

小波分析理论 与影像分析

朱长青 著

测绘出版社

序 言

小波分析是 80 年代中期发展起来的应用数学分支，由于其数学的完美性和应用的广泛性，使得其在理论上得到不断完善，在应用上得到迅速发展。目前，小波分析在信号分析、图像处理、模式识别、计算机视觉、数据压缩、非线性分析、天体物理、自动控制、分形分析、量子力学、计算数学、混沌、随机过程、医学、遥感等领域得到了广泛而深入的应用，在测绘领域小波分析也得到了许多重要的应用。

小波分析是为了克服 Fourier 分析的不足而引进的，它是传统的 Fourier 分析的新发展。传统的 Fourier 分析通过变换将原来函数的研究转化为在频域内对其 Fourier 变换的研究，另外，Fourier 变换及其逆变换的可导性使其具有良好的光滑性，从而使 Fourier 分析长期以来一直作为最完善的数学理论与最广泛和最有效地被应用的数学方法之一。但是，传统的 Fourier 变换有其自身的不足，即它不能反映信号在时间的局部域上的频率特性，而在许多问题中所关心的恰恰是信号在局部时间范围中的特征。虽然窗口 Fourier 变换通过引进窗口函数改进了 Fourier 变换的不足，但由于其时频局部化窗口大小不变，并未从根本上完全解决 Fourier 变换的不足，这在理论上和应用上都带来了许多不便。因为在时频局部化分析中，反映信号高频成分需要窄的时间窗，而反映信号低频成分需要宽的时间窗。这样 Fourier 变换不能满足这一要求，而小波变换则能满足这一要求。小波分析作为 Fourier 分析的新发展，既保留了 Fourier 分析的优点，又弥补了 Fourier 分析的不足。它的窗口随着频率增高而变窄，随着频率降低而变宽，而且小波变换适当离散化后能构成正交系，这些在理论上和应用上都是十分重要的。因此，小波分析得到了广泛的重视并取得了许多重要的应用，众多学科领域都把小波分析作为解决自身困难的有力工具并取得了丰硕的成果，在测绘领域也不例外。

本书将小波分析理论与测绘学科特别是影像分析相结合，对小波分析理论、小波分析若干与测绘相关应用模型及在影像分析方面的应用进行了系统的研究，得到了一系列理论及应用成果。本书主要研究内容有：小波分析变换特征、小波变换边界理论、二维周期基数插值小波理论、小波分析若干与测绘相关的应用模型及应用展望、基于正交小波变换特征的遥感影像纹理分析和分类、基于二进小波变换和形态学细化的遥感影像边缘检测、多进小波在影像分析中的应用等。

在本书完成之际，作者要感谢解放军测绘学院杨启和教授长期悉心的教导；感谢测绘学院数学教研室王鸿飞教授和其它同志给予的帮助；感谢测绘学院教务部贾文平同志、刘世友同志、王凤肆同志等给予的帮助；感谢测绘出版社文湘北同志、朱伟同志、李建明同志等给予的帮助。

本书内容的研究，得到了下列基金和国家重点实验室的资助。本书属下列基金和实验

室的科研成果：

解放军测绘学院青年学科骨干基金；

浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室；

中国科学院自动化研究所模式识别国家重点实验室；

北京大学视觉与听觉信息处理国家重点实验室；

国家自然科学基金(No. 49571060)。

由于作者水平所限，本书一定还有缺点和不足之处，恳请同志们批评指正。

朱长青

1997.8

目 录

第一章 概论	1
§ 1-1 引言	1
§ 1-2 小波分析的历史和现状	2
§ 1-3 本书主要研究内容和安排	4
第二章 小波分析基本理论和变换特征	6
§ 2-1 引言	6
§ 2-2 Fourier 变换和时频局部化分析	6
§ 2-3 连续小波变换	11
§ 2-4 正交小波基和多尺度分析	17
§ 2-5 离散信号和图像的多尺度小波表示	25
§ 2-6 小波包	32
§ 2-7 本章小结	36
第三章 紧支集正交小波基和边界处理	37
§ 3-1 引言	37
§ 3-2 紧支集正交小波基	38
§ 3-3 紧支集正交小波变换的边界处理	44
§ 3-4 实验结果	49
§ 3-5 本章小结	50
第四章 二维周期基数插值小波	51
§ 4-1 引言	51
§ 4-2 基数插值尺度函数	51
§ 4-3 基数插值小波	54
§ 4-4 尺度函数和小波函数的对称性	61
§ 4-5 对偶尺度函数和对偶小波	64
§ 4-6 算法	67
§ 4-7 本章小结	71
第五章 小波分析若干应用模型及在测绘领域中的应用	72
§ 5-1 引言	72
§ 5-2 图像变换	72
§ 5-3 图像数据压缩与编码	73
§ 5-4 图像拼接和镶嵌	75

