编的《高等数学》教材配套使用。全书共分十二章，每一章由若干节及总习题组成。各节中的习题是大课后的作业，每一章的总习题是习题课后的作业。本作业集共分四册，这是为了方便学生交作业而编排的，为了提高学生对数学的兴趣，开阔眼界，增长知识，作业集中还穿插了一些数学家简介、数学笑话、智力趣题等，可以使学生的大脑在紧张中得到放松。每册书的末尾都附有习题答案。

参加本书编写工作的有肖亚兰、陆全、孟雅琴、杨月茜、刘哲、刘小冬、郑红婵、符丽珍、李云珠、郑兴媛、陈瑜、杨敬娟、王寿生、陈淑云。

限于编者水平，书中难免有错误、疏漏之处，敬请同行们批评指正。

编 者

2005 年 5 月

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用

第一节　多元函数的极限与连续

1. 填空.

(1) 设 $f(x, y) = 3x + 2y$,则 $f(xy, f(x,y)) =$ ____________________.

(2) 设 $f\left(y, \dfrac{x+y}{x}\right) = x + y^2$,则 $f(x, y) =$ ____________________.

(3) 设 $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$,若当 $y = 1$ 时 $z = x$,则函数 $f(x) =$ ____________________, $z =$ ____________________.

(4) 函数 $u = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 的定义域是____________________.

(5) 函数 $z = \dfrac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ 的定义域是________________________,此定义域可用平面图形表示为____________________.

(6) 函数 $u = \ln(1 - x^2 - y^2)$ 在____________________是间断的.

2. 求极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{e^{x^2y^2}(x^2 + y^2)}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,a)} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

3. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = 0$.

4. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

5. 讨论函数 $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^4+y^2\neq 0\\ 0, & x^4+y^2=0\end{cases}$,的连续性.

第二节　多元函数的偏导数

1. 填空.

(1) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ __________, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ __________.

(2) $z=(1+xy)^y$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ __________, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ __________.

(3) $u=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$ __________, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=$ __________, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=$ __________.

(4) $u=x^{y^z}$,则 $\dfrac{\partial u}{\partial z}=$ __________.

(5) 设 $f(x, y, z)=xy^2+yz^2+zx^2$, 则 $f_z(x, y, z)=$ __________, $f_{zz}(x, y, z)=$ __________, $f_{zzx}(x, y, z)=$ __________, 故 $f_{zzx}(2, 5, 3)=$ __________.

(6) 设 $f(x, t)=\int_{x-at}^{x+at}\varphi(u)\mathrm{d}u$, ($\varphi$ 为连续函数),则

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=$ __________, $\dfrac{\partial f}{\partial t}=$ __________.

(7) 设 $u=\sqrt{\sin^2x+\sin^2y+\sin^2z}$,则

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=$ __________, $u_y\left(0, \dfrac{\pi}{4}, 0\right)=$ __________.

2. 证明函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在(0,0)处连续，但偏导数不存在.

3. 验证 $y=\mathrm{e}^{-kn^2t}\sin(nx)$ 满足$\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

4. 求下列函数的二阶偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(1) $z=x^4+y^3-4x^2y$；

(2) $z=\arctan\frac{y}{x}$.

数学是科学的皇后，而算术是数学的皇后，而皇后又常常屈尊地为天文学和其他各门自然科学提供服务，然而在整体关系中，无论如何皇后总是被排列在首位的。

第三节　多元函数的全微分

1. 填空.

(1) 设 $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,则 $dz=$ ______________, $dz\big|_{(1,0)}=$ __________.

(2) 设 $u=\dfrac{s+t}{s-t}$,则 $du=$ ______________.

(3) 设 $u=(xy)^z$, 则 $du=$ ______________.

2. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0.1$, $\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

3. 求 $u(x, y, z)=x^y y^z$ 的全微分.

4. 设 $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, 证明 $f(x, y)$ 在点(0, 0)处连续且偏导数存在,但不可微.

第四节　多元复合函数的求导法则

1. 填空.

请把 d 及 ∂ 填入下列式子中的空括号里,并写出计算结果.

