

怎样学好初中数学

江苏省数学学会科普委员会 主编

余元希 编写

江苏教育出版社

怎样学好初中数学

余元希 编写

出版：江苏教育出版社

发行：江苏省新华书店

印刷：溧阳印刷厂

开本787×1092毫米 1/32 印张5.625 字数60,840

1988年3月第1版 1988年3月第1次印刷

印数10,250册

ISBN 7-5343-0227-7/G·209

统一书号：7351·605 定价：0.94元

编 者 的 话

数学在实际生活中的应用是很广泛的。对于一个中学生或任何一个青年来讲，不管你将来是在哪一个部门里工作，还是进哪一个学校，都必须要有最基本的数学知识，才能作出某些成绩。因此，每一个同学和青少年都应该努力打好数学基础。

学习数学，首先应该掌握一定的数学概念和数学规律，这是学好数学的基础。同时，也要学会把学到的知识用之于实践。如果掌握了知识不会灵活运用，那么，这些知识便只是一堆废物。因此，我们在学习数学时，必须注意理论和实践两个方面，注意领会有关的数学思想，掌握数学思维的方法，从根本上提高分析问题、解决问题的能力。为了达到这样的目的，在正课学习的基础上，适当看一点课外数学读物，以开拓知识领域，扩大视野，启迪智慧，是十分必要的。

基于这样的指导思想，我们组织部分长期从事中学数学教学和研究的专家、教授、中学教师编写了这套初中数学辅助读物。

这套丛书内容结合现行初中课本，注意数学教材中各个方面的联系及应用，采用以点带面、纵横贯通

的方法，阐述初中数学里的重要概念、定理和法则，疏通学习中的难点，剖析教材中的重点。书中涉及的数学知识一般不超越初中数学范围，某些地方虽稍有拓宽加深，但以初中学生能看懂为原则。文字上力求适合初中学生年龄特点，做到生动活泼，浅显通俗。

这套丛书共十八种。已编辑出版两批十一种：《怎样列方程解应用题》、《三角形的巧合点》、《距离与角度》、《怎样解初中数学题》、《数学命题和证明》、《绝对值与算术根》、《解不等式》、《比和比例》、《怎样添辅助线》、《几何定值》、《正弦定理、余弦定理及其应用》。这次最后一批编辑出版的有七种：《怎样学好初中数学》、《数学小史》、《怎样算得快》、《常见的因式分解法》、《二次方程》、《函数浅谈》、《数学变换》。

本书《怎样学好初中数学》系江苏教育出版社特约华东师范大学余元希教授编写的。在这套丛书中这是一本比较综合性的书，它从各个角度介绍初中学生学好数学的方法与途径。

由于当前初中学生的程度不一，这套丛书在选題与编写方面都可能存在一些缺点，欢迎各地教学教育部门、中学教师以及广大青少年读者多多提出意见，以便再版时修订。

江苏省数学学会科普委员会

1987年9月

写在前面

1985年《初中生学习指导》创刊，编辑部约我写几篇辅导初中生学习数学的文章在该刊发表，应约我以“初中数学学习辅导讲座”为总的题目，陆续撰写了一些短文。文章刊出之后，据说读者反映较好，认为对他们有所启发。作者本人也曾收到读者来信，建议我继续撰写，或者把文章汇编成册。最近江苏教育出版社编辑部约我给初中生写一本数学课外读物，提供了机会，促成我在过去发表过的一些短文的基础上，整理充实、重新改写，撰写了这本小册子。

在编写本书时，我有以下的一些想法：

1. 本书是供具有初中二年级以上水平，学有余力的数学爱好者课外阅读的。内容着重在给他们介绍一些研究数学和学习数学的方法，帮助他们在已有知识的基础上，更好地学好数学，并提高他们学习数学的兴趣。针对读者对象的特点以及本书的主题，我认为内容的阐述，既要紧密联系初中数学的实际，但也要有所提高，有所发展。根据初中教育的培养目标和一般初中生的接受水平，初中数学在理论上的要求是不高的。关于研究数学的一些科学方法，一般也只是孕伏地进行介绍或使用，而不予以明朗化。但这些都是要学好数学必须打好的基础，对于那些学有余力的数学爱好者来说，让他们早一点掌握，既是有益的，而且也是有可能的，所以在本书的前半部分，就着重地介绍了有关这方面的知识。

2. 本书是供读者自学用的，而培养学生自学能力也正是中学教育的不可忽视的重要任务之一。考考到这一点，在

本书中我结合内容的阐述，适当地引进了超出初中数学教学大纲规定的教学内容范围，但读者目前已有条件学习的某些数学知识，让读者体会到许多知识都是可以通过自己的钻研来获取的，以提高他们自学的信心。

