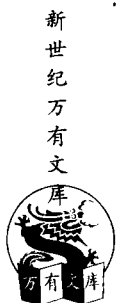


# 算经十书(一)

郭书春 刘 钝 校点

辽宁教育出版社



## 图书在版编目(CIP)数据

算经十书/郭书春,刘钝校点. —沈阳:辽宁教育出版社,  
1998.12

(新世纪万有文库·传统文化书系)

ISBN 7-5382-5111-1

I. 算… II. ①郭… ②刘… III. 古算经 IV. 0112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 02807 号

|       |                 |
|-------|-----------------|
| 学术策划  | 王 士 林 夕 柳 叶     |
| 文库工作室 | 俞晓群 杨 力 马 芳 刘国玉 |
|       | 王之江 柳青松 赵中男 袁启江 |

总 发 行人 俞晓群

责 任 编 辑 俞晓群 赵中男

美 术 编 辑 谭成荫

封 面 设 计 林 林

责 任 校 对 刘 璩

出 版 辽宁教育出版社(沈阳市北一马路 108 号)

发 行 辽宁省新华书店

印 刷 沈阳新华印刷厂

版 次 1998 年 12 月第 1 版第 1 次印刷

开 本 787×1092 毫米 1/32 印张 15.25

字 数 337 千字 插页 2

印 数 1—6 300 册

定 价 16.80 元(共二册)

# 【目录】

本书说明 郭书春

周髀算经

九章算术

海岛算经

孙子算经

张丘建算经

五曹算经

五经算术

缉古算经

附录

数术记遗

夏侯阳算经

# 本书说明

《算经十书》是中国汉魏以迄隋唐十部数学著作的总称。唐之后千余年来,其构成稍有变化。隋设算学馆,《九章算术》等算经是主要教材。唐初太史令李淳风(602~670)与算学博士梁述、助教王真儒等奉敕编纂并注释十部算经,包括《周髀算经》(赵爽注,甄鸾述)、《九章算术》(刘徽注)、刘徽著《海岛算经》、《孙子算经》、《夏侯阳算经》、张丘建著《张丘建算经》、祖冲之著《缀术》、甄鸾著《五曹算经》、甄鸾著《五经算术》、王孝通著《缉古算经》,是为中国传统数学奠基时期的总结。显庆元年(公元656年)完成,颁行国子监算学馆作为教材,并作为明算科的考试科目。北宋元丰七年(1084年)秘书省刊刻十部算经,是为世界上首次印刷数学著作。时《缀术》已佚,付之阙如。《夏侯阳算经》亦不存,因唐中叶韩延《算术》篇首有“夏侯阳曰”,被误认为《夏侯阳算经》而刻入,实际上刻入九部。这些印本经北宋末战乱散佚严重。南宋天文学家、数学家鲍澣之自庆元六年(1200年)至嘉定六年(1213年)收集到这些刻本,并在杭州七宝山宁寿观《道藏》中录得《数术记遗》一卷,陆续刊刻。明初严恭《通原算法》遂称这十部算书为“十经”,明末程大位《算法统宗》则称为“十书”。明代传统数学衰落,宋版算经散佚殆尽,鲍刻本十部算经到明末只存《九章算经》(半部)、《周髀算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《缉古算经》、《数术记遗》及《夏侯阳算经》的孤本。后来,《缉古算经》、《夏侯阳算经》又散佚,1980年文物出版社将现存六种影印成《宋刻算经六种》。清初毛扆访求得鲍刻本七种算经,影抄成汲古阁本。这些抄本后来传入清宫,1932年,北平故宫博物院影

