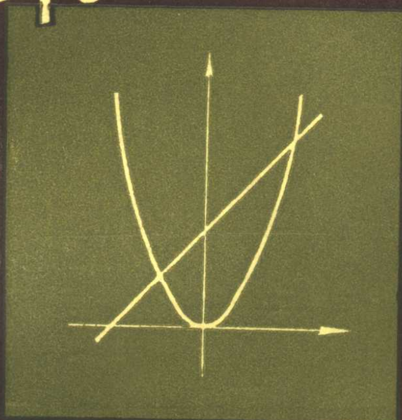
初中代数基础辅导



CHUZHONG DAISHU

江苏科学技术出版社

初中代数基础辅导

杨浩清　金炳麟
杨裕前　郑金锡　编

江苏科学技术出版社

1984.1.

初中代数基础辅导

杨浩清　金炳麟
杨裕前　郑金锡　编

出版：江苏科学技术出版社
发行：江苏省新华书店
印刷：南京人民印刷厂

开本787×1092毫米 1/32　印张 11.375　字数 260,000
1984年1月第1版　1984年1月第1次印刷
印数1—101,000册

书号：7196·018　　定价：0.96元

责任编辑　沈绍绪

前　言

本书是根据现行《中学数学教学大纲》和新编教材编写的。全书较详细地介绍了初中代数的基础知识，内容系统完整，重点突出，叙述简明扼要、深入浅出。编写中着眼于讲清基本概念，对解题方法作了必要的分类和归纳，所举范例力求典型、新颖。对难度稍大的范例，则作了详细的分析和说明；有些范例还采用了“一题多解”或“多题一解”，介绍不同的解题思路和思考方法，从而帮助读者加深理解数学基础知识，掌握必要的解题技巧。

本书可供初中学生和正在学习初中代数的在职职工和社会青年阅读，也可供中学数学教师参考。

此书的编写，得到了常州市教育局教研室的大力支持。江苏省教育厅教研室万庆炎同志审阅了全书。毛震球、钱惠民同志对本书提出了不少修改意见。在此一并表示感谢。

限于编写时间仓促，水平有限，谬误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1983年9月

目 录

第一章　实数集

基　础　知　识

一、实数集

1.实数的系统分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{有限小数和无限循环小数}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

2.数轴　规定了方向、原点和长度单位的直线叫数轴。

任何一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示，反过来，数轴上的每一个点都与唯一的一个实数相对应，数零用原点表示；正实数与数轴上原点右边的点相对应；负实数与数轴上原点左边的点相对应。

3.实数的性质

（1）顺序性　任何两个实数都可以比较大小，我们可以利用实数在数轴上的对应点的位置，来比较两个实数的大小，设实数α和β在数轴上的对应点分别是A和B，那么：

1)如果点A在点B的左边，就说α小于β，记作$\alpha<\beta$；

2)如果点A在点B的右边，就说α大于β，记作$\alpha>\beta$；

3)如果点A和点B重合，就说α和β相等，记作$\alpha=\beta$.

由此可见：任何正实数都大于零；任何负实数都小于零，任何正实数都大于任何负实数.

(2)稠密性　对任何两个实数α，β，若$\alpha<\beta$，则总存在一个实数γ，使$\alpha<\gamma<\beta$，从而可以推得：任何两个实数之间必定存在无限多个实数.

(3)连续性　数轴上表示实数的点是密集而没有空隙的，即任何一个实数都可以在数轴上找到一个对应的点；反过来，数轴上的每一个点都与一个实数相对应，也就是说，实数集里的数与数轴上的点之间存在一一对应的关系.

4.实数的运算

(1)实数的运算

1)在实数集里能实施加、减、乘、除(除数不能是零)、乘方、开方(负数不能开偶次方)等运算.

2)减可以转化为加：减去一个数等于加上它的相反数；除可以转化为乘：除以一个不等于零的数等于乘以这个数的倒数.

3)运算的符号法则

同号两数相加，取原加数的符号；异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号；

同号两数相乘(除)得正，异号两数相乘(除)得负.

