中央电视台专题讲座教材

初中数学奥林匹克
基础知识及题解

修订版 · 初三

科学技术文献出版社

初中数学奥林匹克

基础知识及题解

修订版·初三

主　编　　陶文中
副主编　　齐振东　揭　英
　　　　　欧阳红兵
撰稿人　　陈　娴　刘际榛　金宝铮
　　　　　王永俊　陶文中　赵一西

科学技术文献出版社

(京)新登字 130 号

初中数学奥林匹克
基础知识及题解
修订版·初三
陶文中 主编
科学技术文献出版社出版
(北京复兴路 15 号 邮政编码 100038)
北京佳顺印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
787×1092 毫米 32 开本 11 印张 236 千字
1996 年 1 月第 2 版 1998 年 1 月第 4 次印刷
印数 20001—30000 册
ISBN 7-5023-1878-X/G·472
定 价:11.00 元

前　言

近几年来，中小学数学奥林匹克方兴未艾。从 1986 年开始的全国“华罗庚金杯”少年数学竞赛算起，已举办了三届，吸引了全国百余万中小学生参加。规模之大令人瞩目。一年一度的全国初中数学联赛和高中数学联赛，已成为衡量我国中学生数学奥林匹克竞赛水平的权威性考试。从小爱数学，从小赛数学已在全国蔚成风气。

为了帮助中小学生的数学奥林匹克学习，在今后的数学竞赛中取得更好的成绩，我们结合多年数学奥校辅导的经验，在整理竞赛辅导讲义的基础上，编写了《小学数学奥林匹克基础知识及题解》、《初中数学奥林匹克基础知识及题解》及《高中数学奥林匹克基础知识及题解》这三套课外读物。这三套丛书共九册，其中小学四册（三、四、五、六年级各一册），初中三册（初一、初二、初三各一册），高中上、下两册。各册书紧密配合本年级的教学进度，选择基础性强，应用性广的重点教学内容作为专题。同时又根据数学竞赛的需要，开设竞赛数学专题讲座。力求做到选题典型、新颖，注意广度和深度，例题讲解富有启发性，注重从方法上，从能力培养的角度上多方探究解题思路。每讲最后都有小结，便于读者掌握要领。同时还配备

了一定数量的练习，并附提示与解答。

参加本书编写工作的有陈娴(第一、四、六讲)、金宝铮(第二、九、十二讲)、刘际蓁(第五讲)、王永俊(第三、八讲)、赵一西(第十一讲)、陶文中(第七、十讲)。

我们希望这三套丛书能为提高中小学生数学能力水平有所裨益。书中如有疏漏或错误之处，欢迎读者批评指正。

编　　者

1996年1月

目　录

第一讲　指数与对数

在初中数学竞赛中，常遇到如何利用指数、对数的概念、运算法则、基本性质来解决有关指数与对数的计算、证明、常用对数等问题。

一、指　数

指数的计算问题是指数中最基本、最常见的问题，在解决计算问题时，一定要注意公式成立的条件，不要随便套用。

例 1　判断下列计算是否正确。

(1) $(-81)^{\frac{1}{4}}=-3$

(2) $a^{\frac{2}{9}}\div a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{9}\div\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

(3) $\dfrac{1}{2^{-2}}=\dfrac{1}{4}$

(4) $\sqrt[3]{-3\sqrt{3}}=(-3)^{\frac{1}{3}}(3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$

$$=(-3)^{\frac{2}{6}}(3)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{2}{6}}3^{\frac{1}{6}}=\sqrt{3}$$

思路分析　(1)当 $a<0$，n 为偶数时，$a^{\frac{1}{n}}$ 无意义；

(2)错用了幂的运算法则，即 $a^{\frac{2}{9}}\div a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{9}-\frac{1}{3}}=a^{-\frac{1}{9}}$；

(3) $\dfrac{1}{2^{-2}}=2^{2}=4$；

(4)运算的第二步错了。$(-3)^{\frac{1}{3}}\neq(-3)^{\frac{2}{6}}$，应为

$$\sqrt[3]{-3\sqrt{3}}=(-3)^{\frac{1}{3}}(3)^{\frac{1}{6}}=-3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{6}}$$
$$=-3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=-3^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$$

例 2　$\dfrac{a^{\frac{3}{4}}-8\sqrt[3]{a}\,b}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\div(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}})$