§ 5-5 立体视觉和匹配	77
§ 5-6 取样定理	80
§ 5-7 噪声消除	82
§ 5-8 奇性分析	82
§ 5-9 在大地测量中的应用	84
§ 5-10 其它模型与应用	86
§ 5-11 本章小结	88
第六章 基于小波变换特征的遥感影像纹理分析和分类	89
§ 6-1 引言	89
§ 6-2 基于正交小波变换特征的遥感影像纹理分析和分类	90
§ 6-3 基于更佳分辨率小波分解特征的遥感影像纹理分类	94
§ 6-4 不同分辨率下的遥感影像纹理分类	95
§ 6-5 小波滤波器和遥感影像纹理分类	96
§ 6-6 完全正交小波分解下的遥感影像纹理分类	98
§ 6-7 不同母体下的遥感影像纹理分类	101
§ 6-8 本章小结	102
第七章 基于二进小波变换和形态学细化的影像多尺度边缘检测	103
§ 7-1 引言	103
§ 7-2 二进小波变换	104
§ 7-3 图像的二进小波表示	110
§ 7-4 二进小波变换与边缘检测	113
§ 7-5 图像的骨架、形态学结构元和细化算法	117
§ 7-6 实验结果	123
§ 7-7 本章小结	126
第八章 多进制小波变换及其应用	127
§ 8-1 引言	127
§ 8-2 多进制小波的多尺度分析	127
§ 8-3 多进制小波的构造	130
§ 8-4 多进制小波的分解和重构	133
§ 8-5 多进制小波在影像缩小中的应用	136
§ 8-6 多进制小波在边缘检测中的应用	138
§ 8-7 多进制小波在压缩 DEM 中的应用	139
§ 8-8 本章小结	141
参考文献	142

第一章 概 论

§ 1-1 引 言

长期以来,在各种信号(影像)数据的分析和处理中,特别在频谱分析和各种滤波方法中,最基本、最常用的工具就是 Fourier 分析^{[1],[2]}。究其原因,从理论角度看主要在于许多常见运算在 Fourier 变换下性质变得很好(例如微商运算变为多项式乘法,卷积变为普通乘积等);从实际应用角度看是因为 Fourier 级数展开是每个周期振动都具有简单频率的简谐振动这一物理现象的数学描述。对于周期为 2π 的振动物理量 $f(x)$, Fourier 分析说在某种收敛意义下,有

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx},$$

其中 C_n 为 $f(x)$ 的 Fourier 系数,其定义为

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in Z,$$

系数 C_n 正表示了 $f(x)$ 含简谐振动的分量 e^{inx} 的多少。物理学中称集合 $\{n: C_n \neq 0\}$ 为 $f(x)$ 的谱点集, Fourier 分析也因此被称为频谱分析,这一分析能清楚揭示出信号 $f(x)$ 的频率结构,因而在信号分析中长期得到重要的应用。但是, Fourier 分析也有其自身的不足,这就是指数函数 e^{inx} 在整个时间域都是非零的,因而 Fourier 系数是 $f(x)$ 在整个时间域上的加权平均,要想用它们来反映 $f(x)$ 的局部性质是不可能的。虽然窗口 Fourier 变换通过引进窗口函数改进了 Fourier 分析的不足,但由于其时频局部化窗口大小不变,因而并未在根本上改变 Fourier 分析局部化的不足。而局部化无论在理论上还是在应用上都是十分重要的。因为在时频局部化分析中,反映信号高频成份需要窄的时间窗,而反映信号低频成份需要宽的时间窗,因此, Fourier 分析的局部性大大地限制了它的应用。长期以来,数学家们和工程师们都希望有一种基函数族,它能保持指数(三角)函数的优点,又能弥补它的不足,并希望它由一函数经过简单的平移、伸缩而成的,而且具有光滑性、局部性、振荡性,这样的函数的图像形如小波,因而它的基便称为小波基,对它的存在性、构造、性质及应用等的研究便是小波分析。小波分析作为 Fourier 分析的发展,既保持了 Fourier 分析的优点,又能弥补 Fourier 分析的不足,因而在理论上和应用上都具有重要意义。

小波分析虽然诞生于 80 年代中期,然而由于其重要的理论价值和应用价值,发展十分迅猛。在理论上不断得到完善,在应用上不断得到扩展。目前,小波分析已成为一门重要的应用数学学科。众多学科领域都把它作为解决自身困难的有力工具,在许多方面取得了大量的丰硕的成果。例如,美国耶鲁大学以 R. Coifman 教授为代表的的小波研究组利用小波