印,收入《天禄琳琅丛书》,而原抄本今藏台北故宫博物院。明修《永乐大典》(1408年),将汉、唐、宋、元算经分类抄入“算”字条各卷。清乾隆中弘历下诏修《四库全书》,戴震从中辑录出《周髀算经》(1774年),用以校勘明万历间胡震亨刻本《周髀算经》;又从《永乐大典》辑录出《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《夏侯阳算经》,加以校勘整理;这七部戴震校勘本算经被排印,收入《武英殿聚珍版丛书》。戴震随后又收集到汲古阁本《张丘建算经》、《缉古算经》及明胡震亨刻本《数术记遗》,加以校勘,与上述七部算书一并抄入《四库全书》子部天文算法类。后来,戴震又借助汲古阁本,对这十部算经重加校勘,交孔继涵刻刊,这就是微波榭本《算经十书》(1777年),是中国历史上第一次正式出现《算经十书》的名称。此后200年间诸版汉唐算经,皆是戴震校本的翻刻本、排印本,或以其为底本的重校本。1963年中华书局出版钱宝琮校点《算经十书》,以孔刻本为工作底本,重加校点,所收十书亦与孔刻本相同,只是将《数术记遗》与贗本《夏侯阳算经》作为附录。这次校勘,《周髀算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《数术记遗》及《九章算术》前五卷以南宋本为底本,《缉古算经》、《夏侯阳算经》以汲古阁本为底本,《九章算术》后四卷以杨辉本为底本,而《海岛算经》、《五经算术》以由聚珍版与四库本恢复的戴震辑录本为底本。各部算经顺序仍依钱校本。

现将十部算经简述如下。

《周髀算经》原名《周髀》,作者不详。陈子在回答荣方“周髀者何”的问题时说:“古时天子治周,此数望之从周,故曰周髀。髀者,表也。”这就是周髀的本义,就是用竖立在周城的表竿进行测望计算。唐朝学者重视其数学内容,定为算学馆必修的十部算经之一,遂加“算经”二字,实际上是中国最早的数理天文学著作,用数学方法阐明盖天说和四分历。

全书共上下二卷。学者们对其成书时代与结构争议颇多。南宋鲍潯之根据卷上首之商高答周公问,认为“其书出商、周之间”。然此段以

“昔者”开头，可见所记之事发生在周初，而记此事之时则在这之后很久。而赵爽说陈子答荣方问“非《周髀》之本文”，换言之，赵爽认为《周髀》之本文，原只是周公与商高的问答，至于陈子与荣方的问答则是后人的增补。后者开头也有“昔者”，可见亦系后人追记。陈子荣方问答包含哪些内容，亦诸说并立。江晓原认为自卷上“昔者荣方问于陈子”至卷下末，均是陈子荣方问答，而英人古克礼(C. Cullen)将《周髀》分成11部分，第1、2部分分别是周公商高问答、荣方陈子问答，而此下的方圆之法，七衡，天地形状及昼与夜，璇玑、北极与五带，周天度和北极距度，晷影表，月离，日月升落与季节，历法周期九节都不是陈子的话。我们认为这种分类比较合理。至于这些内容写成的时代，钱宝琮根据《周髀》引用四分历，认为成书应在汉武帝改用《太初历》(前104年)之前；又根据《周髀》所载二十四气的名称和顺序与《淮南子·天文训》基本相合，断定《周髀》是公元前100年前后的作品。四分历产生于春秋后期，《周髀》与《淮南子》所记二十四气相合，为什么一定说《周髀》引用了《淮南子》而不是相反？古籍在流传过程中都会有不同程度的增删修定。例如，传本《孙子算经》有唐宋度量衡的制度，并没有人因此而断定它为唐以后才成书。所谓一部著作成书，应该指它的主体而言。因此，《周髀》成书年代实际上并未解决。我们只能说，《周髀》最晚成书于公元前100年前后，这远非它的可靠年代。无论如何，赵爽认定的《周髀》本文与陈子荣方问答及其以后的部分相比，在传本《周髀》中已经显得十分次要了。一般认为，《周髀》是在浑天说产生并逐步占上风时作者以盖天说为主也融会了浑天说的某些内容而形成的。因此，书中存在着许多矛盾。按能田忠亮(日)、钱宝琮、薄树人的观点，两卷所反映的宇宙模式是不同的，他们以第一次盖天说与第二次盖天说加以区分。也有人认为全书形成一个自治的体系。

《周髀》首先通过商高答周公问阐述了数学方法在测田量地、制定历法中的巨大作用，勾股、圆方的基本知识，以及用矩之道。然后通过陈子答荣方问提出学习数学要“通类”，能“类以合类”，作到“问一类而