解　原式

$$=\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}\div(1-2\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}})$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}\times\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}$$

$$=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$$

说明：　在进行指数运算时，有时需用乘法公式，这里要注意指数形式的变形，如：

$$a-b=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2=(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})$$

$$a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{\frac{1}{4}})^2=(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})$$

$a-b=(a^{\frac{1}{3}})^3-(b^{\frac{1}{3}})^3=(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$等。

例 3　已知 $x^{2n}=3-2\sqrt{2}$，求$\dfrac{x^{3n}-x^{-3n}}{x^n-x^{-n}}$的值。

思路分析　分子 $x^{3n}-x^{-3n}$可分解出因式 x^n-x^{-n}且 $3-2\sqrt{2}$与 $3+2\sqrt{2}$互为倒数，因此有 $x^{-2n}=3+2\sqrt{2}$，将这些情况考虑到就容易求解了。

解　原式$=\dfrac{(x^n-x^{-n})(x^{2n}+1+x^{-2n})}{(x^n-x^{-n})}=x^{2n}+1+x^{-2n}$

当 $x^{2n}=3-2\sqrt{2}$时

原式$=3-2\sqrt{2}+1+3+2\sqrt{2}=7$

例 4　对于正整数 a、b、c（且 $a\leqslant b\leqslant c$）和实数 x、y、z、w，若 $a^x=b^y=c^z=30^w$，且$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{w}$成立，求 a、b、c 的值。

解 由$\begin{cases} a^x=b^y=c^z=30^w & ① \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{w} & ② \end{cases}$

得 $a^{\frac{1}{w}}=30^{\frac{1}{x}}$；$b^{\frac{1}{w}}=30^{\frac{1}{y}}$；$c^{\frac{1}{w}}=30^{\frac{1}{z}}$

上述三式相乘，得

$$(abc)^{\frac{1}{w}}=30^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=30^{\frac{1}{w}}$$

而 $\dfrac{1}{w}\neq 0$，故 $abc=30$

又由已知 $1\leqslant a\leqslant b\leqslant c$

若 $a=1$，由(1)式知 $w=0$，不合(2)式，$\therefore a\neq 1$

从而 $a=2, b=3, c=5$

例 5 对任意实数 x，等式 $ax-4x+5+b=0$ 恒成立，求$(a+b)^{1992}$的值。

思路分析 条件"对任意实数 x，等式 $ax-4x+5+b=0$ 恒成立"，即$(a-4)x+5+b=0$ 恒成立，因此必须 $a-4=0$，且 $5+b=0$，这时 $a=4, b=-5$，$(a+b)^{1992}$的值即可求。

即 $(a+b)^{1992}=(4-5)^{1992}=1$

例 6 设 a、b、c 都是正整数，且 $a^5=b^4, c^3=d^2, c-a=19$，求 $d-b$。

解 $\because$ 正整数的质因数分解是唯一的，且 $a^5=b^4$ 中指数 4 相对于质数 5。

$\therefore$ 一定存在正整数 m，使得 $a=m^4, b=m^5$。

同理，由 $c^3=d^2$，知一定存在正整数 n，使得 $c=n^2, d=n^3$

则 $19=c-a=n^2-m^4=(n-m^2)(n+m^2)$

$\because$ 19 是质数，且 $n-m^2<n+m^2$

$\therefore \begin{cases} n-m^2=1 \\ n+m^2=19, \end{cases}$ 解得 $m=3, n=10$

从而有 $$d=1000, b=243$$

$$\therefore d-b=757$$

例 7 用 1、9、8、5 四个数码构成 $a^{b^{c^{d}}}$ 形状的数，若欲使其值最大，则 c 的值是(　　)。

(A)1；　(B)9；　(C)8；　(D)5。

解 $\because 1^{n}=1$，$\therefore$ 要使所求数最大，$d=1$，将 9、8、5 构成 $a^{b^{c}}$ 的数，有 6 种方法。

