

高等学校财经类专业核心课程教材

经济数学基础

线性代数习题解答

胡显佑 靳云汇 / 著



四川人民出版社
2001年·成都

前 言

1992 年, 受原国家教委委托, 中国人民大学和北京大学共同承担了编写核心课程《经济数学基础》统编教材的任务, 该教材分为《微积分》、《线性代数》和《概率统计》三个分册, 本教材出版后, 得到了各方面的好评, 使用本教材的读者也多次要求出版本套教材的全部习题解答. 这次, 借本教材修订的机会, 我们将教材中的全部习题评解后分册出版, 可供使用本套教材的教师、同学参考.

解答习题是数学教学的重要环节之一. 教材中习题较多, 部分习题可作为课后必做的作业, 其余可供同学选做. 对使用本书的同学, 则应自己独立完成教材中的习题, 而不要事先查阅本书习题解答. 这样, 才能深刻理解教材中的有关概念、定理, 并逐步达到灵活运用水平.

本习题解答也可供准备报考经济类硕士研究生的考生和自学者使用.

编者

2000 年 6 月

目 录

习题一.....	(1)
习题二.....	(38)
习题三.....	(79)
\习题四.....	(129)
习题五.....	(156)
\习题六.....	(189)

习 题 一

1. 计算以下行列式

$$(1) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 1 & \log_b a \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a^3 & a^2-a+1 \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -5 & -4 & 1 \\ 10 & 3 & 7 \end{vmatrix};$$

$$(7) \begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix};$$

$$(8) \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ c & 1 & -a \\ b & a & 1 \end{vmatrix}.$$

解 (1) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \times 5 - 3 \times (-1) = -7.$

$$(2) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$(3) \begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 1 & \log_b a \end{vmatrix} = \log_a b \cdot \log_b a - 1$$

$$= \frac{\lg b}{\lg a} \cdot \frac{\lg a}{\lg b} - 1 = 0$$

$$(4) \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a^3 & a^2-a+1 \end{vmatrix} = (a+1)(a^2-a+1) - a^3$$

$$= (a^3+1) - a^3 = 1$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} &= 1 \times (-1) \times 0 + (-1) \times 1 \times 1 + 3 \times 2 \times 2 - \\
 &\quad 3 \times (-1) \times 1 - (-1) \times 2 \times 0 - 1 \times 1 \times 2 = \\
 &\quad 0 - 1 + 12 + 3 - 0 - 2 = 12
 \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -5 & -4 & 1 \\ 10 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -56 + 70 + 45 - 120 - 6 + 245 = 178$$

$$(7) \quad \begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix} = 0 - abc + abc - 0 - 0 - 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ c & 1 & -a \\ b & a & 1 \end{vmatrix} &= 1 + abc - abc + b^2 + a^2 + c^2 \\
 &= 1 + a^2 + b^2 + c^2
 \end{aligned}$$

2. 解方程

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & x & 6 \end{vmatrix} = 1; \quad (2) \quad \begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$$

解 (1) 原方程可化为

$$4 + 2x - x^2 = 1,$$

即 $x^2 - 2x - 3 = 0.$

解得 $x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$

(2) 原方程可化为

$$-x^2 - x + 2 = 0,$$

即 $x^2 + x - 2 = 0.$

解得 $x_1 = -2, \quad x_2 = 1.$

3. 解下面的线性方程组

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} x_1 + ax_2 = a^2 \\ x_1 + bx_2 = b^2 \end{cases} (a \neq b);$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 9 \end{cases}; \quad (4) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

解 (1) 方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1,$$

所以,

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{1}{3}.$$

(2) 方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - a \neq 0,$$

又

$$D_1 = \begin{vmatrix} a^2 & a \\ b^2 & b \end{vmatrix} = ab(a - b), \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ 1 & b^2 \end{vmatrix} = b^2 - a^2,$$

所以,

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = ab, \quad x_2 = b + a.$$

(3) 方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -5 \\ 9 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & -5 \\ 4 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -4,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

所以, $x_1 = \frac{D_1}{D} = 2$, $x_2 = \frac{D_2}{D} = -1$, $x_3 = \frac{D_3}{D} = 0$.

(4) 方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0,$$

又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21.$$

所以, $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{13}{28}$, $x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{47}{28}$, $x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{3}{4}$.

4. 求下面各排列的逆序数, 并说明它们的奇偶性.

(1) 4 2 1 3;

(2) 5 4 2 1 6 3;

(3) 1 3 4 7 8 2 6 9 5;

(4) $n(n-1)(n-2)\cdots 21$.

解 (1) 从该排列左边第一个数算起, 与其右边的各数依次比较, 可求出排列中各元素对应的逆序个数, 如下表:

排列	4	2	1	3
逆序个数	3	1	0	

所以,排列 4213 的逆序数 $\tau(4213)=4$,该排列为偶排列.