以万事达”。因此,数学中的“术”要“言约而用博”。这种思想实际上规范了中国传统数学的形式与特点。接着,陈子以勾股定理与比率理论分别求出太阳的高与太阳的直径。在作了这些准备之后,《周髀》以准公理化方法系统描述了盖天说宇宙模式,并以此解释有关的天文现象,是中国古代建立科学理论的一次伟大尝试。至于这个宇宙模式中天与地的关系,有人认为是两个平行的球冠形,也有人认为是两个平行的平面。盖天说是中国古代的一种宇宙理论,大约产生于殷周之际,到《周髀》发展到最高峰。《晋书·天文志》说:“其言天似盖笠,地法覆槃,天地各中高外下。北极之下为天地之中,其地最高,而滂沱四隤,三光隐映,以为昼夜。天中高于外衡冬至日之所在六万里。北极下地高于外衡下地亦六万里,外衡高于北极下地二万里。天地隆高相从,日去地恒八万里。日丽天而平转,分冬夏之间日所行道为七衡六间。每衡周径里数,各依算术,用勾股、重差推晷影极游,以为远近之数,皆得于表股者也。”这大体勾勒出《周髀》盖天说的宇宙模式。《晋书·天文志》又载“《周髀》家”说。两者稍有不同,后者较现《周髀》的理论为粗糙,是较为原始的盖天说。两者之不同既反映出盖天说发展的不同阶段,也反映了《周髀》的编纂经历了相当长的过程,其中包括增补删削,修正甚至改写。

四分历大约产生于公元前五世纪,以  $365\frac{1}{4}$  日为一回归年,十九年有 7

个闰月,故一个朔望月为  $29\frac{499}{940}$  日。它既以阴历月为基础,又用闰月兼顾了太阳的周年运动,实际上是阴阳历。《周髀》系统阐述了四分历的基本数据及有关算法。为了进一步适应农业生产的需要,人们把一个太阳年分成若干等分,便产生了节气的概念。经过逐步演变,大约到战国时期,形成了二十四节气。《周髀》记载了二十四节气的晷影长度及其计算方法。其晷影长度是一个等差数列。七衡的直径长度也是一个等差数列。这都是中国数学史上较早的等差数列。《周髀》用七衡图解释了季节和昼夜的变化,并由太阳光照半径的假设解释了昼夜和星辰出没现象。《周髀》还有用表测量二十八宿距度的方法。另外,《周

髀》的黄图还有冬至和春秋分及二十八宿和其他星象,是以北极为中心的全天星图,后来被称为盖图。《周髀》的测望及其他计算方法中都用到繁杂的分数计算,说明人们已经谙熟分数四则运算。后来,浑天说兴起,盖天说受到冷落,但人们仍然重视《周髀》的数学内容,这大约是后来被看成算经的根本原因。

传本《周髀算经》有赵君卿注,甄鸾重述,唐李淳风等注释。赵君卿,生平籍贯均无考。君卿于序及注文中自称“爽”。唐李籍《周髀算经音义》说:“君卿,赵爽字也。”《隋书·经籍志》、《新唐书·艺文志》都有赵爽注《周髀》,估计爽是赵爽的别名。鲍澣之认为赵爽为魏晋间人。明刻本题“汉赵君卿注”。钱宝琮根据赵爽注两次引用《乾象历》,而东汉末刘洪所撰《乾象历》只在三国时期的吴国颁行过,认为赵爽是吴人,作注年代在吴国颁行《乾象历》的公元222年之后。序中自称“负薪余日,聊观《周髀》”,可见他是一个布衣天文数学家。钱宝琮指出:“赵爽对于《周髀》原著作了忠实的注解,并且援引了《淮南子·天文训》、张衡《灵宪》、刘洪《乾象历》,以及《易乾凿度》、《河图括地象》、《尚书考灵曜》等纬书来证实《周髀》的说法。赵爽补绘了‘日高图’和‘七衡图’,并加以说明,使《周髀》作者的盖天说昭然若揭,这对于后世的读者是大有裨益的。赵爽又撰‘勾股圆方图’说一篇附于《周髀》首章的注中。在这短短五百余字的文章中,勾股定理,关于勾、股、弦的几个关系式,以及二次方程解法都得到了几何证明。”这些评述是非常中恳的。他的“勾股圆方图”集两汉以来中国勾股知识之大成,与刘徽《九章算术》勾股章注基本一致。