$\because 8^{9}=2^{27}=(2^{10})^{2}\times 2^{7}>1000^{2}\times 100=10^{8}>9^{8}$

$$\therefore 5^{8^{9}}>5^{9^{8}}$$

同理 $\because 5^{9}=125^{3}>81^{3}=9^{6}>9^{5}$，$\therefore 8^{5^{9}}>8^{9^{5}}$

$$\because 8^{5}=2^{15}<2^{16}=4^{8}<5^{8}，\therefore 9^{5^{8}}>9^{8^{5}}$$

另一方面，$5^{8^{9}}=\left[5^{(\frac{8}{5})^{9}}\right]^{5^{9}}>(5^{2})^{5^{9}}>8^{5^{9}}$

$$5^{8^{9}}=(5^{8})^{8^{9}}>9^{8^{8}}>9^{5^{8}}$$

$\therefore$ 最大者是 $5^{8^{9}}$，故 $c=9$，从而应选(B)。

说明：灵活运用指数运算法则，在竞赛中是常见的题型。

例 8 已知 $6(4^{x}+4^{-x})-35(2^{x}+2^{-x})+62=0$，求整数 x。

解 $\because (2^{x}+2^{-x})^{2}=2^{2x}+2\cdot 2^{x}\cdot 2^{-x}+2^{-2x}$

$$=4^{x}+2+4^{-x}$$

$\therefore$ 方程 $6(4^{x}+4^{-x})-35(2^{x}+2^{-x})+62=0$

化为 $6[(2^{x}+2^{-x})^{2}-2]-35(2^{x}+2^{-x})+62=0$

令 $2^{x}+2^{-x}=y$，则

$$6(y^{2}-2)-35y+62=0$$

$$6y^{2}-35y+50=0，即(3y-10)(2y-5)=0$$

$$\therefore y=\frac{10}{3}，或 y=\frac{5}{2}$$

$$\therefore\ 2^x+2^{-x}=\frac{10}{3}\text{或 }2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$$

当 $2+2^{-x}=\frac{10}{3}$时

$$3(2^x)^2-10\cdot 2^x+3=0$$

$$(2^x-3)(3\cdot 2^x-1)=0$$

$\therefore\ 2^x=3$ 或 $2^x=\frac{1}{3}$,此时 x 不是整数。

当 $2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$时

$$2(2^x)^2-5\cdot 2^x+2=0$$

$$(2\cdot 2^x-1)(2^x-2)=0$$

$$\therefore\ 2^x=\frac{1}{2},x=-1$$

或 $2^x=2,x=1$,$\therefore\ x=1$ 或-1

例 9 设 m、n、p、q 为非负整数,且对一切 $x>0$,$\frac{(x+1)^m}{x^n}-1=\frac{(x+1)^p}{x^n}$恒成立,求$(m^2+2n+p)^{2q}$的值。

解 由于$\frac{(x+1)^m}{x^n}-1=\frac{(x+1)^p}{x^p}$对一切 $x>0$ 恒成立,取 $x=1$,则有 $2^m-1=2^p$。

由于 $2^p\neq 0$,因此,2^m-1 为奇数,故

$$p=0,m=1$$

再取 $x=2$,则有$\frac{3}{2^n}-1=\frac{1}{2^q}$,即 $3-2^n=2^{n-q}$

若 $n>q$,则上式左边为奇数,右边为偶数,矛盾;

若 $n<q$,则上式左边为整数,右边为真分数,矛盾。

所以,只有 $n=q=1$,于是,$(m^2+2n+p)^{2q}=3^2=9$

二、对　数

对数的计算问题是对数的最基本的问题，解决各种对数计算问题要求我们熟练运用对数运算性质，运用指数式，对数式的互相转换、指对数恒等式，换底公式等知识。

例 10　设 $a=3-2\sqrt{2}$，求 $A=(\frac{1}{2}\log_2 4^a-2a^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}}$的值。

思路分析　对 $\frac{1}{2}\log_2 4^a-2a^{\frac{1}{2}}+1$ 变形得 $a-2a^{\frac{1}{2}}+1=(a^{\frac{1}{2}}-1)^2$。但在进一步化简时，必须注意：

$$A=[(a^{\frac{1}{2}}-1)^2]^{\frac{1}{2}}=|a^{\frac{1}{2}}-1|=1-a^{\frac{1}{2}}$$

解　$A=[(a^{\frac{1}{2}}-1)^2]^{\frac{1}{2}}=1-a^{\frac{1}{2}}=1-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$$=1-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=1-(\sqrt{2}-1)$$

$$=1-\sqrt{2}+1=2-\sqrt{2}$$

例 11　如果 $\log_8 a+\log_4 b^2=5$，而且 $\log_8 b+\log_4 a^2=7$，求 ab。

思路分析　两已知式中分别含 $\log_8 a$ 及 $\log_8 b$，$\log_4 b^2$ 及 $\log_4 b^2$，现利用对数性质可得 $\log_8 ab+\log_4 a^2b^2=12$，又因为 $8=2^3$，$4=2^2$，上式左边可化为以 2 为底的对数，问题即可解决。

