

中学数学解题丛书

初中代数

解题错误分析

王翠满

编著

马明珠

黑龙江科学技术出版社

初中代数 解题错误分析

王翠满 马明珠 编著

黑龙江科学技术出版社

一九八六年·哈尔滨

封面设计：洪 冰

初中代数解题错误分析

王翠清 马明珠 编著

黑龙江科学技术出版社出版

(哈尔滨市南岗区建设街 35 号)

黑龙江新华印刷厂附属厂印刷 · 黑龙江省新华书店发行

78 × 1092 毫米 32 开本 10 375 印张 212 千字

1986 年 3 月第 1 版 · 1986 年 3 月第 1 次印刷

印数：1—23,000 册

书号：13217 · 150 定价：1.65 元

前 言

数学是一门应用广泛的基础学科，是学习和研究其他科学的有力工具。数学是中学的一门基础课，学好中学数学对于学生接受更高深的科学知识和参加生产劳动都有十分重要的作用。

解题在数学学习中有着特殊重要的意义，解题能力是掌握知识程度的主要标志。在数学里，才智就是解决问题。有些学生虽然对概念、定理背得烂熟，但是在解答非常简单的题目时却会糊涂起来。有些学生只具有一般的解题本领，一遇到形式不熟或没见过的题目，就茫然不知所措或者错误地进行解答。

在解答数学问题时，常常出现的典型性错误有：概念不清造成的概念性错误；忽视条件、错用结论造成的知识性错误；违反逻辑规律造成的逻辑性错误；以偏概全、以特殊代一般造成的方法性错误等等。

为了学会解题，除了弄清概念和做解题练习以外，一个很好的办法是分析错误的题目解答，寻求正确的解题方法和规律。哈尔滨市数学会为了帮助中学生从解答数学问题的错误中吸取经验教训，寻找解题方法和规律，提高解题能力，同时，也为了给中学数学教师提供一些在教学中分析典型错例的方法，以指导学生解答题目，提高教学质量，特组织哈尔滨市几位有丰富教学经验和长期从事教学研究的同志，编

著了这套中学数学解题错误分析丛书。

本套丛书是根据中学数学教学大纲，配合通用教材分科按章编写的。书中所列题目具有典型性，错误解法具有普遍性。这套丛书共分五册，高中代数由时承权、戴再平编著；立体几何由王万祥编著；平面解析几何由邵旭、冯建国编著；初中代数由王翠满、马明珠编著；平面几何由唐格森、王国器编著。哈尔滨市教育学院王万祥副院长和我审阅了各册原稿。

书中错误之处，敬请广大读者批评指正。

哈尔滨市数学会秘书长
黑龙江大学数学系副教授

颜秉海

1985年4月

目 录

第一章	有理数	(1)
第二章	整式的加减	(20)
第三章	一元一次方程	(31)
第四章	一元一次不等式	(46)
第五章	二元一次方程组	(54)
第六章	整式的乘除	(68)
第七章	因式分解	(79)
第八章	分式	(87)
第九章	数的开方	(103)
第十章	二次根式	(118)
第十一章	一元二次方程	(138)
第十二章	指数	(184)
第十三章	常用对数	(195)
第十四章	直角坐标系	(216)
第十五章	解三角形	(227)
第十六章	函数及其图象	(254)
第十七章	统计初步	(291)
附:	练习题略解或提示	(297)

第一章 有理数

学习基本要求

学习本章要理解有理数的概念，会用数轴上的点表示有理数，能够比较有理数的大小；掌握有理数的四则运算法则和运算律，能够熟练地进行有理数的计算；理解有理数乘方的意义，初步理解有关近似数的概念，会查平方表和立方表。

有理数是中学代数课的起点，是初中代数的重点之一，而有理数的运算又是本章的重点。学好有理数的关键在于正确理解有理数的基本概念和掌握好有理数的运算法则。

本章的主要难点是建立负数概念和理解有理数的四则运算法则。而初学者往往对绝对值的概念及有理数的意义不容易理解，对负分数的比较大小及有理数运算中的符号掌握不好，以致解题时发生这样或那样的错误。因此必须掌握好绝对值概念和有理数运算，为以后的数学学习打下扎实的基础。