分析对美国联邦调查局存贮的三亿个指纹进行压缩,取得了原有效益 20 倍的成果。单单因为节省存贮光盘而获得的效益便达 3000 万美元之巨,而由于指纹传输时间缩短为原来的二十分之一所创造的价值更是无法估量。因此,如何利用小波分析这一新兴数学工具,成为众多学科的学者们关注的问题,在测绘领域也不例外。

近年来,测绘领域在理论和应用方面不断取得进展,其基本理论和应用已不断成熟^{[3]~[12]},与其它学科如数学、计算机、信息学等的相互渗透,使得测绘领域的各个方面不断取得新的成果。特别是新兴的数学分支如分形、数学形态学、小波分析等,在测绘界得到了广泛的重视。而作为最新发展的小波分析,更为引人注目。近几年来,小波分析在测绘领域得到了一些重要的应用,并取得了一些应用成果。但是,总体来说,小波分析还没有得到更为广泛的应用,应用小波的类型基本上为正交小波,许多问题有待进一步研究解决。因此,深入研究小波分析的理论,结合测绘学科的特点,探讨小波分析在测绘领域以及在影像分析中的应用,无疑是一件有意义的工作,这正是本书的目的所在。

本书对小波分析理论及其在影像分析中的应用进行了探讨,主要研究了小波分析的边界理论和周期基数插值小波理论,小波分析若干与测绘相关的应用模型,正交小波、二进小波、多进制小波等在测绘领域中影像分析方面的纹理分析和分类、影像边缘检测、影像缩小、DEM 压缩等的理论和应用。

§ 1-2 小波分析的历史和现状

小波分析是为了弥补 Fourier 分析的不足而发展起来的一门应用数学学科,尽管其蓬勃发展于本世纪的 80 年代,但其思想方法可以追溯到 1910 年 Haar 提出的小波规范基^[13]及 1931~1937 年 Littlewood-Palay 对级数建立的 L-P 理论^[14]。但直接地,却只能追溯到 70 年代,那时 Caldern 用其早年发现的再生公式给出抛物线空间的原子分解^[15],这个公式后来成为许多函数分解的出发点,它的离散形式已接近小波展开,只是还无法组成一个正交基。1981 年,Stromerg 首先构造了一个很接近现在称之为小波的基(它被称为历史上第一个小波基)^[16]。1982 年, Battle 在构造量子场论中使用了类似 Calderon 再生公式的展开。此后,许多数学家和工程学家研究了各种分解,形成了一些初步的思想。然而,小波分析的真正发展起源于 80 年代中期。小波分析的真正形成则是由法国科学家 Merlet 和 Grossman 在分析研究地震波局部性质时,发现传统的 Fourier 分析难以达到要求,因而引入小波概念于信号分析中对信号进行分解^[17]。1986 年, Meyer 创造性地构造了具有一定衰减性的光滑函数 $\psi(t)$, 其二进制的伸缩平移

$$\{\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k) \mid j, k \in Z\}$$

构成了 $L^2(R)$ 的规范正交基^[18]。而在此之前,人们认为这样的小波函数 ψ 是不存在的。事实上, Daubechies、Grossman 和 Meyer 就退而研究函数 ψ 及数 a_0, b_0 使函数系

$$\{a_0^{j/2}\psi(a_0^j t - kb_0) \mid j, k \in Z\}$$

构成 $L^2(R)$ 框架的条件^[19]。

继 Meyer 小波提出之后, Battle 给出具有指数衰减的小波函数^[20]。1987 年, Mallat 将计算机视觉领域内多尺度分析的思想引入小波分析中小波函数的构造并提出了多尺度分析概念^[21], 从而统一了在此之前的 Stromberg、Meyer、Lemarie 和 Battle 等提出的具体小波的构造。Mallat 还提出了对小波分析起重要作用的快速算法——Mallat 算法, 并用于图像的分解与重构^[22]。1987 年底, 在法国马赛召开了第一次小波国际会议, 有力地推动了小波分析的发展。此后, 小波分析得到了更多的数学家和应用科学家的重视, 得到了更快的发展。1988 年, Daubechies 构造了具有紧支集的正交小波基^[23]。1989 年, Gouffman、Meyer 和 Quake 等引入了小波包^[24]。1990 年, 崔锦泰和王建忠构造了基于样条函数的单正交小波函数^[25]。1992 年, Coher、Daubechies、Feauveau 提出了具有紧支撑的双正交小波基^[26]。至此, 小波分析的系统理论基本形成, 从而形成了一门新的应用数学学科。