甄鸾的重述水平不高且多错误,今全部删除。李淳风等注释则批评了《周髀》本文和赵爽注、甄鸾重述中的不足与错误。李淳风,天文学家、数学家、星占学家。他于贞观七年(633年)撰《法象志》,评说前代浑仪得失,制造新的浑仪,有许多创新。贞观十五年任太史丞,二十二年迁太史令,制定《麟德历》,为《晋书》、《隋书》撰《天文志》、《律历志》,是天文史、历法史及度量衡史的重要文献。显庆元年(656年)以修国



史功封昌乐县男。奉诏组织国子监算学博士梁述、太学助教王真儒等注释整理《周髀》、《九章》等十部算经亦完成于是年。他还撰《乙巳占》，是中国古代最重要的星占学著作。李淳风等批评了《周髀》中八尺之表南北千里日影相差一寸的成说，指出这是脱离实际的，况且测望的地面不可能是平面。因此，他在注文中引进了四种斜面重差术，这是中国数学史上的又一个创造。他还指出，赵爽用等差级数插值法推算二十四气的表影尺寸与实际测量所得的结果不合。

明胡震亨刻本还有唐寅注，意义不大。清中叶修《四库全书》以来，人们重视对《周髀算经》的研究，首先是戴震，他对《周髀算经》进行了全面校勘，后来道光年间顾观光、光绪年间孙诒让也作了校勘。近人对《周髀算经》的研究首推钱宝琮，他发表了多篇研究论文，并作了全面校勘。

《九章算术》唐宋间又称《九章算经》，是中国古代最重要的数学经典。它集中国先秦到西汉数学知识之大成，凡九章，含有近百条普遍性的抽象公式、解法及 246 个例题。其主体部分或先列出一个或几个例题，再给出抽象的术，例题一般只有题目、答案两项；或先给出抽象的术，再列出若干例题，例题有题目、答案、术三项，这种术是抽象的总术的应用；另有约 50 个题目（主要在衰分、均输、勾股三章）的术尽管其实质有普适性，但抽象性不够，是针对特定问题的解法，可称为应用问题集的形式；而《九章算术》的主体显然是术文统率例题的形式。

《九章算术》的编纂经过了若干世代，无数人的努力。魏刘徽说：“周公制礼而有九数，九数之流，则《九章》是矣。往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。”这里说到的“九数”见于《周礼·地官司徒》：“保氏掌谏王恶，而养国子以道，乃教之六艺：一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五驭，五曰六书，六曰九数。”《周礼》是先秦作品，保存了西周（可能还包括更晚时期）的各种制度。东汉末经学大师郑玄（127~200）引东汉初大司农郑众说：

“九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要。今有重差、勾股也。”差(音 ci)分就是衰分，赢不足就是盈不足，可见先秦“九数”与《九章算术》的篇名差别主要在于后者以勾股取代旁要。根据北宋贾宪《黄帝九章算经细草》把容横容直方法(即将一长方形斜解成两勾股形，在对角线有公共点的分别容于两勾股形的两长方形面积相等)称为旁要法，旁要指勾股容方、容圆以及测望方邑诸术，即勾股章中以术文统率例题的部分。如果将《九章算术》的这一部分恢复旁要的篇名，剔除解勾股形等内容，并将衰分、均输两章剔除非衰分、均输的内容，则它与二郑所说的“九数”完全吻合，并且都采取术文统率例题的形式。这说明刘徽所说的“九数之流则《九章》是矣”以及“故校其目则与古或异”是完全正确的。八十年代张家山汉墓出土的《算数书》有待于研究，已经公布的“少广”一题与《九章算术》少广章第一问内容相同而文字古朴，为刘徽所说的《九章算术》“所论者多近语也”提供了佐证。日本堀毅比较了《九章算术》反映的物价与《史记》、《汉书》和秦汉简牍等反映的物价，认为说“《九章算术》里的物价即汉代物价是颇勉的”，得出“《九章算术》基本上反映出战国、秦时的物价”的结论。而反映汉代物价的大多题目在上面所说的应用问题集的部分中，而反映秦及先秦物价的大多题目在术文统率例题的部分，这就进一步证明，刘徽的话是可靠的；自戴震起，否认张苍等删补《九章算术》的看法是错误的。张苍(? ~前 152 年)，西汉初政治家、历算学家。先仕秦，明习天下图书计籍，后参加刘邦起义军，以功封北平侯。他“善用算律历”(《史记·张丞相列传》)，以列侯居相府，为主计四岁。吕后、文帝时先后为御史大夫、丞相，享年百余岁。宣帝(前 73 ~ 前 49 年)时大司农中丞耿寿昌也是一位历算学家，他“善为算，能商功利”(《汉书·食货志》)，创建常平仓，民便之。张苍、耿寿昌先后收集因秦火及秦末战乱散佚的九数遗文，变成当时的语体文，加以整理，并收集当时人们的数学创造，进行增补，最终编定《九章算术》。一般说来，采取术文统率例题形式的，主要是由先秦遗文整理而成，也有张、耿二人的增补，而采取应用问题集形式的，则