解题错误分析

例1 “前进与后退”、“节约与浪费”是具有相反意义的量吗？为什么？

【错误解答】 “前进与后退”、“节约与浪费”是具有相反意义的量。因为前进与后退，节约与浪费所表示的意义相反。

【错因分析】 它们不是具有相反意义的量。因为判断两个量是否是具有相反意义的量，必须看以下两点是否同时满足：(1) 意义相反；(2) 都表示一定的量，但不要求这两个量的数量相同。这里虽然前进与后退、节约与浪费表示的意义相反，但它们根本未涉及数量，因此只能说是反义词。产生错误的原因在于对什么是具有相反意义的量这一概念掌握得不准确。

例2 -3° 和 $+5^{\circ}$ 是否互为相反数？为什么？

【错误解答】 是互为相反数。因为 -3° 和 $+5^{\circ}$ 所表示的意义相反，即一个是零下，一个是零上，所以它们互为相反数。

【错因分析】 虽然 -3° 和 $+5^{\circ}$ 表示的意义相反，但却不是互为相反数。这是因为判断两个数是否互为相反数，须看：(1) 它们是否是两个数，而不是量；(2) 它们的符号是否相反；(3) 在数轴上表示这两个数的点到原点的距离是否相等。相反数是成对出现的， -3° 和 $+5^{\circ}$ 是表示温度的两个量，而不是数 (-3 和 $+5$ 才是数)。 -3 和 $+5$ 虽然符号不同，但它们所表示的两个点到原点的距离是不等的，所以它们也不是相反数。产生错误的原因在于对相反数的意义还没有正确的理解。

例3 整数和自然数有什么区别？

【错误解答】 整数包括正数、负数和零，自然数只包括

正数。

【错因分析】 因为正数包括正整数和正分数，负数包括负整数和负分数，而负分数和正分数不属于整数。正整数也叫做自然数，显然它不能包括正分数，因此答自然数只包括正数是不对的。产生错误的原因在于对整数和自然数的概念不够清楚。

【正确解答】 整数包括正整数、负整数和零，而自然数是正整数，不包括负整数和零。

例 4 正数和零的绝对值是什么数？负数的绝对值是什么数？

【错误解答】 一个正数的绝对值是正数，零的绝对值是零，一个负数的绝对值是正数。

【错因分析】 这个解答是不确切的。虽然一个正数的绝对值是正数，但不能是任意的正数，而只能是这个数本身。例如 2 的绝对值只能是 2，而不能是 3, 4, …… 同理，一个负数的绝对值虽然是正数，但也只能是这个负数的相反数，而不能是其它的正数。例如 -2 的绝对值只能是 2，即 $-(-2) = 2$ ，而不可能是其它的正数。产生错误的原因是对绝对值的概念理解得不够准确。

【正确解答】 一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。

例 5 一个有理数的绝对值一定是正数，这话对吗？为什么？

【错误解答】 对。因为负数的绝对值是正数，正数的绝对值还是正数，所以一个有理数的绝对值一定是正数。

【错因分析】 这个解答中有以下几方面的错误：(1) 有理数不只包括正数和负数，还包括零，而零的绝对值还是零，零没有正负；(2) 固然负数的绝对值是正数，但应是这个负数的相反数，其它的正数不行；(3) 同理，正数的绝对值只能是它本身，也不能是任意正数。所以“一个有理数的绝对值一定是正数”这句话是不对的。

【正确解答】 一个有理的绝对值一定是非负数。

例 6 绝对值相等的两个有理数一定相等吗？

【错误解答】 这两个数一定相等。因为如果两个正数的绝对值相等，这两个正数一定相等；如果两个负数的绝对值相等，则这两个负数也一定相等。

【错因分析】 这个解答中只考虑了两个有理数同号（即同正或同负）的情形，而 -2 和 $+2$ ，这两个数的绝对值是相等的，都是 2 ，但它们却是不相等的，因此考虑问题一定要全面。