近年来, 小波分析在理论上仍然不断发展。目前, 函数空间的刻划、小波构造、基数插值小波、向量小波、高维小波、多进小波、周期小波等是小波理论研究的主要研究方向, 这些方向吸引了众多的研究人员, 其新的研究成果也不断涌现。一批小波分析方面的理论和应用专著也相继问世^{[27]~[35]}。

在应用上, 小波分析的发展更加引人注目。由于其良好的时频局部化特征、尺度变化特征和方向性特征, 因而在众多学科领域取得了广泛的应用。目前, 小波分析在信号分析和处理、图像处理、模式识别、计算机视觉、数据压缩、非线性分析、天体物理、自动控制、分形分析、量子力学、混沌、遥感、计算数学、函数空间和奇异积分算子、偏微分方程求解等学科领域得到了广泛而重要的应用, 并且其应用范围不断扩大, 几乎所有的学科领域都把小波分析作为一门重要的工具来处理各自的问题并取得了丰硕的研究成果。

在测绘领域, 小波分析也取得了许多应用。1993 年, 邵巨良和李德仁研究了利用小波变换检测影像的边缘特征^[36]和影像的小波表示^[37]。1994 年, Collin F. 和 Warant R. 利用小波研究了 GPS 数据的处理^[38]; 钱曾波和朱述龙研究了基于小波的图像变焦技术^[39]。1995 年, 朱长青探讨了小波分析在地图制图中的应用^[40]; 朱长青、杨启和、朱文忠研究了小波变换在影像纹理分类中的初步应用^[41]; 李军探讨了小波分析在摄影测量与遥感中的应用^[42]; 李军、林宗坚研究了基于小波的遥感影像镶嵌^[43]。1996 年, 朱长青对小波分析在影像分析和分类中一些问题作了研究^[44]; 朱长青、杨启和、朱文忠系统地研究了小波分析在地貌影像纹理分类中的应用^[45]; 朱长青对小波分析在遥感影像中的应用进行了综述^[46]; 耿则勋研究了基于小波变换的遥感影像保持量测精度的压缩技术^[47]; 陶大欣研究了小波分析在大地测量中组合系统中的应用^[48]; 金红结合分形研究了基于小波的图像数据压缩^[49]; 朱述龙研究了数字影像上特征信息的小波表示^[50]; Jasy 研究了用分块立体观察法作小波支撑的表面重构^[51]; Pan 利用复合小波进行不变全息影像匹配, 并对实际影像进行了实验, 取得了较好的效果^[52]; Garguet 将多分辨率分析和小波变换用于合并 SPOT 全色和多波段影像数据^[53]; 章传银、丘其宪对小波分析在大地测量中的应用进行了展望^[54]; 丘其宪、章传银研究了建立表层空间重力模型的小波变换法^[55]。1997 年, 朱长青、杨晓梅提出了具有更佳分辨率的小波分解并用于遥感影像分类^[56]; 朱长青、杨晓梅、陶大欣研究了基于样条二进小波的影像多尺度边缘检测^[57]; 朱长青研究了小波滤波器与影像分类^[58]; 朱长青、杨启和

研究了完全正交小波分解下的遥感影像纹理分类^[59]；朱述龙对小波分析在图像分析中的图像分割、小波表示、放大缩小等进行了研究^[60]；朱长青对多进小波及其在影像分析中的应用进行了研究^[61]；李军研究了基于特征的遥感影像数据融合方法^[62]；李军还对小波分析用于影像分割进行了研究^[63]。在[64]中，朱长青、杨启和、王鸿飞对小波分析在测绘中的应用进行了综述和展望。目前，小波分析的理论和应用正得到测绘界越来越多的重视，新的成果不断出现，小波分析可望在重力场计算、GPS 信号处理、纹理分割、影像匹配、地图符号与数字识别、制图综合、地图修测、多尺度 DEM 分析、分形分析、遥感影像融合等方面取得重要研究成果。

§ 1-3 本书主要研究内容和安排

小波分析作为一门应用数学理论，在众多学科领域取得了许多重要的理论和应用成果。本书努力将小波分析理论与测绘等学科实际问题相结合，研究小波分析理论并利用这一有力工具解决实际中特别是测绘领域中影像分析等方面的问题。本书在小波分析基本理论、应用模型及其在影像分析中的应用方面进行了一系列研究，其主要研究内容和安排为：

第一章，概论，简要地介绍了小波分析的历史、现状、在测绘中的应用及本书的研究内容及安排。

第二章，讨论了小波分析的基本应用理论及变换特征，对小波分析从图像分析的角度进行了阐述，研究分析了连续小波变换、正交小波变换、小波包变换等的变换特征并指出各自的优缺点。

