家庭辅导丛书

第二册

初中代数家庭辅导

黄霭霖　陈敏成　谭　干　李统塘　　编著

家庭辅导丛书

初中代数家庭辅导

（第二册）

黄露霖　陈敏成
谭　干　李统塘　编著

科学普及出版社广州分社

初中代数家庭辅导

（第二册）

黄霭霖　陈敏成
谭　干　李统塘　编著

科学普及出版社广州分社出版发行

（广州市应元路大华街兴平里8号）

广东省新华书店经销

肇庆新华印刷厂印刷

开本：787×1092毫米 1/32　印张：4.375　字数：90千字

1989年2月第1版　　1989年2月第1次印刷

印数：1-8000册

ISBN 7-110-00873-9/G·218

定价：1.60元

前　言

为了帮助学生家长关注和辅导子女学好数学，我们编写了一套初中数学《家庭辅导丛书》（共六册）。本书是丛书代数第二册，它与初中数学课本第二册配合使用，内容包括：二元一次方程组、整式的乘除、因式分解和分式。

本书紧扣教材的基本内容，并依其顺序分章进行编写，每章由以下四个部分组成：

一、辅导要求。这部分首先概述全章的主要内容，然后提出家庭辅导时的注意事项，作为辅导的主抓方向。

二、检查与辅导。这部分取材于课本的陈述、例题和习题，通过检查学生作业的方式，设计了具有典型性和广泛性的若干〔问题〕，以正反两面的分析手法，帮助家长指导学生分清是非，加速他们对数学知识的领会、巩固和应用过程。

三、习题的答案或提示。这部分首先将习题中全部题目进行分类说明，然后给出答案。对较难或易混淆的习题作了提示。

四、辅导效果检查。这部分给家长提供一份检查性的试题（附有答案）。检查时可视贵子女的实际情况作取舍。

本书给出分辨是非的问题多达60个，说理也不忌反复，目的在于指导家长如何辅导子女去掌握数学概念，形成合理的思考方法，提高解题能力。本书是学生家长进行家庭辅导

的有力助手，也适合于青年教师和学生阅读。

限于水平，本书不足或错误之处一定不少，我们诚恳地欢迎读者批评指正。

编　者

目　　录

第五章　二元一次方程组

一、辅导要求

本章的主要内容，首先引入二元一次方程、二元一次方程的解、二元一次方程组、二元一次方程组的解等概念。然后介绍二元一次方程组的两种解法——代入消元法、加减消元法。继而是三元一次方程组的解法，最后介绍二元一次方程组的应用。

本章的重点知识是利用消元法解二元一次方程组和应用二元一次方程组解应用题。本章的难点是：（1）二元一次方程的解的不定性和相关性。（2）方程组的解的意义。（3）列出二元一次方程组来解应用题。而二元一次方程组是以后学习二元二次方程组、一次函数和平面解析几何等内容的基础知识，因而要求学生能熟练地掌握二元一次方程组的解法。这种解法的关键，是掌握消元的方法，因为不论用代入法消元，还是用加减法消元，都是设法消去一个未知数，得出一个一元一次方程，从而求得方程组的解。

在本章的辅导中应注意以下的几个问题：

（1）为了使孩子理解二元一次方程解的不定性和相关性，可以通过具体例子来解析。例如：把 $x=2$，$y=5$ 这一对值同时代入二元一次方程 $x+y=7$……①，才能使它左右两边的值相等，故 $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ 叫做方程（1）的一个解；

但是，千万不能把它误认为两个解。而方程①的解还有 $\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$、$\begin{cases} x=0 \\ y=7 \end{cases}$、$\begin{cases} x=-1 \\ y=8 \end{cases}$……等无数个解，这就是二元一次方程的解的不定性，但是，说二元一次方程的解的不定性，绝不意味着任何一对数都可以是方程①的解，例如 $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 就不是方程①的解。而当 $x=3$，y 只能是 4，这是因为 x 与 y 的取值受 $x+y=7$ 的约束，这就是二元一次方程的解的相关性。

（2）学生对方程组的解的概念是难于理解的。这是因为未知数和方程的个数都增多了，求出的解要同时满足两个方程，这是学生不熟悉的。应该从实例引入。例如，课本（第3页）根据实际问题的两个条件分别列出两个二元一次方程：$\begin{matrix} 3x-2y=11\cdots\cdots① \\ 2x+3y=16\cdots\cdots② \end{matrix}$ 其中的两个未知数 x、y 分别代表相同的一个量（x 在方程①和方程②中都分别代表甲数；y 在方程①和方程②中都分别代表乙数）。因此，x 与 y 在两个方程中应当分别有相同的值，也就是说，方程组的解就是方程组里各个方程的公共解$\left(即\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}\right)$，请参考课本第4页图5—1，可以清楚地看到，方程组的解是两个方程的解集的公共部分。