(2)运算定律(a、b、c为实数)

运算律	加法	乘法
交换律	$a+b=b+a$	$ab=ba$
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(ab)c=a(bc)$
乘法对加法的分配律	$a(b+c)=ab+ac$，$(b+c)a=ba+ca$	

（3）运算顺序

1）把加、减、乘、除、乘方、开方运算分为三级：加、减是一级运算；乘、除是二级运算；乘方、开方是三级运算．运算中应当按由高一级到低一级的顺序逐级进行，即先做乘方、开方，然后做乘、除，最后做加减；

2）如果有括号，那么应当按括号所示的顺序进行运算．一般是按先小括号、后中括号、再大括号的顺序进行；

3）对于同级运算，应当从左至右依次进行；

4）运算中，利用运算律可以调整原来的运算顺序，使运算更为简便．

5．数集的性质

数集的不断扩大，是由于人类的生产活动和社会实践的需要，也是数学本身发展的需要．

在由自然数集向实数集不断扩展时，有些性质保持了下来，如数集的顺序性，数集所应满足的运算律等．但是应当注意，随着数集的每一次扩展，原有数集的某些性质会有所改变，如下表所示：

数　集	可以实施的运算	数集的性质
自然数集	+、×、乘方	1.有顺序性 2.存在最小数1 3.无稠密性 4.无连续性
整数集	+、－、×、乘方	1.有顺序性 2.无最小数 3.无稠密性 4.无连续性
有理数集	+、－、×、÷(除数不为零)、乘方	1.有顺序性 2.无最小数 3.有稠密性 4.无连续性
实数集	+、－、×、÷(除数不为零)、乘方、开方(负数不能开偶次方)	1.有顺序性 2.无最小数 3.有稠密性 4.有连续性

二、一些重要概念

1.约数和倍数

在整数集中，如果整数 a 能够被整数 b 整除，那么 a 称为 b 的倍数，b 称为 a 的约数(或因数)，记作 $a=mb$（m 为整数）。

(1)公约数与公倍数

一个数同时是几个数的约数时，这个数叫做这几个数的公约数,几个数的公约数的个数是有限的,其中最大的一个公约数叫做这几个数的最大公约数.

一个数同时是几个数的倍数时，这个数叫做这几个数的公倍数.几个数的公倍数的个数是无限的，其中最小的一个公倍数叫做这几个数的最小公倍数.

(2)整除性的简易判断

1)一个整数的末位数字是2的倍数,则这个数能被2整除(或这个数具有约数2);

2)一个整数的末位数字是5或0，则这个数能被5整除(或这个数具有约数5);

3)一个整数的末二位数是4的倍数，则这个数能被4整除(或这个数具有约数4);

4)一个整数的末三位数是8的倍数,则这个数能被8整除(或这个数具有约数8);

5)一个整数的各位数字之和能被3(或9)整除,则这个数能被3(或9)整除;

6)一个整数的奇数位数字之和与偶数位数字之和的差能被11整除,则这个数能被11整除.

2.奇数与偶数

(1)奇数　不能被2整除的整数叫做奇数，一般用$2k-1$或$2k+1$来表示(k为整数);

(2)偶数　能被2整除的整数叫做偶数，一般用$2k$来表示(k为整数)

3.质数与合数

(1)自然数可以分成三类：质数、合数和1.

质数除1以外，只能被1和它本身整除的自然数叫做质数(或素数)，质数的个数是无限的，质数中仅有一个2是偶数，其它的都是奇数。

合数不仅能被1和它本身整除，而且还能被其它自然数整除的自然数叫做合数。

1既不是质数，也不是合数。

(2)质因数分解　把一个合数用质因数相乘的形式来表示出来，叫做分解质因数。

质因数分解常用短除法。

(3)互质数

除1以外没有其它公约数的两个数叫做互质数。两个互质数的最大公约数是1，最小公倍数是它们的积。

4.既约分数与无限不循环小数

(1)既约分数　分子分母是互质数的分数叫做既约分数(也叫最简分数)。

任何一个有理数都能用既约分数来表示。

任何一个既约分数都能化成有限小数或无限循环小数；反过来，任何一个有限小数或无限循环小数都可以化成既约分数。

(2)无限不循环小数　无限不循环小数叫做无理数，无限不循环小数不能化成既约分数。

5.互为相反数

只有符号不相同的两个实数叫做互为相反数，a与$-a$表示两个互为相反的数，互为相反数的两个数在数轴上所对应的两个点分居于原点的两边且到原点有相等的距离。

6.互为倒数与互为负倒数

如果两个数的乘积等于1，那么这两个数叫做互为倒数；

如果两个数的乘积等于 -1，那么这两个数叫做互为负倒数。

零没有倒数也没有负倒数。

7.绝对值

一个正数的绝对值是这个数的本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。即

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

一个数的绝对值的几何意义是这个数在数轴上所对应的点到原点的距离。

三、近似数和有效数字

一般截取近似数的方法有进一法、去尾法和四舍五入法三种.通常采用的是四舍五入法.用四舍五入法要把某一个数保留到某一指定的位数，如果被舍去的部分小于保留部分末位的半个单位，就舍去这些数字，否则把保留部分的末位数字增加一个单位，这样所得的近似值可以精确到最末一位的半个单位。