(2)与(1)类似,列表

排列	5	4	2	1	6	3
逆序个数	4	3	1	0	1	

所以,排列 542163 的逆序数 $\tau(542163)=9$,该排列为奇排列.

(3)与(1)类似,列表

排列	1	3	4	7	8	2	6	9	5
逆序个数	0	1	1	3	3	0	1		

所以,排列 13478269 的逆序数 $\tau(13478269)=10$,故该排列为偶排列.

(4)类似于(1),列表

排列	n	$(n-1)$	$(n-2)$	$\cdots$	2	1
逆序个数	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$\cdots$	1	

所以,所求逆序数

$$\begin{aligned}\tau(n(n-1)\cdots 2\ 1) &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

由此可知,当 $n=4k, 4k+1$ 时,该排列为偶排列;当 $n=4k+2, 4k+3$ 时,该排列为奇排列.

5. 确定 i 和 j 的值,使得 9 级排列

(1) 1 2 7 4 i 5 6 j 9 成偶排列;

(2) 3 9 7 2 i 1 5 j 4 成奇排列.

解 (1)由已知排列可知, i, j 只能取 3 或 8. 设 $i = 3, j = 8$, 则得九级排列 1 2 7 4 3 5 6 8 9, 其逆序数

$$\tau(1\ 2\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9) = 5$$

由此可知: $i = 3, j = 8$ 时, 该排列为奇排列.

作对换(3, 8), 则排列 1 2 7 4 8 5 6 3 9 必为偶排列. 所以, $i = 8, j = 3$.

(2)由已知排列可知, i, j 只能取 6, 8 两个数. 设 $i = 6, j = 8$, 得九级排列 3 9 7 2 6 1 5 8 4. 其逆序数为

$$\tau(3\ 9\ 7\ 2\ 6\ 1\ 5\ 8\ 4) = 20.$$

即, 当 $i = 6, j = 8$ 时, 该排列为偶排列.

作对换(6, 8), 所得排列(3 9 7 2 8 1 5 6 4)必为奇排列. 所以, $i = 8, j = 6$.

6. 下列各项, 哪些是五阶行列式 $|a_{ij}|$ 中的一项. 若是, 试决定该项的符号.

$$(1) a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54};$$

$$(2) a_{31}a_{12}a_{43}a_{52}a_{24};$$

$$(3) a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}.$$

解 (1)该项各元素的行标构成排列(1 2 3 4 5), 这是一个自然序排列, 故只需求该项各元素列标所组成的排列逆序数. 因为

$$\tau(3\ 5\ 2\ 1\ 4) = 6$$

即排列(3 5 2 1 4)为偶排列. 于是, 该项应取正号.

(2)该项中, 元素 a_{12}, a_{52} 取自同一列(第 2 列), 故该项不是五阶行列式 $|a_{ij}|$ 中的一项.

(3)该项是五阶行列式中取自不同行、不同列的元素的乘积, 故该项是五阶行列式的一项, 先将该项改写为

$$a_{12}a_{21}a_{35}a_{43}a_{54}$$

其列标组成的排列的逆序数为

$$\tau(2\ 1\ 5\ 3\ 4) = 3$$

故该排列为奇排列, 该项应取负号.

7. 根据行列式的定义计算下面的行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 (1) 根据 n 阶行列式的定义, D_n 的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中, 仅当 $j_1 = 2, j_2 = 3, \cdots, j_{n-1} = n, j_n = 1$ 时, 该项不等于零. 所以,

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{\tau(2\ 3\ \cdots\ n\ 1)} 1 \times 2 \times \cdots \times n \\ &= (-1)^{n-1} n! \end{aligned}$$

(2) 根据 n 阶行列式的定义, D_n 的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中, 仅当 $j_1 = n, j_2 = n-1, \cdots, j_n = 1$ 时, 该项不等于零. 所以,

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 1)} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{[(n-1)+\cdots+1]} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1} \end{aligned}$$

(3) 根据 n 阶行列式的定义, D_n 的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中, 仅当 $j_1 = n-1, j_2 = n-2, \cdots, j_{n-1} = 1, j_n = n$ 时, 该项不等于零. 所以,

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{\tau[(n-1)(n-2)\cdots 1n]} 1 \times 2 \times \cdots \times n \\ &= (-1)^{[(n-2)+\cdots+1]} n! \\ &= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n! \end{aligned}$$

(4) 根据 n 阶行列式的定义, 该五阶行列式的一般项为:

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4 j_5)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$$

注意到: j_3, j_4, j_5 等于 3, 4, 5 时 a_{ij_i} ($i = 3, 4, 5$) 都是零. 由于 j_3, j_4, j_5 为 1, 2, 3, 4, 5 中的三个不同的数. 所以, 无论如何取, 至少要取到 3, 4, 5 中的一个数. 即一般项中至少有一个因子等于零. 于是, 该行列式的每一项都是零. 故该行列式等于零.

