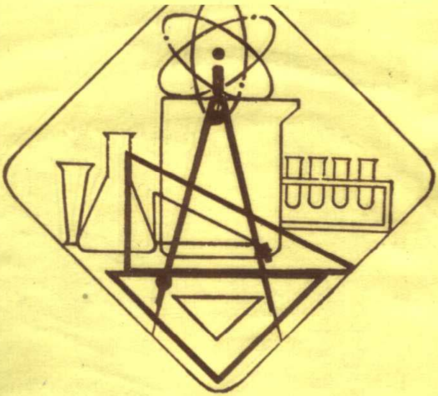
中学数理化学习指导丛书

初二代数辅导与练习



重庆出版社

中学数理化学习指导丛书

初二代数辅导与练习

北京市海淀区教师进修学校主编

重 庆 出 版 社

一九八二年·重庆

编　者

北京第三师范学校　　张君达
北京市十一学校　　王燕谋
北京市海淀区教师进修学校　　陈保民

初二代数辅导与练习

重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）
四川省新华书店重庆发行所发行
重庆新华印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　　印张5.5　　字数 116 千
1982年6月第一版　　1982年6月第一次印刷
印数：1—440,000

书号：7114·9　　定价：0.39元

前　言

长期以来，我们感到：学生迫切需要一种能帮助他们学好功课的课外读物；家长希望有一种能督促和检查自己孩子学习的材料；教师欢迎出版一种能帮助自己辅导学生的书籍。为了解决这种问题，我们组织了一些有教学经验的教师，编写了这套书。

通过教学实践，我们认识到：

（1） 只有把知识的结构分析清楚时，它才易于学生理解、记忆和运用；

（2） 打好基础，是学生学好全部知识的前提。在基础知识之中，重点、难点之处掌握不好，又是有些学生学习不好的原因；

（3） 引导学生对学过哪些主要题型心中有数，同时又掌握各类题型的解题规律，是提高学生解题能力的有效途径；

（4） 在学好基础知识的前提下，提高综合运用知识的能力，以及把知识向深、广两个方面进行适当的引申，对学习较好的学生来说，不但是可以的，而且是应该的。

（5） 知识必须通过不断地复习、检查，才能逐步深化、巩固。

基于以上认识，本书在编写时，朝以下几个方面做了一

些努力：

（1） 注重知识系统和结构的分析；

（2） 注重基础知识，尤其是重点、难点部分的详细、通俗的讲解；

（3） 注重把习题归类，列出主要题型，配以典型的例题，并说明解题规律；

（4） 注重介绍教师的经验和体会，并适当启发学生对所学的知识做更深入地思考；

（5） 在每单元之后，配备知识面尽量全、具有一定综合性、足以检查本单元的学习是否可以“通过”的自我检查题。

为了与学生在学校用的教材紧密配合，本书编排顺序与教材顺序一致。

限于编者水平，不免出现错误或不妥之处，我们诚恳地希望读者给予批评指正。

北京市海淀区教师进修学校

1982年元月

目　　录

第一章　数的开方和二次根式

本章的主要内容有数的开方运算、无理数和实数的概念与运算、根式和无理式的概念以及二次根式的性质与运算。

同学们在学习这一章的内容时，应该注意理解数的概念的扩充的意义，掌握根式与无理式的概念，熟练掌握二次根式的性质及其运算。

算术根问题是本章学习的一个重点，也是难点，应该在一开始就透彻理解算术根的概念，并掌握它的一些性质。在根式运算与其它问题中，应时刻注意算术根的问题。

待定系数法是一个重要的方法，在今后学习时要反复应用到。通过本章有关问题中所介绍的待定系数法的学习，要切实做到会使用待定系数法求解某些问题。如果能总结一下在什么样的条件下去应用待定系数法，就会更有效地为今后学习打下基础。

一　数的概念的扩充

数的概念的发展是实践的需要所决定的。例如人们需要知道一天中猎得野兽的数目，就要数数，再要记录下来就首先产生了数字：1、2、3、4、5、6、7、8、9和0，特别用“0”表示

没有。由于人有天然的计数器——两只手，因此自然便产生了十进位制记数法。十进位制记数法在记数与运算时非常方便，这一实践的需要使得它一直保留到今天，并且得到广泛地应用。