解　将已知两式相加 $\log_8 ab+\log_4 a^2b^2=12$，再由对数性质得 $\frac{1}{3}\log_2 ab+\log_2 ab=12$

$$\therefore\ \frac{4}{3}\log_2 ab=12，\therefore \log_2 ab=9，ab=2^9，ab=512$$

当利用已知条件求值无法进行或计算量较大时，常利用特殊数之间的关系，如 $\log_{ab}a+\log_{ab}b=1$，$a+\sqrt{b}$ 与 $a-\sqrt{b}$ 的和与积均为有理数，$\sqrt{a}+|b|+c^2=0$ 成立的条件为 $a=b=c=0$ 等。这时只要对有关式子适当进行变形，即可较快的求出所需要的值。

例 12　计算

(1)$\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$

(2)$\lg2\cdot\lg50+\lg20\lg5-\lg100\cdot\lg2\cdot\lg5$

思路分析　(1)由于 $3+\sqrt{5}$ 与 $3-\sqrt{5}$ 的和与积均为有理数，因此可将($\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$ 平方，而$(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2=10$，恰好与底数相同，这样将问题化简；

(2)利用 $\lg2+\lg5=1$ 及 $\lg2\cdot\lg50=(1-\lg5)(1+\lg5)$，$\lg5\cdot\lg20=(1-\lg2)(1+\lg2)$，再利用乘法公式可将问题简化。

解　(1)原式$=\frac{1}{2}\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$

$$=\frac{1}{2}\lg(3+\sqrt{5}+2\sqrt{9-5}+3-\sqrt{5})$$

$$=\frac{1}{2}\lg10=\frac{1}{2}$$

(2)　原式

$$=(1+\lg5)(1-\lg5)+(1+\lg2)(1-\lg2)-2\lg2\lg5$$

$$=1-\lg^2 2+1-\lg^2 5-2\lg2\lg5$$

$$=2-(\lg2+\lg5)^2=2-1=1$$

例 13　已知 $y=c\sqrt{ax-b}+d\sqrt{b-ax}+ab(a、b、c、d>0)$，求：$\log_b xy$。

思路分析 要使 y 有意义，须 $ax-b$ 与 $b-ax$ 均为非负数，而这两数又互为相反数，只有它们都为零时才能成立。这样 x 与 y 的值便唯一确定了。

解 由 $ax-b\geqslant 0$，得 $x\geqslant\frac{b}{a}(a>0,b>0)$

由 $b-ax\geqslant 0$，得 $x\leqslant\frac{b}{a}(a>0,b>0)$

因此有
$$x=\frac{b}{a},y=ab$$
$$\therefore \log_b xy=\log_b b^2=2$$

对数换底公式及指数与对数互化，也是指数对数求值的常用变形。对数换底公式 $\log_a b=\frac{\log_c a}{\log_c b}$ 不仅可以从左到右使用，还可逆回来应用，而且当多个对数式求积时还能推广。有些指数式的值直接求比较困难时，常常通过取对数简化求值过程。

例 14 计算：$\log_2\frac{1}{125}\cdot\log_3\frac{1}{16}\cdot\log_5\frac{1}{9}$

思路分析 一般在计算时考虑应用对数换底公式得到：
$$\frac{\lg\frac{1}{125}\cdot\lg\frac{1}{16}\cdot\lg\frac{1}{9}}{\lg2\cdot\lg3\cdot\lg5}=\left(\frac{\lg\frac{1}{125}}{\lg5}\right)\cdot\left(\frac{\lg\frac{1}{16}}{\lg2}\right)\cdot\left(\frac{\lg\frac{1}{9}}{\lg3}\right)$$
再利用对数性质可求值。若把上式右边写成 $\log_5\frac{1}{125}\cdot\log_2\frac{1}{16}\cdot\log_3\frac{1}{9}$（逆用对数换底公式）也可很易得出结果。