8. 用行列式性质计算下列行列式

$$\begin{aligned} (1) & \begin{vmatrix} 32153 & 32053 \\ 72284 & 72184 \end{vmatrix}; & (2) & \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}; \\ (3) & \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

解 (1) $\begin{vmatrix} 32153 & 32053 \\ 72284 & 72184 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 32053 \\ 100 & 72184 \end{vmatrix}$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ \times(-1) \end{array}$

$$= 100 \begin{vmatrix} 1 & 32053 \\ 1 & 72184 \end{vmatrix} = 100(72184 - 32053) = 4013100$$

$$(2) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 2(x+y) & x+y & x \\ 2(x+y) & x & y \end{vmatrix}$$

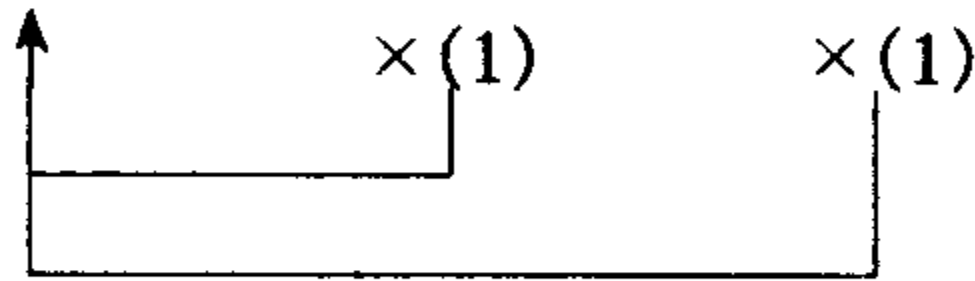
$\begin{array}{c} \uparrow \\ \times(1) \quad \times(1) \end{array}$

$$= 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \begin{array}{c} \times(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$= 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y) \begin{vmatrix} x & -y \\ x-y & -x \end{vmatrix}$$

$$= -2(x^3 + y^3)$$

$$(3) \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$


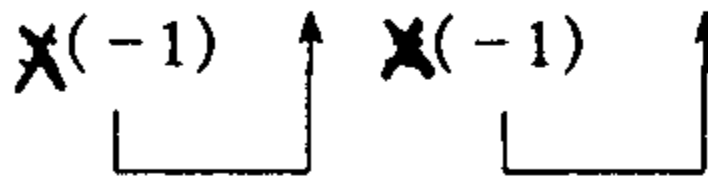
$\times(1)$ $\times(1)$

$$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & c+a+b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^3.$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \times(-1) \\ \leftarrow \\ \times(-1) \end{matrix}$$

$$= xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -y \end{vmatrix}$$


$\times(-1)$ $\times(-1)$

$$= xy \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -y \end{vmatrix}$$

$$= x^2 y^2.$$

9. 证明

$$(1) \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix};$$

$$* (3) \begin{vmatrix} by+az & bz+ax & bx+ay \\ bx+ay & by+az & bz+ax \\ bz+ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

证 (1)

$$\text{左端} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b+c & c \\ a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

(2)

$$\text{左端} = \begin{vmatrix} y & z & x \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & x & y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z & x \\ y & z & x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} z & x & y \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} \\
&= 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\text{左端} &= \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bx & by & bz \\ bz & bx & by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & ay \\ bx & by & ax \\ bz & bx & az \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ax & bx \\ bx & az & bz \\ bz & ay & by \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} by & ax & ay \\ bx & az & ax \\ bz & ay & az \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} az & bz & bx \\ ay & by & bz \\ ax & bx & by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} az & bz & ay \\ ay & by & ax \\ ax & bx & az \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} az & ax & bx \\ ay & az & bz \\ ax & ay & by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} az & ax & ay \\ ay & az & ax \\ ax & ay & az \end{vmatrix} \\
&= a^3 \begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

10. 计算下列行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & -2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -7 & 6 \end{vmatrix}.$$

解 (1) 将各列均加至第一列, 提出公因子

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times (-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160$$

(2) 交换行列式的第一、三列, 有

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & -2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -5 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times (-1) & \times (2) & \times (1) \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 22 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 22 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 9/22 \end{vmatrix} = 9
 \end{aligned}$$

(3) 利用范得蒙行列式的结论, 有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(4-1) \cdot (3-2)(4-2)(4-3) \\
 = 12$$

(4)

$$\begin{aligned}
 &\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & -15 & -3 \\ 0 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & 13 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -15 & -3 \\ -4 & 9 & 0 \\ -7 & 13 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & -15 & -3 \\ 0 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -9 & -3 \\ -4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \begin{vmatrix} 7 & -9 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = -27
 \end{aligned}$$