第三章，研究了紧支集正交小波变换一般情形的边界处理，推导证明了一种新的边界处理方法，并对实际影像进行了试验。

第四章，系统深入地研究了二维周期基数插值小波理论。首先得到了满足插值性质的周期基数插值尺度函数以及一些性质；然后通过一系列更为复杂的证明，得到了相应的周期基数插值小波函数；随后，推导了周期基数插值尺度函数和小波函数的对称性、对偶尺度函数、对偶小波函数及一些性质等；最后得到了二维周期基数插值小波的分解和重构算法。

第五章，讨论和分析了与测绘相关的若干小波分析的模型与方法，其中包括图像变换、数据压缩与编码、图像拼接与镶嵌、立体视觉和匹配、取样定理、噪声消除、奇异性分析、大地测量中的应用等，并对它们在测绘中的应用前景进行了分析和展望。在后面几章，还将对基于小波分析的影像纹理分析和分类、影像边缘检测、影像缩小、DEM 压缩等问题进行详细研究。

第六章，深入地研究了基于正交小波变换特征的遥感影像纹理分析及分类的理论和方法，得到了基于正交小波变换特征的遥感影像纹理分类方法，提出了具有更佳分辨率的小波分解的影像纹理分类，在不同分解方式、不同分辨率、不同滤波器、不同母体等情况下

对实际地貌影像进行了分类试验，取得了较高的分类正确率，并对试验结果进行了分析和讨论。

第七章，研究了基于二进小波变换和数学形态学细化方法的影像边缘检测理论和方法，得到了基于二进小波的边缘检测方法，并对不同小波系数所得的边缘进行了分析试验。同时，这一章还得到了完整的基于形态学的结构元、细化结构元和细化算法并用于影像边缘检测。

第八章，首先介绍了目前刚刚发展的多进制小波变换的基本理论，同时对其变换特征进行了分析，然后研究了其在影像缩小、边缘检测、DEM 压缩中的应用。

第二章 小波分析基本理论和变换特征

§ 2-1 引 言

小波分析自 80 年代中期发展至今,虽然时间不长,但是经过数学家们和应用科学家们的共同努力,其理论系统已基本形成。本章简要介绍与应用有关的小波分析的基本理论及其变换特征。这里,略去了很多复杂的数学理论和推导证明,有关的理论可在有关方面的文献中查阅。

在这一章里,首先回顾 Fourier 变换,从 Fourier 变换的不足引进了连续小波变换,并且从时频局部化方面说明了小波变换的优越性,这些方面的内容在第 2、3 节讨论。第 4、5 节介绍了实际信号和图像处理中常用的正交小波基,通过正交小波基,得到了信号和图像的多尺度表示,从而为信号和图像处理提供了新的手段。第 6 节,介绍了双正交小波。在第 7 节,介绍了小波包。第 8 节,给出了本章小结。关于紧支集正交小波基、二进小波、多进制小波,将在后面各章结合应用再作讨论。

在讨论过程中,对小波分析与测绘及影像分析有关的地方进行了较充分的讨论,对小波分析给出一个从图像分析的角度来理解的阐述,同时在每节最后简要地总结了各种变换的特征和优缺点,以便全面理解小波变换的实质,更好地利用小波分析进行影像分析与处理等实际问题。

§ 2-2 Fourier 变换和时频局部化分析

Fourier 变换是近代分析数学的中心内容之一,也是在众多学科领域中常用的工具之一,特别在信号数据的频谱分析和各种滤波方法中,Fourier 分析更是常用的方法和处理手段。本节首先给出 Fourier 变换和窗口 Fourier 变换的定义,然后分析其时频局部化性质,并指出其不足之处。

一、Fourier 变换

记

$$L^1(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid \int_{\mathbb{R}} f(x) dx < +\infty\},$$
$$L^2(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty\},$$

这里 R 是实数集。

设 $f(x) \in L^1(R)$, 则其 Fourier 变换为

$$F: f(x) \rightarrow (Ff)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_R f(x)e^{-i\omega x} dx,$$

容易证明 $\hat{f}(\omega)$ 有界且在 R 上一致连续。

在应用中, $\hat{f}(\omega)$ 称为 $f(x)$ 的频谱, $|\hat{f}(\omega)|$ 称为 $f(x)$ 的幅谱, $\arg \hat{f}(\omega)$ 称为 $f(x)$ 的相谱。

若 $\hat{f}(\omega)$ 连续, 则可以定义 Fourier 逆变换为

$$F^{-1}: \hat{f}(\omega) \rightarrow (F^{-1}\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_R \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} dx,$$