由此题的解法联想到，对数换底公式可做如下推广。

设 $N_i>0,a_i>0$，且 $a_i\neq1(i=1、2、\cdots、n)$，$b_1、b_2、\cdots,b_n$ 是 $a_1、a_2、\cdots a_n$ 的任一排列，则 $\log_{a_1}N_1\cdot\log_{a_2}N_2\cdots\log_{a_n}N_n=\log_{b_1}N_1\log_{b_2}N_2\cdots\log_{b_n}N_n$

证明 因为 b_1、b_2、$\cdots b_n$ 是 a_1、a_2、$\cdots a_n$ 的任一排列，所以 $\lg a_1 \lg a_2 \cdots \lg a_n = \lg b_1 \lg b_2 \cdots \lg b_n$

$$左 = \frac{\lg N_1}{\lg a_1} \cdot \frac{\lg N_2}{\lg a_2} \cdots \frac{\lg N_n}{\lg a_n} = \frac{\lg N_1 \lg N_2 \cdots \lg N_n}{\lg b_1 \lg b_2 \cdots \lg b_n} = 右$$

∴ 原等式成立。

此公式表明，若干个对数相乘，任意交换它们的底数，其积不变。此公式对于简化计算是很方便的。

解 $原式 = \log_2 \frac{1}{16} \cdot \log_3 \frac{1}{9} \cdot \log_5 \frac{1}{125}$

$$= (-4)(-2)(-3) = -24$$

例 15 如果 $a>0, a\neq 1$ 并且 $\log_2 a = x, \log_5 a = y, \log_{10} a = z$，求 x、y、z 应满足的关系。

思路分析 由于三个已知式中真数均为 a 且 $a>0$，$a\neq 1$，故考虑换成以 a 为底的对数，再利用 $2\times 5 = 10$ 找 x、y、z 之间的关系。

解 $\because \log_2 a = x, \log_5 a = y, \log_{10} a = z$

$$\frac{1}{\log_a 2} = x, \frac{1}{\log_a 5} = y, \frac{1}{\log_a 10} = z$$

$$\therefore \log_a 2 = \frac{1}{x}, \log_a 5 = \frac{1}{y}, \log_a 10 = \frac{1}{z}$$

又 $\because \log_a 2 + \log_a 5 = \log_a 10$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

∴ x、y、z 应满足的关系是：$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

例 16 已知 x、y、z 都是正数，且 $2^x = 3^y = 6^z$，求 $\frac{z}{x} + \frac{z}{y}$ 的值。

思路分析 由于 x、y、z 均为指数，故考虑取对数，分别

求出$\frac{z}{x}$,$\frac{z}{y}$再求和。

解 $\because 2^x=3^y=6^z$,$\therefore x\lg2=y\lg3=z\lg6$

$$\therefore \frac{z}{x}=\frac{\lg2}{\lg6},\frac{z}{y}=\frac{\lg3}{\lg6},\therefore \frac{z}{x}+\frac{z}{y}=\frac{\lg2+\lg3}{\lg6}=1$$

三、证明题

1. 相等关系的证明

相等关系证明题常见的有条件等式和恒等式、证明的关键就是经过适当变形,对已知式或有关式子重新组合,再应用法则、性质或公式进行代换,得到结论。

例 17 已知 $2^a \cdot 5^b=2^c \cdot 5^d=10$,求证:

$$(a-1)(d-1)=(b-1)(c-1)$$

思路分析 证这类问题可以从两方面思考。

(1)变换:条件中有,结论中没有的要消去,结论中有,条件中没有的要从已知变换得到;

(2)组成:由变换后的式子组成结论的形式。

证明 由已知,两边同除以 10,得

$$2^{a-1} \cdot 5^{b-1}=1 \quad ①$$

$$2^{c-1} \cdot 5^{d-1}=1 \quad ②$$

(1)式两边同乘$(d-1)$次方;②式两边乘$(b-1)$次方,得

$$2^{(a-1)(d-1)} \cdot 5^{(b-1)(d-1)}=1 \quad ③$$

$$2^{(b-1)(c-1)} \cdot 5^{(b-1)(d-1)}=1 \quad ④$$

③÷④和 $2^{(a-1)(d-1)}=2^{(b-1)(c-1)}$

$$\therefore (a-1)(d-1)=(b-1)(c-1)$$

例 18 已知 $2^{6a}=3^{3b}=6^{2c}$,求证:$3ab-2ac-bc=0$