再强调一下，我们必须使学生认识和运用符号“{”。例如，方程 $x+y=4$ 的一个解 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$，是表示“当 $x=1$ 而且 $y=3$ 时能使 $x+y=4$，”数学上表达这里的“而且”的意义是采用符号“{”的。又如，$3x-2y=11$ 和

$2x+3y=16$这两个方程联立起来便写为

$\begin{cases} 3x-2y=11\cdots\cdots(1) \\ 2x+3y=16\cdots\cdots(2) \end{cases}$ 这里符号"$\{$"表示了"既要有方程（1），同时又要有方程（2）"，因此，这方程组的解$\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$"既是方程（1）的解同时又是方程（2）的解，"或说"是方程（1）和方程（2）的公共解"。以后知道，方程$x^2=1$的解是1或－1，写为$x_1=1$，$x_2=-1$，但不能滥用符号写成$\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$（x等于1而且同时等于－1，这不可能嘛）

（3）、列出二元一次方程组解应用题，虽然有列出一元一次方程解应用题作基础，但是，学生一方面对于了解实际问题中的数量关系会有一定的困难；另一方面是还不能正确地分析出问题中所给的两个条件去列出两个方程。解决问题的关键在于引导学生正确地分析应用题中已知和未知之间的数量关系，把两个相等关系找出来。

二、检查与辅导

为了使学生理解和掌握本章的主要内容，下面我们把学生容易出差错的问题、重点知识和具有代表性的解题方法，作分析解答，供家长们在辅导时选用。

【问题1】什么叫二元一次方程？

可能有这样的回答：含有两个未知数，并且次数是1的

方程，叫做二元一次方程。

这样的回答是不完整的。因为"次数是1的方程"这句话含糊不清。例如方程$xy-2x+y=0$中也有次数是1的项（如"$-2x$"和"y"）可以叫这个方程做二元一次方程吗？这是不可能的，因为它含有未知数的次数是2的项（如"xy"）

正确的回答应该是：含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是1，这样的方程叫做二元一次方程。例如：$3x+y=0$，$x-2y=0$，$x-y=0$等方程，它们有两个未知数，叫"二元"；未知数的项的次数都是1，叫"一次"。这样的方程叫二元一次方程。

【问题2】什么叫二元一次方程的一个解？

可能有这样的回答：能使方程左右两边的值相等的一对未知数的值中的一个，叫二元一次方程的一个解。

这样的回答是不对的。例如：二元一次方程$x+y=5$，当$x=2$，$y=3$时，则方程左右两边的值相等。上述的说法是：其中$x=2$是方程的一个解；$y=3$又是方程的另一个解。请看，只有$x=2$，或者$y=3$，就能使方程左右两边的值相等吗？这是不可能的。只有把$x=2$、$y=3$这一对数值同时代入方程$x+y=5$，才能使方程两边的值相等。

正确的回答应该是：能够适合于（即使方程左右两边的值相等）二元一次方程的一对未知数的值，叫做这个二元一次方程的一个解。例如：如果二元一次方程$x+y=5$，当$x=2$，$y=3$时，方程左右两边的值相等。那么$x=2$，$y=$

3 这一对未知数的值，即 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ 就是方程 $x + y = 5$ 的一个解。也可以说：二元一次方程的一个解，是适合方程的一对未知数的值。

【问题 3】什么叫二元一次方程的解集？

可能有这样的回答：把二元一次方程的解集合起来（例如：$x = 2$，$y = 3$ 是二元一次方程 $x + y = 5$ 的解，把它们用“$\{$”连起来），叫做二元一次方程的解集。

这样的回答是不对的。题目中的“集”是一个名词，上述所回答的“集合起来”中的“集”是一个动词，是所问非所答。在适合二元一次方程的每一对未知数的值的左边加上“$\{$”是表示它们是二元一次方程的一个解，而不能说这是解的“集合”。