可以证明, 在 $f(x)$ 的连续点处, 有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_R \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} dx.$$

若 $f(x) \in L^2(R)$, 由于积分

$$\int_R f(x)e^{-i\omega x} dx$$

不一定存在, 则其 Fourier 变换不能如上定义, 而需如下定义。

令

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq N, \\ 0, & |x| > N \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} f(x) &\in L^1(R), \\ \hat{f}_N(\omega) &= \int_R f_N(x)e^{-i\omega x} dx. \end{aligned}$$

定义 $f(x)$ 的 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}_N(\omega).$$

对上述 Fourier 变换进行离散化, 可以得到离散 Fourier 变换, 离散 Fourier 变换有快速算法^{[65],[66]}。

对二元函数及多元函数, 类似于上面的定义, 可以定义二元及多元 Fourier 变换。

Fourier 有许多良好的性质, 下面给出一些主要的性质。

性质 1: 设 $f(x), g(x) \in L^1(R)$, α, β 为常数, 则有

$$(\alpha f + \beta g)(\omega) = \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega).$$

性质 2: 设 $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$, α 常数, 则有

$$\hat{f}_\alpha(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

性质 3: 设 $f_{x_0}(x) = f(x - x_0)$, 则

$$\hat{f}_{x_0}(\omega) = e^{-i\omega x_0} \hat{f}(\omega).$$

性质 4: 若 $f'(x) \in L^1(R)$, 则

$$\hat{f}'(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$$

一般地, 有

$$\hat{f}^{(m)}(\omega) = (i\omega)^m \hat{f}(\omega).$$

性质 5: 若 $f(x), g(x) \in L^1(R)$, 定义 f 和 g 的卷积

$$h(x) = f * g(x) = \int_R f(x-y)g(y)dy.$$

对于卷积, 有下列性质

(1) $f * g = g * f$.

(2) $(f * g)^\wedge(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$.

(3) 令 $f(x)g(x) = m(x)$, 则

$$\hat{m}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\omega)$$

(4) 若 $k(x) \in L^1(R)$, 则

$$(f * g) * k = f * (g * k).$$

性质 6: (Parseval 恒等式) 设 $f(x), g(x) \in L^2(R)$, 则成立 Parseval 恒等式

$$\langle f, g \rangle = \int_R f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

这里 $\langle f, g \rangle$ 表示内积。

从 Fourier 变换定义可见, Fourier 变换将一般的函数(信号)表示为具有不同频率的谐波函数的线性叠加, 从而将原来的函数(在时域或空域内)的研究转化为对这个叠加的权系数, 即 Fourier 变换(在频域内)的研究, 因而在理论及应用上成为十分有力的工具。它具有如下的优点:

- (1) 在数学上是一个有力的工具, 形成了一整套系统的理论。
- (2) $\hat{f}(\omega)$ 表示信号的频谱特性, 能较好地刻划信号的频率特性。
- (3) 离散 Fourier 变换有快速算法。

然而, Fourier 变换存在着一些明显的不足:

(1) 为了得到 $\hat{f}(\omega)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 处 $f(x)$ 的信息, 必须知道所有时间 x 上 $f(x)$ 的信号信息, 反映不出一个时间段上的频谱特性, 因而局部性能差, 不适合于实时处理。

(2) 从

$$\hat{f}(\omega) = \int_R f(x)e^{-i\omega x}dx,$$

ω 属于某一给定区域, 反映不出 $f(x)$ 在一时间区域上的信息, 时域中没有分辨率。

而在许多实际问题中, 人们关心的恰恰是信号在局部范围内的特征。例如在地震信号中, 关心的是什么位置出现什么样的反射波; 在边缘检测中, 关心的是信号突变的位置。另外, 信息的实时处理在许多问题中也是十分重要的。而对这类问题 Fourier 变换的方法往

往不是很有效的。基于此，Gabor^[67]于1946年引进了窗口 Fourier 变换。

二、窗口 Fourier 变换

窗口 Fourier 变换的基本思想是取定一个称为窗函数的函数 $g(x)$ ，它在有限区域外恒为零(紧支集)，或很快趋于零。用 $g(x - \tau)$ 乘以 $f(x)$ 相当于在 τ 附近开了一个“窗口”，如图2-1所示。