3. 学习应该以学生为主体，许多问题，应该留给学生自己来进行探索，再适当给予辅导。考虑到这一点，本书的叙述，采用了以初中生为对象的讲座形式，有些问题提出之后，要求读者先想一想再作阐述，有些问题则先让读者作为习题来解答，再在后文中，或者书末所附的提示中作解释。本书的主题是谈学习数学的方法，编者的意图是让读者在阅读本书时，也能作为一种练习，体会到如何正确运用学习方法，提高自学的能力。

4. 本书不是一本解题指导书，所以除了围绕本书内容重点介绍了几种常用的数学方法，如列举法、待定系数法等以外，对于其它重要解题方法并不一一列举，所配的习题，也是贯彻了这一精神。

以上这些想法是否确当，在文中是否能体现，还有待于读者来鉴定。限于编者的水平，特别是编写的时间比较匆促，书中难免存在缺点和错误，更希望看过本书的行家们批评指正。

余元希

1987年元旦于上海

目 录

引言	1
一、正确理解概念 学会分类方法	3
二、从特殊到一般 从一般到特殊	10
三、类比与对比	18
四、充分和必要	25
五、言必有据	33
六、逆推顺叙	39
七、归谬法和穷举法	46
八、直接证明和间接证明	53
九、列举法	60
十、转化	71
十一、灵活运用	80
十二、待定系数法	88
十三、数形结合	97
十四、命题的变换	109
十五、缜密思考 严格要求	120
十六、合理表达	127
十七、知懂会熟活严	135
结束语	148
附录：答案与提示	149

引 言

数学是一门重要的工具学科，它在日常生活、生产技术以及科学研究等各个方面，都有广泛的应用。要学好数学，在初中学习阶段，就必须打好基础。怎样才能学好数学？这是大家十分关心的问题，本书就准备谈谈这方面的问题。

要学好数学，首先当然是要切实地学好数学的基基知识，包括数学的概念、公理、定理、法则、公式等数学命题和数学方法；熟练掌握运算，画图、识画和推理论证等数学基本技能。学好数学目的在于用好数学，这就需要我们善于观察、善于想象、善于思考，具备善于发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力；而这一些也正是在我们学习数学、运用数学的过程中逐渐培养起来的。

在学校里学习数学，还只是打个基础，给我们提供进一步学习的条件；许多知识，都需要我们自己去钻研，去探索，通过自己的努力来获取，所以无论是今天在校学习，或者今后在工作中学习，都应发挥自学精神，强调自学。这也就需要我们逐步培养起自学的 ability。

本书是供具备初中二年级上学期以上数学水平的课者自学参考的。为了帮助读者学好数学，除了着重介绍一些研究数学的科学方法和学习数学、解决数学问题的方法之外，还将结合着有关内容的讲述适当引进一些超越初中数学范围的数学知识，以拓宽知识面、提高学习数学的兴趣。

学习数学，当然需要解一定数量的数学习题作为练习。

本书在每一讲的后面，都给读者提出了少量的习题，并在书末附上了答案或提示。这些习题一部分是供读者消化本讲所述内容用的；一部分是供读者对新学到的知识，初步运用，加深理解用的；也有一些是供读者在已有的知识基础上，自己去探索的，建议读者在自己先作出答案之后，再查阅书末的答案和提示，从中可能得到解题方法上的某些启发，或获得一些新知识。

下面我们就开始进行逐一讲述。

一、正确理解概念 学会分类方法

要学好数学，首先就要能够正确理解并正确运用数学里所研究的有关概念。

读者已经在初中代数里学过二次根式的概念。现在我们就从一个很简单的二次根式概念题谈起。

口答： x 是什么数，等式

$$\sqrt{x^2} = -x$$

能够成立？

老师提问时，一位同学不假思索地很快就作出了回答：“不论 x 是什么数，这个等式都不成立。”当老师追问他“为什么？”时，他又作了解释：“因为实数的算术平方根不能是负数。”他的回答显然是错误的，所以立刻有同学起来给他纠正，说：“不对，当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ，它是一个正数，这个等式能够成立，所以答案应该是当 $x < 0$ 时，等式成立。”

请读者判断一下，这位同学的答案是不是正确呢？

很明显，他也没有完全对答。当 $x < 0$ 时，等式 $\sqrt{x^2} = -x$ 确实是成立的，但是除此以外，当 $x = 0$ 时，也有

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{0^2} = 0 = -0 = -x,$$

这个等式也是成立的，所以正确的答案，应该是：“ $x \leq 0$ 时，等式成立。”