大都是张、耿的增补。这种形式的差别是汉代理论思维远低于战国时代的反映。张苍是荀子的学生，荀派儒学在西汉影响极大，《九章算术》没有定义，没有证明与推导，正是荀派儒学影响其编纂思想的结果。

《九章算术》包含现今算术、代数、几何等各方面内容。卷一方田章提出了世界上最早最完整的分数四则运算法则；卷二粟米章的今有术是比例算法法则；卷三衰分章衰分术、反衰术，卷六均输章的均输术是比例分配法则；卷七盈不足章提出了解盈不足、两盈、两不足、盈适足、不足适足问题的法则及用盈不足术解决一般算术问题的方法。卷一方田章提出了若干平面图形的面积公式；卷五商功章提出了若干多面体及圆体的体积公式及土方工程问题；卷九句股章提出了勾股定理、若干解勾股形方法、勾股容方、容圆问题，其中有世界上最早最完整的勾股数通解公式，还有若干一次测望问题。卷四少广章提出了世界上最早的完整的开平方、开立方程术，卷九句股章还有一个求解二次方程的例题；卷八方程章的方程术是现今线性方程组解法，正负术提出了正负数加减法则，都超前其他文化传统数百年甚至上千年。《九章算术》确定了中国古代数学的基本框架，以计算为心，有强烈的程序化、机械化的特点，理论密切联系实际的风格，以及以算法统率例题的基本形式。然而，对数学概念没有定义，对数学公式、解法没有推导证明，则是其严重缺点。此后，中国数学著述主要采用两种方式，一是以《九章算术》为楷模编纂新的著作，一是为《九章算术》作注，其中最为重要的是魏刘徽注、唐李淳风等注释、北宋贾宪细草及南宋杨辉详解。现传《九章算术》合本文、刘徽注、李淳风等注释于一体。

刘徽是魏晋间数学家，潞乡（今山东省邹平县）人，生平不详。魏陈留王景元四年（公元263年）撰《九章算术注》，并自撰自注《重差》，作为第10卷，时刘徽年约30岁上下。后《重差》以《海岛算经》为名单行，是为《算经十书》之一。刘徽还撰《九章重差图》一卷，已佚。

刘徽深受魏晋辩难之风的影响。他对《九章算术》“析理以辞，解体用图”，在很大程度上弥补了《九章算术》的不足，其贡献主要在数学理

论方面。他全面论证了《九章算术》的公式、解法,发展了《九章算术》的率概念,提出“凡数相与者谓之率”这一定义,把率看成运算的纲纪,指出率有“乘以散之,约以聚之,齐同以通之”这三种等量变换,用率论述了大部分算法的正确性,包括近 200 个题目。他还发展了传统的出入相补原理,用此原理成功地证明了许多多边形面积及多面体体积公式,论证了开方术及开立方术。将极限与无穷小分割思想引入数学证明,是刘徽注的最大成就。他用极限思想和无穷小分割证明了《九章算术》的圆面积公式“半周半径相乘得积步”,已接近微积分产生前的面积元素法。在此基础上,他在中国首次提出了求圆周率精确值的正确程序,并求出了  $\frac{157}{50}=3.14$  及  $\frac{3927}{1250}=3.1416$  两个近似值。后来,祖冲之将之精确到 8 位有效数字,据认为,使用的仍然是刘徽的方法。刘徽注关于多面体体积的论述已接触到现代体积理论的核心,关于鳖臑(四面体)是解决多面体体积的“功实之主”的论断与现代数学的结论完全一致。他将多面体分割为有限个长方体、堑堵、阳马、鳖臑证明其体积公式。然而,用棋验法和有限次分割却无法证明阳马与鳖臑的体积公式。为此,他提出了在堑堵中阳马与鳖臑的体积之比恒为 2:1 这一重要原理,并用无穷小分割和极限思想证明了这一原理,从而解决了阳马和鳖臑体积公式,这一原理今称为刘徽原理。刘徽把他的多面体理论建立在无穷小分析基础之上。十九世纪的高斯(Gauss)猜想和 1900 年的希尔伯特(Hilbert)的第三问题就是把多面体理论建立在无穷小分割基础之上。刘徽早在 1700 多年前就考虑了十九、二十世纪数学大师所考虑的问题。刘徽注实际上已经认识到,若等高的两立体的每层的面积成定比,则其体积成定比,这实际上就是祖暅之原理。由此,他指出了《九章算术》开立圆术的错误,设计了牟合方盖,指出了彻底解决球体积的正确途径。在开方不尽时,刘徽注提出了继续开方,求其徽数,以十进分数表示无理根的近似值,开十进小数之先河,而且是计算圆周率的前提条件。刘徽还有许多创造,比如解线性方程组的互乘相消法与方程新