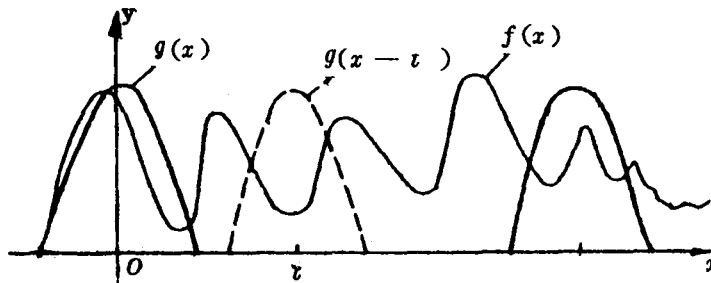


图 2-1

函数 $f(x)$ 的窗口 Fourier 变换定义为

$$G_f(\tau, \omega) = \int_R f(x)g(x - \tau)e^{-i\omega x} dx,$$

从定义可见， $e^{-i\omega x}$ 起频限作用， $g(x - \tau)$ 起时限作用，合在一起，就可同时起时频双限作用，而随着 τ 的变化， g 所确定的“时间窗”在 x 轴上移动，使 $f(x)$ “逐步”进入被分析的状态。 $G_f(\tau, \omega)$ 大致反映了信号 $f(x)$ 在 $x = \tau$ 附近频率为 ω 的频谱特性、“信号成份”的相对含量。因此，窗口 Fourier 变换确实反映了一个信号在任意范围内的频率特性，这是它优于 Fourier 变换之处。

窗口 Fourier 变换也有如下的逆变换

$$f(x) = \int_R d\omega \int_R g(x - \tau)G_f(\tau, \omega)e^{-i\omega x} d\tau.$$

三、时频局部化分析

为了更好地说明窗口 Fourier 变换及后面的小波变换的时频特征，我们引进相空间的概念。

相空间是以“时间”为横坐标，“频率”为纵坐标的欧氏空间，而相空间的有限区域称为窗口，相空间的作用是用来刻画一定的物理状态，因而具有很强的工程背景。

定义 2-1 若 $g(x) \in L^2(R)$ ， $xg(x) \in L^2(R)$ ，则 $g(x)$ 称为窗函数，而相空间中的点 (x_0, ω_0) 称为窗函数的中心，其中

$$x_0 = \int_{\mathbb{R}} x |g(x)|^2 dx / \|g\|_2^2,$$

$$\omega_0 = \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega / \|\hat{g}\|_2^2,$$

这里

$$\|g\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

而

$$\Delta_g = \left(\int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |g(x)|^2 dx / \|g\|_2^2 \right)^{1/2},$$

和

$$\Delta_g^\wedge = \left(\int_{\mathbb{R}} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega / \|\hat{g}\|_2^2 \right)^{1/2}$$

分别称为窗口函数 g 的时宽和频宽。相空间中以 (x_0, ω_0) 为中心, 以 $2\Delta_g$ 为长、以 $2\Delta_g^\wedge$ 为宽的平行于坐标轴的矩形称为由 g 所确定的时频窗口, $\Delta_g \Delta_g^\wedge$ 称为窗口面积。

一般地, 时宽表示 $f(x)$ 的信息主要包含在以 x_0 为中心的区间 $[x_0 - \Delta_g, x_0 + \Delta_g]$ 内, 频宽表示函数(信号)的频率主要包含在以 ω_0 为中心的区间 $[\omega_0 - \Delta_g^\wedge, \omega_0 + \Delta_g^\wedge]$ 内, 它们的大小表示了信号在空间域和时间域的局部化程度。为了在时域和空域上具有较高局部化程度, 显然 Δ_g 、 Δ_g^\wedge 越小越好。但这是不可能的, 由 Heisenberg^[68] 测不准原理可知必须有

$$\Delta_g \Delta_g^\wedge \geq \frac{1}{2},$$

因此, 在满足 Heisenberg 测不准原理前提下, 选择好的窗函数才能得到高的时频局部化程度。

四、窗口 Fourier 变换的时频局部化

对于窗口 Fourier 变换, 其窗函数为

$$g_{\tau, \omega}(x) = g(x - \tau)e^{-i\omega x},$$

这里 g 为标准窗函数, 即 $\|g\|_2 = 1$, 则容易得到

$$x_0 = \tau,$$

$$\omega_0 = \omega,$$

$$\Delta_{g_{\tau, \omega}} = \Delta_g,$$

$$\Delta_{g_{\tau, \omega}}^\wedge = \Delta_g^\wedge,$$

因此, $g_{\tau, \omega}(x)$ 是以 (τ, ω) 为中心, 时频和频宽分别为 Δ_g 和 Δ_g^\wedge 的窗函数, 且窗函数大小处处不变, 从而随着 (τ, ω) 的变化, 相空间可以全部由窗口所覆盖, 见图2-2。