【正确解答】 这两个数不一定相等。

例 7 填空：(1) 0 的倒数_____，

(2) 一个数与它的相反数的乘积是_____，

(3) 一个数与它的倒数的相反数的乘积是_____。

【错误解答】 (1) 0 的倒数是 0 ，

(2) 一个数与它的相反数的乘积是 -1 ，

(3) 一个数与它的倒数的相反数的乘积是 1 。

【错因分析】 (1) 0 没有倒数，所以 0 的倒数是不存在的，产生错误的原因是对数 0 没有正确的认识。(2) 和 (3) 的错误则是由于对相反数、倒数、倒数的相反数等概念没有理

辨析致。

【正确答案】 (1)0 的倒数不存在；(2)一个数与它的相反数的乘积是这个数的平方的相反数；一个数与它的倒数的相反数的乘积是 -1 。

例 8 下面的一些语句都是说的数与数之间的关系，请你判断哪些是错误的，哪些是正确的。

- (1) 质数一定不是偶数，合数一定不是奇数。
- (2) 自然数不一定有约数。
- (3) 一个数的倒数一定不大于 1。
- (4) 无限小数一定不能化为分数。
- (5) 两个自然数的和、差、积、商一定仍是自然数。
- (6) 任何一个有理数的平方都一定是正数。
- (7) 一个数的相反数不一定是负数。
- (8) 一个数的绝对值不一定是它本身。
- (9) 两个有理数的和、差、积、商仍是有理数。

【错误解答】 (1)至(6)都是正确的，而(7)至(9)是错误的。

【错因分析】 上面的解答恰恰颠倒了，应该是(1)至(6)都是错误的，而(7)至(9)都是正确的。下面我们逐题来分析一下：

(1)举例来说，2是质数，但它又是偶数。虽然其它所有的质数都不是偶数，这并不能说明质数一定不是偶数。而9是合数，但它又是奇数。产生错误的原因是对什么叫质数，什么叫合数，什么叫偶数，什么叫奇数的概念没有准确地掌握住，误以为质数就是奇数，偶数就是合数了。偶数、合数、

质数、奇数这些概念虽然在算术中学习过，但因时间隔得较久，当时学习的时候又不甚理解，因而遗忘或混淆了。在初中代数中仍要常常用到，因此有必要复习一下这些概念：

质数：除了1与它本身以外，没有其他的约数的数称为质数，也叫素数。

合数：除了1与它本身以外，还具有其他约数的数，称为合数。

偶数：能够被2整除的整数。

奇数：不能被2整除的整数。

(2) 1, 2, 3, 4, ……叫自然数，也叫正整数。其中1有唯一的正约数，其余的每一个自然数至少有两个当然的约数——1和它本身。因此这个结论是错误的。产生错误的原因在于对自然数和约数的概念理解有误。所谓约数是指有甲、乙两个自然数，若甲数能被乙数整除，则称甲数为乙数的倍数，而乙数叫做甲数的约数。

(3) 例如 $\frac{1}{2}$ 就是一个数，它的倒数是2，显然它大于1，说明这个结论是错误的。产生错误的原因是误将题目中的“一个数”理解为一个自然数（正整数）或负整数、负分数了，而忽略了这个数为正分数的情形。

(4) 无限不循环小数不能化为分数，例如 $\pi = 3.141592659\cdots$ 不能用分数表示。而无限循环小数一定能用分数来表示，例如 $0.232323\cdots = \frac{23}{99}$ 。产生错误的原因是对无限小数是否循环的概念没有掌握。

(5) 两个自然数的和与积一定仍是自然数，而它们的差与商却不一定仍是自然数。例如 $3+5=8$, $3 \times 5=15$ 均为自然数，而 $3-5=-2$, $3 \div 5 = \frac{3}{5}$ 却不是自然数。发生错误的原