(1) 设 $z=e^{x-2y}$,而 $x=\sin t$, $y=t^3$,则复合关系图为____________________,从而

$$\frac{(\quad)z}{(\quad)t}=\frac{(\quad)z}{(\quad)x}\cdot\frac{(\quad)x}{(\quad)t}+\frac{(\quad)z}{(\quad)y}\cdot\frac{(\quad)y}{(\quad)t}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

(2) 设 $z=f(\sin x,\cos y,e^{x-y})$,令 $u=\sin x$, $v=\cos y$, $w=e^{x-y}$,则复合关系图为

____________________,且

$$\frac{(\quad)z}{(\quad)x}=\frac{(\quad)z}{(\quad)u}\cdot\frac{(\quad)u}{(\quad)x}+\frac{(\quad)z}{(\quad)w}\cdot\frac{(\quad)w}{(\quad)x}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},$$

$$\frac{(\quad)z}{(\quad)y}=\frac{(\quad)z}{(\quad)v}\cdot\frac{(\quad)v}{(\quad)y}+\frac{(\quad)z}{(\quad)w}\cdot\frac{(\quad)w}{(\quad)y}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

2. 设 $z=u^2v-uv^2$,而 $u=x\cos y$, $v=x\sin y$,求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$,其中 $f(u)$ 为可导函数,验证 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

4. 设 $u=x^y$,而 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 都是可微函数,求 $\frac{du}{dt}$.

5. 设 $z=xy+xF(u)$，而 $u=\dfrac{y}{x}$，$F(u)$ 为可导函数，证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

6. 设 $z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

7. 设 $z=f(u,x,y)$，$u=xe^y$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

8. 设 $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$，其中 f 具有一阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

9. 如果 $F(x, y) = y\int_{y}^{x} e^{-t^2}\,dt$，求 F_{xy}，F_{yy}.

第五节　隐函数的微分法

1. 设 $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $e^z - xyz = 0$. (1) 用隐函数求导公式求 $\frac{\partial z}{\partial x}$；(2) 用复合函数求偏导数的方法求 $\frac{\partial z}{\partial x}$；(3) 利用全微分形式不变性求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，证明由方程 $\Phi(cx-az, cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x, y)$ 满足 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

4. 已知 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+2y^2+3z^2=20 \end{cases}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 时，是把变量______视为自变量，变量______与______视为变量______的函数．求出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

5. 已知 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^u+u\sin v \\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$ 时，是把变量______与______看作自变量，而把变量______与______都看作______与______的函数，求出 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$.

6. 设 $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$，求 $\mathrm{d}z$.

第六节　多元函数微分学的几何应用

1. 求螺旋线 $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$, $z = b\theta$ 在点$(a, 0, 0)$处的切线及法平面方程.

2. 求曲线 $y^2 = 2mx$, $z^2 = m - x$ 在点$(1, -2, 1)$处的切线及法平面方程.

3. 求曲线$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线及法平面方程.

4. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上的点,使该点处的切平面与平面 $x-y+2z=0$ 平行.

5. 在曲面 $z=xy$ 上求一点,使该点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$,并写出该法线方程.

6. 证明锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}+3$ 上任意一点处的切平面都通过锥面的顶点(0,0,3).

7. 试证曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}(a>0)$上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

第七节　方向导数与梯度

1. 求函数 $u=xyz$ 在点(5,1,2) 处沿从点(5,1,2) 到点(9,4,14) 的方向导数.

2. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 上点 $M_0(1,1,1)$ 处沿着球面在这点的外法线方向的方向导数.

3. 设 x 轴正向到方向 L 的转角为 φ,求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点(1,1) 沿方向 L 的方向导数;并分别确定转角 φ,使该导数有:(1) 最大值;(2) 最小值;(3) 等于 0.

4. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上点(1,1,1)处,沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向)的方向导数.

5. 设函数 $f(x, y, z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$,求 $\operatorname{grad} f(0,0,0)$ 及 $\operatorname{grad} f(1, 1, 1)$. 并求函数 $f(x,y,z)$ 在点(0,0,0)处的方向导数的最大值.

第八节　多元函数的极值与最优化问题

1. 求函数 $f(x, y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$ 的极值.

2. 求函数 $f(x, y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.