正确的回答应该是：由二元一次方程的所有的解构成的集合，叫做二元一次方程的解集。例如二元一次方程 $x + y = 5$，把它变形为 $y = 5 - x$，如果 x 取一个值就可以求出与它对应的 y 的一个值。当 $x = 2$、3、4、5……，则对应的 $y = 3$、2、1、0……等。即

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$，$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$，$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$，$\begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$……这样得到的每一对未知数的值都适合方程 $x + y = 5$，所以它们都是这个方程的解。

由此可知，任何一个二元一次方程都有无数个解，它们**构成的集合，叫做这个方程的解集。**

【问题 4】方程组（A）$\begin{cases} x-2y=3 \\ y+z=-1 \end{cases}$，

（B）$\begin{cases} x-2y=3 \\ y=-x \end{cases}$，（C）$\begin{cases} x-y=3 \\ y+x=2 \\ 4y-2=5x \end{cases}$，

（D）$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=-2 \end{cases}$ 中，是二元一次方程组的是（　　）

可能有这样的回答：是（B、C）。

这样的回答是不完整的。如果根据"由几个一次方程组成的、含有两个未知数的方程组叫做二元一次方程组"，可以选方程组（B）和（C）。但是，课本（第5页）有如下的说明：本章中所说的二元一次方程组，都是指由两个一次方程所组成的二元一次方程组。

正确的回答应该是：方程组（B）。因为本章只研究方程的个数与未知数的个数相同的方程组。

【问题 5】什么叫做二元一次方程组的解？

可能有这样的解答：适合于方程组的一对未知数的值，叫做二元一次方程组的解。

这样的回答是不完整的。"适用于方程组的"是指方程组其中一个方程？还是方程组中的两个方程？并未明确指出。

正确的回答应该是：二元一次方程组里各个方程的公共解，叫做这个方程组的解。例如：对于二元一次方程组

$\begin{cases} y=1-x & \cdots\cdots(1) \\ 3x+2y=5 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$，$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 这一对未知数的值，既是方程（1）的一个解，又是方程（2）的一个解，所以

$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 是这两个方程的公共解，即 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} y=1-x \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ 的解。

请让贵子女想一想下面的问题：在 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 的两对未知数的值中，（1）哪一对数值是方程组 $\begin{cases} y=2x-3 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ 的解？（2）哪一对数值是方程组 $\begin{cases} 2x-y=0 \\ 7x-3y=1 \end{cases}$ 的解？

【问题6】检查作业（课本第21页）习题一第1题是把一个二元一次方程，变形为用一个未知数的代数式，表示另一个未知数的形式，一是为求二元一次方程的解的计算方便；二是为学习用代入消元法解二元一次方程组打下基础。学生常常是在移项后的符号出现错误。例如：第（1）小题：

已知二元一次方程 $2x-7y=4$，用x的代数式表示y。

可能有这样的解答：$y=\frac{4}{7}-2x$。

这样的解答是不对的。因为没有真正掌握移项的法则——方程中的某一项可在改变符号后移到方程的另一边，把符号搞错，并且两边除以7时，漏除2x这一项。

正确的答案应该是：$y=\frac{2}{7}x-\frac{4}{7}$。

由此可知，把一个二元一次方程里的任何一个未知数化

为用另一个未知数的代数式表示，其具体步骤是：（1）把含有“另一个未知数”的项改变符号后移到等号的右边；（2）等号两边再除以左边剩下的“一个未知数”的系数。

【问题7】检查作业（课本第22页）习题一第4题是用代入法解方程组，学生常常错误地把“用一个未知数的代数式表示另一个未知数的代数式”代入原来的二元一次方程。例如第（2）小题：

用代入法解方程组 $\begin{cases} 3x-5z=6 \cdots\cdots ① \\ x+4z=-15 \cdots\cdots ② \end{cases}$

学生初学时会有这种情况：由②得 $x=-15-4z \cdots\cdots$ ③ 把③代入②得 $-15-4z+4z=-15$，解这个方程得 $-15=-15$（后面就不知如何是好）。

这是怎么回事呢？因为方程②和方程③是相依方程，由方程②和方程③组成的方程组与方程①和②组成的方程组不是同解方程组，因此，出现了恒等式，也就求不出确定的解。同时方程组的解是方程组里各个方程的公共解，把（3）代入（2）实际上没有用到方程（1），所以不可能求得两个方程的公共解。

正确的解答应该是：

解：由（2）得：$x=-15-4z \cdots\cdots$（3）

把（3）代入（1）得：

$3(-15-4z)-5z=6$，

解一元一次方程得：$z=-3 \cdots\cdots$（4）

把（4）代入（3）得：$x=-3$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ z=-3. \end{cases}$