术。刘徽把数学的全部知识和各个分支看成一个发自一端的“枝条虽分而同本干”的有机整体,这个端就是“规矩度量可得而共”,形象地概括了中国数学的特点。刘徽继承先秦墨家的传统,对许多重要的数学概念给出了定义。他的推理当然继续使用类比与归纳,但大量地使用演绎推理,并且总的说来以后者为主。因此,他的注释,尤其是对最重要的命题的注释,是真正的证明。他的证明,有时使用分析法,有时使用综合法,有时是两者结合。不管什么方式,都是论证严谨、条理清楚,并且没有任何循环推理。刘徽奠定了中国传统数学的理论基础。那种认为中国传统数学没有形式逻辑没有理论的看法是因为没有读或者没有读懂刘徽注的表现。

传本《九章算术》卷五、七、八无李淳风等注释。李淳风等批评了均输章负笈术的失误,以  $\pi = \frac{22}{17}$  代替  $\pi = 3$  和徽率  $\pi = \frac{157}{50}$  入算,其他方法则几无创新。而他对刘徽注有几处指责,但事实上错误的不是刘徽,而是李淳风等,反映出其数学水平、逻辑思想远在刘徽之下,尤其不能理解刘徽的理论贡献。李淳风等注释最有意义的部分是引用了祖暅之开立圆术,保存了祖暅之原理——“夫叠棋成立积,缘幂势既同,则积不容异”,以及祖暅之借助此原理求出牟合方盖的体积,从而彻底解决球体积的方法。《缀术》失传后,祖暅之的这项成就赖此得以保存到今天。

刘徽注、李淳风等注释的《九章算术》历来是人们研究的重要课题。唐李籍撰《九章算术音义》,对许多字词训诂,保存了许多有意义的版本资料。十一世纪上叶北宋贾宪撰《黄帝九章算经细草》,在刘徽注的基础上,将《九章算术》抽象得不够的算法(主要是卷三、卷六及卷九的解勾股形方法)进一步概括为普适性的公式、算法,同时提出开方作法本源(今称之为贾宪三角),创造增乘开方法,奠定了这一分支在宋元突飞猛进发展的基础。南宋杨辉于1261年撰《详解九章算法》,实际上是对贾宪《细草》的详解,他在商功章的比类中发展了北宋沈括开创的二阶等差级数求和问题,还在纂类中按方法的性质对《九章算术》的方法与

问题重新分类。贾宪的《细草》被杨辉《详解》抄录，杨辉《详解》衰分章后半卷及少广章存于残本《永乐大典》中，而商功章约半章及均输、盈不足、方程、勾股约四章半有《宜稼堂丛书》本传世，共存约三分之二。

明《永乐大典》(1408年)将《九章算术》分类抄录。明朝数学落后，《九章算术》等汉唐算经的宋刻本大都散佚。明朝有代表性的著作如吴敬《九章算法比类大全》、程大位《算法统宗》等大都又恢复到《九章算术》的水平，对刘徽注的高深理论和方法则根本不提及，大约根本看不懂。