从数学本身的发展来看，一类新数的产生常常是某种运算的需要。例如定义了除法运算以后，2 ÷ 5 的结果不再是整数，这就需要定义一类新数——分数。同样，也可以认为引入负数的概念是减法运算的需要。到目前为止，我们已经把数的概念从整数、分数扩充到有理数。

有理数可以用两种不同的方法来分类：

$$(1)\ \text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\cdots\\ \text{正分数}\cdots\end{cases}\\ \text{零}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\text{非负有理数}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$(2)\ \text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{整数}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}\cdots\\ \text{零}\cdots\cdots\end{array}\right\}\text{非负整数}\\ \text{负整数}\end{array}\right.\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{array}\right.$$

应该注意：这两种分类中所指的分数是狭义的，即它不表示整数和零。如果以$\frac{m}{n}$表示这样的分数，那么 m 是自然数，n 是大于 1 的自然数，且 m 不能被 n 整除。

如果 m 是整数，n 是自然数，那么一切有理数都可以表示成分数$\frac{m}{n}$的形式。例如，

$$4=\frac{4}{1};\quad 0=\frac{0}{n};\quad 0.2=\frac{1}{5};\ 0.\dot{1}4285\dot{7}=\frac{1}{7}$$

这样规定的目的是为了把整数与分数的表示用有理数的形式统一起来。

事实上，任何一次数的概念扩充后所引进的新数，既应满足某种新的运算的需要，又应保持“旧”数的一切性质和运算规律。例如有理数的引入既满足了减法运算的需要，又保证了整数与分数的性质与运算律在有理数范围内仍然成立。

现在我们来学习一种新的运算——开方运算，同时引入由开方运算的需要所产生的一类新数——无理数。

我们先来回忆一下减法与除法是怎么引入的：

如果 $a+x=b$，那么求x的运算就叫做减法，x 叫做b 减a所得的差，记为

$$x=b-a;$$

如果 $a\cdot x=b$，那么求 x的运算就叫做除法，x 叫做 b 除以a所得的商，记为

$$x=b\div a$$

我们注意到这两种运算的引入共同具备三个特点：

（1） 减法与除法分别是在加法与乘法的基础上引入的；

（2） 假设 a、b 都是整数，减法运算的引入将需要产生一类新数——负数；假设 a、b 都是整数，且 $a\neq 0$，除法运算的引入将需要产生一类新数——分数；

（3） 如果 a、b 是某两个给定的数，那么减法运算的结果——差与除法运算的结果——商都存在并且是唯一的。

与此类似，我们将在乘方运算的基础上引入开方运算。

如果 $x^2=a$，那么求 x 的运算就叫做开平方，x 叫做 a 的平方根；

如果 $x^3=a$，那么求 x 的运算就叫做开立方，x 叫做 a 的立方根；

一般，如果 $x^n=a$ 且 n 是大于 1 的整数，那么求 x 的运算就叫做开 n 次方，x 叫做 a 的 n 次方根。

我们看到：开方运算是在乘方基础上引入的，事实上，它是乘方运算的一种逆运算。引入一种新的运算以后，首先应该考虑这种运算的结果是不是存在？如果运算的结果是存在的，那么这个结果是不是唯一？要回答这两个问题，特别是第一个问题，需要用到同学们还没有学过的一些知识，在这里，我们仅能以开平方运算为例作些浅显的说明。

如果 x 是 a 的平方根，那么 a 叫做被开方数。首先因为任何数的平方都是正数或零，所以负数没有平方根存在。这就是说只有当 a 是正数或零时，才有可能有平方根。例如，因为 $8^2=64$、且 $(-8)^2=64$、所以 8 与 -8 都是 64 的平方根；又如 $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，且 $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，所以 $\frac{2}{3}$ 与 $-\frac{2}{3}$ 都是 $\frac{4}{9}$ 的平方根。由此可知正数 64 与 $\frac{4}{9}$ 的平方根有两个，它们互为相反数。而 $0^2=0$，所以零的平方根是零。同样，对于 $x^n=a$，如果 n 是正偶数，那么仅当 a 是非负数时，a 才有可能有 n 次方根。

这就是说只有当被开方数 a 是非负数时，开平方的结果——平方根才有可能存在。同时从上面的例子看出：被开方数 a 是正数、且是完全平方数时，它的平方根是存在的，并且不