例如，用四舍五入法取 π 精确到0.01的近似值3.14或精确到 0.0001的近似值 3.1416，同 π 的准确值相差不会超过0.01或0.0001的一半。

一个近似数，用四舍五入法截取到哪一位，就是说这个近似数精确到哪一位，这时从左边第一个不是零的数字起，到末一个数字为止的所有数字都叫做这个近似数的有效数字。

例如，π 取3.14的精确度是0.01，有三个有效数字；π 取3.142的精确度是0.001，有四个有效数字；近似数8.10的精确度0.01，有三个有效数字。

如果一个近似数用四舍五入法截得近似数的整数，并且最后一个或几个数位上的数字是零，为了表明它的精确度和有效数字的个数，通常采取：

1.把近似数的精确度用括号注明，例如1500.3的不同精确度的近似值是

1500(精确到 1)，它有四个有效数字.

1500(精确到10)，它有三个有效数字.

1500(精确到100)，它有两个有效数字.

2.把近似数写成 $a\times10^n$($1\leqslant a<10$， n 为正整数).

例如1.500×10^3(有四个有效数字).

1.50×10^3(有三个有效数字).

1.5×10^3(有二个有效数字).

把一个数记成 $a\times10^n$的形式($1\leqslant a<10$， n 为正整数)，这种记数法称为科学记数法.

范　　例

例 1　(1)　把12870分解质因数；

(2)　求2100、2640、6930的最大公约数和最小公倍数.

解　(1)　(短除法)

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12870 \\ \hline 5 & 6435 \\ \hline 3 & 1287 \\ \hline 3 & 429 \\ \hline 11 & 143 \\ \hline & 13 \end{array}$$

$\therefore$　$12870=2\times3^2\times5\times11\times13$.

说明　用短除法分解质因数时，可以根据整除性的简易判断法，用质数去试除求得质因数．

（2）

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2100 \\ \hline 2 & 1050 \\ \hline 5 & 525 \\ \hline 5 & 105 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 2640 \\ \hline 2 & 1320 \\ \hline 2 & 660 \\ \hline 2 & 330 \\ \hline 5 & 165 \\ \hline 3 & 33 \\ \hline & 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 6930 \\ \hline 5 & 3465 \\ \hline 3 & 693 \\ \hline 3 & 231 \\ \hline 7 & 77 \\ \hline & 11 \end{array}$$

$\therefore$　$2100=2^2\times3\times5^2\times7$,

$2640=2^4\times3\times5\times11$,

$6930=2\times3^2\times5\times7\times11$.

$(2100,\ 2640,\ 6930)=2\times3\times5=30$.

$[2100,\ 2640,\ 6930]=2^4\times3^2\times5^2\times7\times11$

$=277200$.

说明　求几个数的最大公约数和最小公倍数时，首先用短除法分别把各数分解质因数，然后取各数相同质因数的最低次幂的乘积为各数的最大公约数，取各数所有质因数的最高次幂的乘积为各数的最小公倍数，通常用圆括号表示括号中各数的最大公约数，用方括号表示括号中各数的最小公倍数．

例2　已知下列各数：

$-|4\cos120°|$、$-\sqrt{9}$、$\lg1$、$\log_3 3$、π、$-\dfrac{1}{2}$、$\sqrt{5}$、$\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}60°$．

（1）指出哪些数是有理数？哪些数是无理数？

（2）在数轴上将各数表示出来；

（3）用“$<$”将各数连结起来。

解 （1）$-|4\cos120°|=-2$；

$-\sqrt{9}=-3$；$\lg1=0$；

$\log_3 3=1$；$\pi=3.1415\cdots\cdots$；

$\sqrt{5}=2.236\cdots\cdots\cdots$；

$\frac{1}{2}\text{tg}60°=0.8660\cdots\cdots$。

∴ 有理数有：$-|4\cos120°|$、$-\sqrt{9}$、$\lg1$、$\log_3 3$、$-\frac{1}{2}$；无理数有π、$\sqrt{5}$、$\frac{1}{2}\text{tg}60°$。