清中叶乾嘉时期人们重新重视《九章算术》的研究，这在很大程度上要归功于乾隆决定修《四库全书》及戴震(1724~1777)的贡献。戴震从《永乐大典》中辑录出《九章算术》，详加校勘，抄入《四库全书》，并收入《武英殿聚珍版丛书》，给人们基本上提供了可以卒读的完整的《九章算术》。但是，戴震辑录工作十分粗疏，校勘中师心自用误改不误原文处甚多，给《九章》版本上带来严重混乱。在见到汲古阁影宋本之后，他又整理了两个本子，先后交屈曾发和孔继涵刊刻，其中把他自己的大量校勘冒充宋版原文，并作了大量修辞性加工，进一步造成《九章算术》版本上的混乱。嘉庆间李潢(?~1812)以孔刻本为底本作《九章算术细草图说》，又校勘了若干戴震漏校的文字，同时对《九章算术》本文和刘、李注详细图说，是研究《九章》的必读作品。同时，汪莱、李锐、沈钦裴、戴敦元等也对《九章算术》进行校勘，李潢的《细草图说》吸收了后三人的校勘，由沈钦裴整理定稿。

近人钱宝琮(1892~1974)对《九章算术》的研究贡献极大。他以现代数学和历史学的方法系统总结了《九章算术》和刘徽注的数学成就，考察了它们的源流及其在世界数学史上的地位。他破除了对戴震校勘的迷信，纠正了戴震、李潢的若干错校，提出了若干新的校勘，指出孔刻本并非宋本的翻刻本，这些成果集中在他的大量论文，以及于1963、1964年先后出版的校点《算经十书》和《中国数学史》中。

七十年代末以后，海峡两岸，国内外掀起了研究《九章算术》及其刘

徽注的高潮,近百人参加,发表论文数百篇,出版专著10余部,其盛况为中国数学史学史上所仅见,内容涉及《九章算术》的编纂、形式与特点,《九章算术》与刘徽注的数学成就,刘徽的数学体系、数学思想与逻辑,刘徽的思想渊源、时代背景及籍贯,《九章算术》的版本与校勘,《九章算术》的白话翻译、日译、法译与英译。其代表性的著作有汇校《九章算术》、《古代世界数学泰斗刘徽》、《九章算术》白话翻译(以上郭书春著)、《〈九章算术〉及其刘徽注研究》(李继闵著)。法译本、英译本正在出版中。

《海岛算经》一卷,刘徽撰,原名《重差》,为刘徽《九章算术注》之第十卷,系刘徽自撰自注。后来单行,因第一题为测望一海岛的高、远,遂改称今名。《玉海》称“《海岛算经》一卷,甄鸾注,李淳风等注释”,《宋史·艺文志》有“甄鸾《海岛算术》一卷”,可见改称《海岛算经》在甄鸾时或之前。宋刻《海岛算经》早已亡佚,今传本是戴震从《永乐大典》中辑录的9个题目校订而成的,题目的数目与次序是否与原本一致,已无从考察。传本只有李淳风等注释,而无刘徽自注。

郑玄引郑众注“九数”,在列举了先秦“九数”之后说:“今有重差、勾股也。”可见重差与勾股都是汉代新开创的数学分支。《周髀算经》卷上有测望太阳高、远的方法,虽没有用到重差术,却给创造重差术以契机。西汉刘安主编的《淮南子·天文训》才有重差术:“欲知天之高,树表高一丈,正南北相去千里。同日度其阴,北表二尺,南表尺九寸,是南千里阴短寸,南二万里则无影,是直日下也。阴二尺而得高一丈者,南一而高五也。则置从此南至日下里数,因而五之,为十万里,则天高也。”这里实际上用到求远的重差公式:南表去日 = (表距 × 南表阴) ÷ 阴差 =  $(10000 \text{ 里} \times 1 \text{ 尺} 9 \text{ 寸}) \div 1 \text{ 寸} = 19000 \text{ 里}$ 。因此,北表去日 = 南表去日 + 表距 =  $19000 \text{ 里} + 1000 \text{ 里} = 20000 \text{ 里}$ 。然后,由相似勾股形,由表1丈阴2尺,日高 =  $20000 \text{ 里} \times 5 = 100000 \text{ 里}$ 。刘安之后,重差术的发展情况不十分清楚。刘徽在《九章算术注序》中引述了《周礼》及其郑玄注

中有关测日的记载后指出：“《九章》立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见，无有超越若斯之类。”他发现“九数”有“重差”一项，其旨趣就是解决这一类问题。他认为：“凡望极高，测绝深，而兼知其远者，必用重差、勾股。”因此，他造《重差》，并为注解，缀于“勾股”之下。这就是《九章算术注》第十卷。