是唯一的。只有被开方数a是零时，它的平方根才是唯一的。

应该指出(不是证明)：当被开方数a是正数，但不是完全平方数时，它的平方根存在，且是两个互为相反符号的数。那么a的平方根是两个什么样的数呢？它们不再是互为相反符号的两个有理数，我们以a＝2为例来证明2的平方根不是有理数。

例1. 试证：没有一个有理数的平方等于2

证 如果有一个负有理数的平方等于2，那么与它相反的正有理数的平方也等于2。因此只需要证明没有一个正有理数的平方等于2就可以。

$\because$ $1^2<2<2^2$，$\therefore$ 任何正整数的平方都不等于2。

我们再证明任一正分数的平方也不等于2。用反证法。假定有一个正分数$\frac{m}{n}$(m、n是正整数，$n\neq 1$，$(m, n)=1$)* 它的平方等于2，即

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2,$$

于是 $m^2=2n^2$，因此m^2是一个偶数，m一定也是个偶数。

设$m=2m'$(m'是一个正整数)，代入上式，得

$$(2m')^2=2n^2$$

即 $$4m'^2=2n^2,\quad n^2=2m'^2$$

因此n^2一定是偶数，n也一定是偶数。

这就推出了m与n有公约数2，与假设$(m, n)=1$矛盾。于是证明了“没有一个有理数的平方等于2”。

假定我们已经知道2的平方根是存在的，并且例1已经证

---

* $(m, n)=1$表示m、n两数互质，即他们的最大公约数是1

明它们不是有理数，这就自然需要引进一类不是有理数的数。正象当a小于b时，减法$a-b$产生负数一样，对2进行开平方运算就产生了一个新的数。如果一个正数a的正的平方根用“$\sqrt{a}$”表示，负的平方根用“$-\sqrt{a}$”表示，那么2的平方根就用$\pm\sqrt{2}$表示。通过例1可以看出：$\sqrt{2}$不能写成一个有理数$\frac{m}{n}$（m是整数，n是自然数），即$\sqrt{2}$不是一个有限小数和无限循环小数。

在实践中，我们会遇到一种小数，它们不能写成有限小数或无限循环小数的形式。例如0.101001000100001…（两个1之间依次多一个0）；$\pi=3.14159265\cdots$，它们的小数位数是无限的，而且是不循环的。这样的小数叫做无限不循环小数。$\sqrt{2}$就是这样的无限不循环小数：

$$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$$

我们把无限不循环小数叫做无理数。例如

$$-\sqrt{5}=-2.236067\cdots;$$

$$\sqrt[3]{2}=1.259921\cdots;$$

都是无理数，但是$\sqrt{4}$，$-\sqrt[3]{27}$就不是无理数。

以上我们仅仅从开方运算的需要说明引入无理数的必要，但是应该注意并不是所有的无理数都是开方开不尽而产生的数，如π是无理数，但它不是由开方运算所产生的。因此不能说“无理数就是开方开不尽的数”。

有理数和无理数统称为实数，即实数可以作如下分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数：有限小数或无限循环小数。}\\\text{无理数：无限不循环小数。}\end{cases}$$

这样，在引入无理数的概念以后，我们又把数的概念从有理数扩充到实数。我们知道：在实数范围内四则运算总是可以实施的，这就是说对于任意的两个实数，它们的和、差、积、商(除数不为零)仍是实数。同时在进行这样的运算时，有理数的性质与运算律也同样适用。这样一条属性并不是在任何一个数的范围内都具备的。

例2 (1)两个有理数的和、差、积、商(除数不为零)还是有理数吗？证明你的结论；

(2)两个无理数的和、差、积、商(除数不为零)还是无理数吗？举例说明。

证：(1)一定是有理数。

设 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{m}{n}$ 是任意的两个有理数，其中 p、q、m、n 是整数，$q \neq 0$，$n \neq 0$，且 $(p,q)=1$，$(m,n)=1$。由此

$$\frac{p}{q} \pm \frac{m}{n} = \frac{pn \pm mq}{nq};$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{mp}{nq};$$

$$\frac{p}{q} \div \frac{m}{n} = \frac{np}{mq}.$$

由于p、q、m、n都是整数，因此上面各式右端的分子与分母都是整数，而且分母都不是零，故是有理数。

(2)不一定是无理数。例如，令 $\alpha=\sqrt{5}$、$\beta=-\sqrt{5}$，

则 $\alpha+\beta=0$ 不是无理数；

令 $\alpha=2+\sqrt{3}$，$\beta=2-\sqrt{3}$，则 $\alpha\beta=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$ 不是无理数；