因是对自然数的概念掌握不清，加上考虑问题不够全面所致。

(6) 0 是个有理数，但 $0^2=0$ ，不是正数。因此说任何一个有理数的平方不一定是正数。产生错误的原因是忘记了有理数中包括数 0。

(7) 例如负数的相反数是正数，零的相反数还是零。因此“一个数的相反数不一定是负数”这个结论是正确的。

(8) 例如负数的绝对值就不是这个负数的本身，而是它的相反数。产生错误的原因是对数的绝对值概念理解有误。

(9) 其实，这个结论是对的。答错的原因是把有理数与自然数的概念混淆了。

例 9 写出绝对值小于 3 的所有整数，并在数轴上表示出来。

【错误解答】 绝对值

小于 3 的所有整数是 -2,

-1, 0, 1, 2. 如图所示。

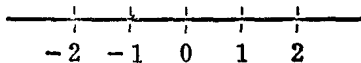


图 1

【错因分析】 绝对值小于 3 的所有整数是 -2, -1, 0, 1, 2, 这个结论是正确的。但在数轴上表示却出了毛病。图中的“数轴”没有正方向，所以严格说来，那不是数轴。

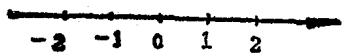


图 2

【正确解答】 如图所示。

例 10 不作计算，指出下列两个式值的大小：

$$(1) 780 \times \frac{7}{20} \text{ 和 } 780 \frac{7}{20},$$

$$(2) 279 \times \left(-\frac{8}{27}\right) \text{ 和 } 279 - \left(-\frac{8}{27}\right),$$

$$(3) -57\frac{7}{9} \text{ 和 } -57\frac{1}{5},$$

$$(4) \left(-\frac{3}{4}\right)^3, \left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(-\frac{2}{3}\right)^4.$$

【错误解答】 (1) $780 \times \frac{7}{20} > 780 + \frac{7}{20},$

$$(2) 279 \times \left(-\frac{8}{27}\right) < 279 + \left(-\frac{8}{27}\right),$$

$$(3) \because \left| -57\frac{7}{9} \right| = 57\frac{7}{9} = 57\frac{35}{45},$$

$$\left| -57\frac{1}{5} \right| = 57\frac{1}{5} = 57\frac{36}{45},$$

$$\text{而 } 57\frac{36}{45} > 57\frac{35}{45}, \text{ 则 } 57\frac{1}{5} > 57\frac{7}{9},$$

$$\therefore -57\frac{7}{9} < -57\frac{1}{5},$$

$$(4) \left(-\frac{3}{4}\right)^3 < \left(\frac{3}{4}\right)^2 > \left(-\frac{2}{3}\right)^4.$$

【错因分析】 (1) 误认为两个数的乘积一定大于这两个数的商了. 当乘数和除数是同一个正的真分数, 被乘数和被除数是同一个自然数时, 这两个数的积小于它们的商.

$$(2) \because 279 \times \left(-\frac{8}{27}\right) = -\frac{279 \times 8}{27}, \text{ 而}$$

$$279 \div \left(-\frac{8}{27}\right) = 279 \times \left(-\frac{27}{8}\right) = -\frac{279 \times 27}{8},$$

$$\frac{279 \times 27}{8} > \frac{279 \times 8}{27} \therefore -\frac{279 \times 27}{8} < -\frac{279 \times 8}{27}, \text{ 即}$$

$$279 \times \left(-\frac{8}{27}\right) > 279 \div \left(-\frac{8}{27}\right).$$

当被乘数和被除数是同一个正数，而乘数和除数是同一个负的真分数时，这两个数的乘积大于它们的商。

(3) 两个负数比较大小时，绝对值大的反而小。本题恰恰是按照两个负数其绝对值大的仍大来解答的。初学有理数大小的比较时，易犯这样的错误。

$$(4) \text{ 三个数之间的大小关系确实是 } \left(-\frac{3}{4}\right)^3 < \left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 > \left(-\frac{2}{3}\right)^4, \text{ 但在用不等号连接三个数的大小关系时,}$$