刘徽在《九章算术注序》中提出了测日公式：“以景差为法，表高乘表间为实，实如法而一。所得加表高，即日去地也。以南表之景乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也。”《海岛算经》中测望海岛的高、远的公式与此完全相同。他进一步说：“度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。”他设计了望海岛、望方邑、望深谷3个二次测望的问题，望松、望楼、望波口、望津4个三次测望的问题，以及望清渊、登山临邑2个四次测望的问题。其中望海岛的重表法、望方邑的连索法，望深谷的累矩法，为测望高深广远的三种基本方法；而望海岛、望松、望深谷是三个最基本的公式，其他公式都可以由这三个公式导出。这些公式中及计算中都要用到两次测望之差的比率，如测日公式中的表间/景差，所以称为重差。

《海岛算经》的解法，除第七题的“又术”外都是正确的。这些解法是怎么得出的，由于刘徽自注失传，不得而知。李淳风等的注释只是说明了演算步骤，而未给出造术理由。清李潢撰《海岛算经细草图说》，由骆腾凤校订，沈钦裴补草，沈钦裴又撰《重差图说》一卷，均用相似形对应边成比例说明术文的正确性。钱宝琮认为添线太多，不符合刘徽造术原意。现今对《海岛算经》的造术仍有争论，有人认为是用比率理论，有人认为是用出入相补原理。我们根据刘徽注解《九章算术》勾股章勾股容方、容圆及出邑南北门诸问时既用出入相补原理，又用比率理论，认为刘徽很可能同时使用了这两种方法。

《孙子算经》原名《孙子算术》，大约唐初后与《九章算术》等改称算经。现传本三卷，《隋书·经籍志》云“二卷”，未提作者。清朱彝尊认为



其作者是春秋末军事家孙武，戴震则根据书中有长安、洛阳、佛书等用语否定朱说，近人钱宝琮认为《孙子算经》的原著时代在公元400年前后。《旧唐书·经籍志》云甄鸾撰注，宋本各卷首均标明“李淳风等奉敕注释”，史籍也不乏李氏注《孙子算经》的记载，但传本无甄、李二家注。

《孙子算经》是一部供数学初学者使用的入门读物。卷上是一些必要的预备知识，包括度量衡制度、大数进位法、金石比重表、筹算记数法、筹算乘除程序、粟米换算表、九九表、平方表，以及一些整数乘除法的例题。筹算是中国宋元以前的主要计算工具，最晚在春秋时代已形成完整的十进位置制记数法。东汉许慎《说文解字》说“算，长六寸，计历数者，从竹，从弄，言常弄乃不误也。”而“算，数也。从竹，从具，读若算。”清段玉裁注说：“算为算之器，算为算之用。”但现传两汉著作中既没有筹算记数法的记载，也没有筹算乘除法的程序表示，这两项内容首次在《孙子算经》中出现。根据《孙子算经》的记载，筹算记数有纵横两种：

|   |    |     |      |      |   |   |    |     |
|---|----|-----|------|------|---|---|----|-----|
| I | II | III | IIII | IIII | 丁 | π | ππ | πππ |
| — | 二  | 三   | 三    | 三    | 上 | 上 | 上  | 上   |
| 1 | 2  | 3   | 4    | 5    | 6 | 7 | 8  | 9   |

用这18个符号交错使用，并用空位表示零，可以表示任何自然数，也可以表示分数、小数、负数、开方式（高次方程）、方程（线性方程组），并进行运算。卷中和卷下是关于人们生活生产中的应用题、趣味题及其解法，针对具体问题作出演算。卷中28问，包括分数四则运算、今有术、面积、体积、商功、衰分、开平方、盈不足、整数的乘除及方程等方法，有9个题目与《九章算术》完全相同。第十九问开平方，完成第一步后不撤去借算，比《九章算术》有所改进。第二十五问是已知总和及公差，求等差级数各项，第二十六问是方程问题，仍用直除法，但用特殊的方法消元，避免了负数。第二十四问解法繁琐。卷下36问，除运用整数乘法外，还有均输、方程、盈不足、衰分、相似勾股形及同余式解法等问题。“物不知数”问在中国和世界数学著作中首次提出了同余式问题，