令$\alpha=-5+\sqrt{2}$，$\beta=5+\sqrt{2}$，则$\alpha-\beta=(-5+\sqrt{2})-(5+\sqrt{2})=-10$不是无理数；

令 $\alpha=\sqrt{18}$，$\beta=\sqrt{2}$，则$\frac{\alpha}{\beta}=3$不是无理数。

如果适当选取α与β，还可以使它们的和、差、积、商是一个无理数。

每一次数的概念的扩充对数学本身的发展都具有重大的影响，深刻理解数的概念扩充的意义对今后的学习是非常重要的。

通过这一部分知识的学习，你能回答下述一组问题吗？

1．下面的语句对吗？如果不对，怎么说才对？

（1）无理数是开方开不尽的数；

（2）实数 a 不是有理数，就一定是无理数；

（3）因为-3的平方是9，所以9的平方根是-3；

（4）如果一个有理数的平方根仅等于它自身，那么这个有理数一定是零；

（5）一个整数与一个无理数的和仍是一个无理数；

2．两个不相等的无理数，它们的商能不能是一个整数？举例说明。

3．设K是一个正整数，能不能把K表成两个无理数的乘积？举例说明。

4．已知a、b是有理数，$\sqrt{c}$、$\sqrt{d}$是无理数，在什么条件下有等式

$$a+\sqrt{c}=b+\sqrt{d}$$

成立？

5．试证：$\sqrt{3}$是无理数。

二 算术根问题

同学们在学习数学的时候，经常会遇到一些有趣而又耐人寻味的问题。下面我们将向大家介绍关于一个命题的证明。

命题：$2\times 2=5$

证明 显然有

$$5^2=4^2+9$$

等式两端同时加上$-5\times 9+\left(\frac{9}{2}\right)^2$，有

$$5^2-5\times 9+\left(\frac{9}{2}\right)^2=4^2+9-5\times 9+\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

就是

$$5^2-2\times 5\times\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=4^2-2\times 4\times\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

变成完全平方的形式：

$$\left(5-\frac{9}{2}\right)^2=\left(4-\frac{9}{2}\right)^2$$

等式两端同时开平方：

$$5-\frac{9}{2}=4-\frac{9}{2}$$

由此有

$$5=4$$

即

$$2 \times 2 = 5$$

这个命题显然是错误的，从而我们断定关于这个命题的证明有毛病。那么毛病究竟出在哪一步的证明过程中呢？细心的同学会发现：尽管

$$\left(5-\frac{9}{2}\right)^2=\left(4-\frac{9}{2}\right)^2，即\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

但是$5-\frac{9}{2}$却不等于$4-\frac{9}{2}$，即$\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{2}$。这就是说虽然我们知道“如果两数相等，那么两数各自平方后的结果也相等”，但是不能反过来说“如果两个数的平方相等，那么这两个数一定相等”。这也就是说尽管命题“若$a=b$，则$a^2=b^2$”是正确的，但是命题“若$a^2=b^2$，则$a=b$”却是错误的。有的同学还会进一步提出问题：我们说“如果$a^2=b^2$，那么$a=b$”这句话是错的，是不是就等于说“如果$a^2=b^2$，那么$a\neq b$”这句话是正确的呢？你能回答这个同学的问题吗？举个具体的例子来说明。

这个问题的实质是问：a^2的平方根应该等于什么？特别，a^2的正的平方根等于什么？这正是我们要向同学们介绍的算术根问题，也是大家在学习本章的知识时遇到的一个重点与难点。

我们知道：正数a的偶次方根有两个，它们互为相反数，当根指数n是偶数时，正数a的正的n次方根用符号“$\sqrt[n]{a}$”来表示，负的n次方根用符号“$-\sqrt[n]{a}$”来表示，例如$\sqrt[4]{81}=3$，$-\sqrt[4]{81}=-3$，也可以把两个方根合起来写作$\pm\sqrt[4]{81}=\pm3$，即81的四次方根是±3。类似地有4的平方根是$\pm\sqrt{4}=\pm2$，5的平方根是$\pm\sqrt{5}$。