不等号的方向应该一致，不能象本题所表示的那样。而且遗

$$\text{漏了 } \left(-\frac{3}{4}\right)^3 < \left(-\frac{2}{3}\right)^4.$$

【正确解答】 (1) $780 \times \frac{7}{20} < 780 \div \frac{7}{20},$

$$(2) 279 \times \left(-\frac{8}{27}\right) > 279 \div \left(-\frac{8}{27}\right),$$

$$(3) \because \left| -57\frac{7}{9} \right| = 57\frac{7}{9} = 57\frac{35}{45},$$

$$\left| -57\frac{4}{5} \right| = 57\frac{4}{5} = 57\frac{36}{45}, \text{ 而 } 57\frac{36}{45} > 57\frac{35}{45}$$

$$\text{即 } 57\frac{4}{5} > 57\frac{7}{9}, \therefore -57\frac{7}{9} > -57\frac{4}{5},$$

$$(4) \left(-\frac{3}{4}\right)^3 < \left(-\frac{2}{3}\right)^4 < \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

例 11 数 a 是一个有理数, 如果 $|a| = 10$, 那么 a 等于多少?

【错误解答】 $\because | +10| = 10, \therefore a = 10.$

【错因分析】 绝对值等于 10 的数有两个, $+10$ 和 -10 . 本解答只考虑到 $| +10| = 10$, 而忽略了 $| -10| = 10$. 这是初学绝对值概念时最易忽略的.

【正确解答】 $\because | +10| = 10, | -10| = 10 \therefore a_1 = 10,$
 $a_2 = -10.$

例 12 在 $-11, 4.8, +73, -8.12, \frac{1}{6}, 0, -\frac{3}{4}$ 中, 属于正数集合的有哪些数? 属于负数集合的有哪些数?

【错误解答】 属于正数集合的有 $4.8, +73, \frac{1}{6}, 0$, 属于负数集合的有 $-11, -8.12, -\frac{3}{4}$.

【错因分析】 因为数“0”没有正负, 所以“0”不属于正数集合.“0”是一个中性数. 这一点一定要牢记.

【正确解答】 属于正数集合的有 $4.8, +73, \frac{1}{6}$, 属于负数集合的有 $-11, -8.12, -\frac{3}{4}$.

例 13 用四舍五入法按要求对下列各数取近似值:

(1) 0.02076 (保留三个有效数字)

(2) 1.5972 (精确到 0.01)

(3) 64340 (保留一个有效数字)

(4) 60340

(保留两个有效数字)

【错误解答】

(1) $0.02076 \approx 0.02080$;

(2) $1.5972 \approx 1.60 = 1.6$;

(3) $64340 \approx 6.0 \times 10^4$;

(4) $60340 \approx 60 \times 10^3$.

【错因分析】 (1) 对 0.02076 来说, 保留三个有效数字就是指对小数点后的第五位小数 0.00006 进行四舍五入后得到的 0.0208, 三个有效数字是 2、0、8; 而 0.02080 则是表示保留四个有效数字了, 它与 0.0208 所表示的精确度不同;

(2) 1.60 与 1.6 所表示的精确度是不同的. 1.6 表示精确到 0.1, 而 1.60 则表示精确到 0.01. 产生错误的原因是对近似数的精确度概念理解不清, 而误认为 1.6 与 1.60 相等;

(3) 6.0×10^4 所表示的是 64340 精确到 0.1 的近似数, 题目要求保留一个有效数字应该是 6×10^4 . 这里 6.0 与 6 是不同的;

(4) 60340 用科学计数法表示时, 整数部分必须是大于零而小于 10 的正整数. 这里写成 60×10^3 是错误的; 另外根据保留两个有效数字的要求应该是 6.0×10^4 .

【正确解答】 (1) $0.02076 \approx 0.0208$ (保留三位有效数字);

(2) $1.5972 \approx 1.60$ (精确到 0.01);

(3) 6×10^4 (保留一个有效数字);

(4) 6.0×10^4 (保留两个有效数字).

例 14 计算 $[-6^2 - (-6)^2] \times (-1)$.

【错误解法】 $[-6^2 - (-6)^2] \times (-1)$