由此可见, 窗口 Fourier 变换 $G_f(\tau, \omega)$ 反映了函数 $f(x)$ 在 $[\tau - \Delta_g, \tau + \Delta_g]$ 这一段时间内, 频率位于 $[\omega - \Delta_g^\wedge, \omega + \Delta_g^\wedge]$ 的成分的多少, 反映了函数 $f(x)$ 的局部化时间、频率信息。

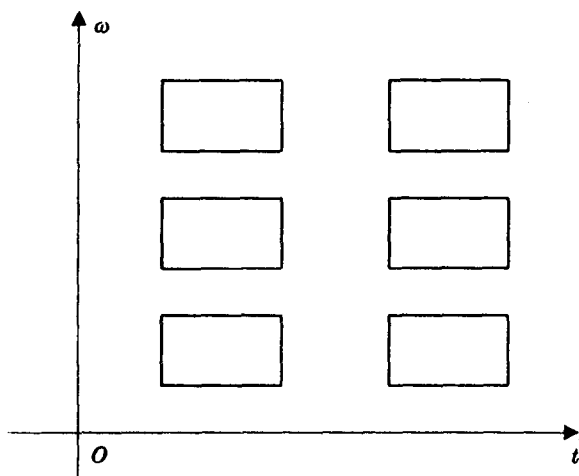


图 2-2

但是，这里窗口函数大小形状是处处一致的，对于突变信号来讲，这不能利用窗函数得到很好的刻画。因为在信号处理中，由于信号的频率反比于其时间周期，因此对于高频信息而言，时间区域应相对窄，对低频信息，时间区域应相对宽，应给出一个可调时频窗，但是窗口 Fourier 变换却做不到这一点。而我们将要讨论的小波变换却能做到这一点，它发展了窗口 Fourier 变换的局部化思想，其窗口能随频率增高而缩小，从而符合高频信号的分辨率较高的要求，而且小波变换适当离散化后能构成标准正交系，这无论在理论上还是在应用上都是十分有用的。

此外，对于 Fourier 变换， $x_0 = 0$ ， $\Delta_x = \infty$ ， $\Delta_x^\wedge = \infty$ ，因此 Fourier 变换没有局部化。

五、几点结论

综上所述，可以得出如下结论：

- 1、Fourier 变换局部性差；
- 2、窗口 Fourier 变换改进了 Fourier 变换的局部性，但其窗口大小形状不变；
- 3、正是 Fourier 分析的不足，导致了小波分析的诞生和发展。

§ 2-3 连续小波变换

本节，先给出小波及小波变换的定义，然后从时频局部化方面指出其优于 Fourier 变换之处，最后简要地介绍了二维连续小波变换。

一、小波概念

设 $\psi(x) \in L^2(R)$, 且 $\psi(x)$ 满足允许条件

$$C_\psi = 2\pi \int_R \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty, \quad (2-3-1)$$

这里 $\hat{\psi}(\omega)$ 为 $\psi(x)$ 的 Fourier 变换, 则称 $\psi(x)$ 为基本小波函数或小波母函数。

当 $\psi(x)$ 足够正则时(例如 $\psi(x) \in L^1(R) \cap L^2(R)$ 时就足够正则了), 允许条件意味着小波函数均值为零:

$$\int_R \psi(x) dx = 0, \quad (2-3-2)$$

因而在有些情况下, 就将小波函数定义为均值为零的函数。

从(2-3-2)可见, $\psi(x)$ 一定是振荡形的函数, 这也是小波这一名称的由来。

另外, 还可对小波函数加上一些条件, 如具有 k 阶消失矩:

$$\int_R x^j \psi(x) dx = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

消失矩的阶数决定了将小波用于小波变换时, 其检测信号(图像)奇异点的能力, 具有高阶消失矩的小波常使小波变换的许多系数接近于零, 这无疑是信号(图像)处理中的一个有用的性质。

对 $\psi(x)$ 进行伸缩、平移, 就得到一族函数

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in R, a \neq 0.$$

这里 a 是伸缩系数, b 是平移分量, $\psi_{a,b}(x)$ 称为由母函数 $\psi(x)$ 生成的连续小波函数。

下面我们给出二个基本小波函数。

1、Haar 小波^[13]。

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & 1/2 < x \leq 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其图形见图2-3。

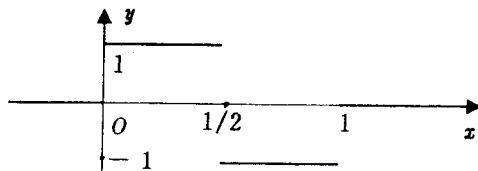


图 2-3

2、墨西哥草帽小波^[69]。