由此可知，把方程组中的一个方程用一个未知数的代数式表示另一个未知数的代数式，不能代入原来的方程，应该代入另一个方程，这就消去了一个未知数，把解二元一次方程组的问题化为解一元一次方程的问题。

【问题 8】检查作业（课本第22页）习题一第 4 题是用代入法解方程组。学生常常出现下列问题：1.在方程组中不知选择哪一个方程先变形，以致造成代入计算繁琐；2.只求出一个未知数的值，就认为是方程组的解。例如：第（6）小题：

用代入法解方程组 $\begin{cases} 3x - z = 5 & \cdots\cdots (1) \\ 5x + 2z = 25.2 & \cdots\cdots (2) \end{cases}$

可能有这样的解答：由（2）得，$x = \dfrac{25.2 - 2z}{5}$ ……（3）把（3）代入（1）得，$3\left(\dfrac{25.2 - 2z}{5}\right) - z = 5$

解这个一次方程得，$z = 4.6$，$\therefore z = 4.6$是方程组的解。

这样的解答是不对的。1.方程组的解是一对数值的。求出的 $z = 4.6$只是方程组一个解中的一个未知数的值，$z = 4.6$不是方程组的解。2.选择方程（2）变形，使计算繁琐。

正确的解答应该是：

解：由（1）得：$z = 3x - 5$ ……（3）

把（3）代入（2）得：

$5x + 2(3x - 5) = 25.2$，

解这个方程得，$x = 3.2$……（4）

把（4）代入（3）得，$z = 4.6$，

$$\therefore \begin{cases} x = 3.2 \\ z = 4.6 \end{cases}$$

由此可知：1.在方程组中选择哪一个方程先变形？最好选择未知数的系数是1或常数项是零的那一个方程先变形：2.把变形后的代数式代入另一个方程，求出一个未知数的值；3.将所求出一个未知数的值代入最先变形的式子中，求出第二个未知数的值，最后还要用$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$的形式表示方程组的解。

【问题9】检查作业（课本第22页）习题一第5题是用加减法解方程组，学生常常在减数是负数时出现计算及符号的错误。例如第（1）小题：

用加减法解方程组：$\begin{cases} 3x + 2y = 9 \cdots\cdots (1) \\ 3x - 5y = 2 \cdots\cdots (2) \end{cases}$

可能有这样的解答：由（1）－（2）得，$-3y = 7$ ……（3）解这个一次方程得，$y = -\frac{7}{3}$……（4），把（4）

代入（1）得$3x + 2\left(-\frac{7}{3}\right) = 9$，解方程得，$x = \frac{41}{9}$

$$\begin{cases} x = \frac{41}{9}, \\ y = -\frac{7}{3} \end{cases},$$

这样的解答是不对的。他忘记了减法的法则——减去一个数等于加上这个数的相反数，把（1）－（2）方程的左边得："$2y - (-5y) = -3y$"是错误的。应该是：$2y - (-5y) = 7y$。同时，解题的书写格式也不对，

正确的解答应该是：

解：由（1）－（2）得，由（3x＋2y）－（3x－5y）＝9－2

得到：7y＝7，∴y＝1……（3）

把（3）代入（1）得：3y＋2×1＝9，

解方程得：$x=\frac{7}{3}$，

$$\begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ y=1 \end{cases}$$。

由此可知：1.把方程组的（1）－（2），消去一个未知数x，使二元一次方程转化为含有y的一元一次方程(7y＝7)，这叫减法消元法；2.遇到减法运算，要记得把它转化为加法运算，即“减去一个数等于加上这个数的相反数”。

上述问题，还可以把方程组的（1）×5＋（2）×2先消去一个未知数y，使二元一次方程转化为含有x的一元一次方程21x＝49，最后同样可以求得方程组的解

$\begin{cases} x=2\frac{1}{3} \\ y=1 \end{cases}$不过这个解法繁。

上述两种解法，都叫加减消元法。在方程组里同一个未知数的系数的绝对值相等（包括可以化成相等），如果两个系数的符号相同，则用减法消元（如本题先消x），如果两个系数的符号相反，则用加法消元（如本题先消去y）。一般来说，用加法消元比用减法消元简便些，因为用减法消元，稍一不慎，符号容易弄错。

【问题10】检查作业（课本第23页）习题一第6题，是