（2）以上各数在实数上可表示为：

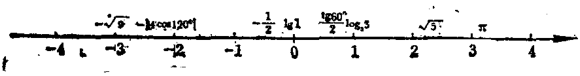


图 1－1

（3）$-\sqrt{9}<-|4\cos120°|<-\frac{1}{2}<\lg1<\frac{1}{2}\text{tg}60°<\log_3 3<\sqrt{5}<\pi$。

说明 比较实数大小时，可以利用实数在数轴上的对应点的位置来进行，也可以把实数化成小数以后再比较。

两个正实数化成小数以后，如果对应数位上的数字都相等，这两个实数就相等；如果整数部分不同，整数部分大的正实数就较大；如果整数部分相同，而小数第一位不同，小数第一位大的正实数就较大；如果小数第一位也相同，小数第二位大的正实数就较大；以下依次类推。

如果两个负实数绝对值相等，这两个负实数就相等；如果两个负实数绝对值不相等，绝对值大的负实数就较小。

例 3 比较下列各数的大小：

（1）$3\frac{283}{2000}$和$-\pi$；　　（2）$-1\frac{6}{7}$、$-1\frac{5}{6}$和-1.85；

(3) $\sqrt{0.0331}$和$\frac{2}{11}$;　　(4) 当$x>y$时$\frac{1}{x}$和$\frac{1}{y}$.

解 (1) ∵ $3\frac{283}{2000}>0$, $-\pi<0$.

$$\therefore\quad 3\frac{283}{2000}>-\pi.$$

(2) ∵ $-1\frac{6}{7}=-1.857\cdots$,　$-1\frac{5}{6}=-1.833\cdots$,

而　$1.857>1.85>1.833$,

$$\therefore\quad -1\frac{6}{7}<-1.85<-1\frac{5}{6}.$$

又解 ∵ $-1\frac{6}{7}=-1\frac{360}{420}$,

$$-1\frac{5}{6}=-1\frac{350}{420},$$

$$-1.85=-1\frac{357}{420},$$

而 $\left|-1\frac{360}{420}\right|>\left|-1\frac{357}{420}\right|>\left|-1\frac{350}{420}\right|$

$$\therefore\quad -1\frac{6}{7}<-1.85<-1\frac{5}{6}.$$

(3) ∵ $(\sqrt{0.0331})^2=0.0331$,

$$\left(\frac{2}{11}\right)^2=\frac{4}{121}=0.0330\cdots.$$

而 $0.0331>0.0330\cdots$, 且$\sqrt{0.0331}>0$, $\frac{2}{11}>0$.

$$\therefore \quad \sqrt{0.0331}>\frac{2}{11}.$$

(4) 若 $x>0$， $y<0$，则 $\frac{1}{x}>0$， $\frac{1}{y}<0$.

$$\therefore \quad \frac{1}{x}>\frac{1}{y}.$$

若 $x>y>0$，则 $xy>0$. $\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}<0$，

$$\therefore \quad \frac{1}{x}<\frac{1}{y}.$$

若 $y<x<0$，则 $xy>0$. $\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}<0$，

$$\therefore \quad \frac{1}{x}<\frac{1}{y}.$$

说明 比较实数的大小，除了化成小数比较外，还可以化成同分母的分数（如本例的（2））来比较；或根据“$A>B \Longleftrightarrow A-B>0$”来比较（如本例的（4））。

例4 （1） 将下列分数化成小数：

$$\frac{5}{8}, \ \frac{2}{125}, \ \frac{1}{7}, \ 2\frac{1}{9}.$$

（2）将下列小数化成分数：

$$0.\dot{2}\dot{5}, \quad 0.4\dot{1}\dot{6}.$$

解 (1) $\frac{5}{8}=\frac{5}{2^3}=\frac{5\times5^3}{2^3\times5^3}=\frac{625}{1000}=0.625$,

$$\frac{2}{125}=\frac{2}{5^3}=\frac{2\times2^3}{5^3\times2^3}=\frac{16}{1000}=0.016,$$