倘使这个口答题，改成书面练习题，并且要求我们写出详细的解答，那末可以这样来表达：

解 $\because \sqrt{x^2} = |x|$ ：

(1) 当 $x > 0$ 时， $|x| = x$ ，等式 $\sqrt{x^2} = -x$ 不成立；

(2) 当 $x = 0$ 时， $|x| = 0$ ，等式 $\sqrt{x^2} = -x$ 成立；

(3) 当 $x < 0$ 时， $|x| = -x$ ，等式 $\sqrt{x^2} = -x$ 成立。

\therefore 当 $x \leq 0$ 时，等式 $\sqrt{x^2} = -x$ 成立。

简单一些，也可以这样来表达：

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x = -x & (\text{当 } x > 0 \text{ 时}), \\ 0 = -x & (\text{当 } x = 0 \text{ 时}), \\ -x & (\text{当 } x < 0 \text{ 时}). \end{cases}$$

\therefore 当 $x \leq 0$ 时，等式 $\sqrt{x^2} = -x$ 成立。

上面这样的表达，反映了我们解答这个问题的整个思考过程。这里我们正确地运用了算术平方根，和绝对值的概念，并且注意到了要去掉字母 x 外边的那个绝对值符号“ $| |$ ”，应该把实数 x 的取值范围分成 $x > 0$ ， $x = 0$ ， $x < 0$ 这三种情况来处理。在解题时，我们全面考虑了 x 取值的各种可能情况，分别进行考察所给的等式是否能成立，最后才总结出结论。这样的思考过程是周密的，这就保证了作出的结论的正确性。

现在我们回过头来，再分析一下前面讲到的那两位同学

为什么会作出错误的结论。

第一位同学发生错误的原因，很有可能是由于偶然的疏忽，他只注意到了字母 x 前面有个负号“-”，贸然作出了 $-x$ 表示负数的结论，而没有考虑到字母 x 本身可以表示正数、零、或者负数这三类不同的实数。第二位同学发生错误的原因很有可能是由于他习惯于运用关于绝对值定义的简单公式

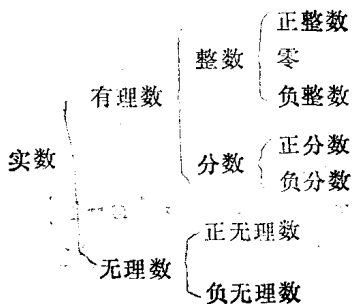
$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0), \\ -x & (x < 0); \end{cases}$$

而没有注意到“0的相反数仍旧是0”，所以这个公式也可改写成

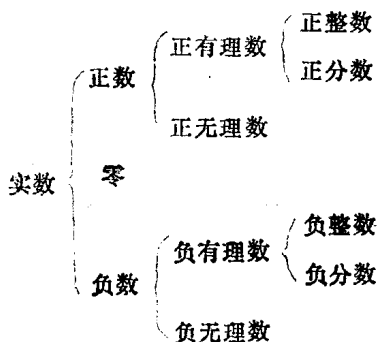
$$|x| = \begin{cases} x & (x > 0), \\ -x & (x \leq 0). \end{cases}$$

不管是哪一种原因，都反映出他们对实数、实数绝对值的概念，还没有达到正确理解、正确运用的要求。

我们知道：有理数和无理数统称实数，实数的这一定义，指出实数可以分成有理数和无理数两大类。而有理数和无理数还可以进一步分类，如下表：



但是，应该注意，实数分类的方法不是唯一的。例如，实数可以先以 0 为分界点，按照它大于 0、等于 0 或者小于 0 划分成三类，然后再进行划分，如下表：



给实数的绝对值下定义，正是应用了实数的这一分类方法。

正确理解和运用数学概念，我们不仅要理解这一概念的定义，而且还得考察一下它是不是可以分类，搞清楚与其它有关概念间的关系。

把概念或者情况进行分类，这是数学中常用的一种研究问题的方法。我们要学好数学，在学习过程中应该逐步学会分类方法。正确进行分类，主要的要求是不遗漏、不重复。在应用时要注意根据具体问题的需要，作合理的分类。例如，实数按有理数、无理数来分类，对解答前面的这个问题就不适用。又如，要解答下面这个问题：

化简： $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ 。

因为 $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ ，我们就得以 1 为分界点把实数 x 按照它是大于 1，等于 1，或者小于 1 来分类，从而去掉代数式 $x-1$ 外边的绝对值符号而得出下面的

结论:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1, & (x > 1) \\ 0, & (x = 1) \\ 1-x, & (x < 1) \end{cases}.$$

对于某些比较复杂的问题, 我们需要把实数分成更多的类来进行考察。在这种情况下, 我们不妨先把分界点找出, 并在数轴上表示出来, 把数轴分成几个部分, 相应地实数也就以这些分界点所对应的数为界, 顺次地被划分成几个部分, 使考察比较方便。实际应用时, 也可以用一条有向直线来代替数轴, 如下例所示。

例 化简:

$$\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2}.$$

解

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1 & (x > 1) \\ 0 & (x = 1) \\ -x+1 & (x < 1), \end{cases}$$

$$\sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = \begin{cases} x+1 & (x > -1) \\ 0 & (x = -1) \\ -x-1 & (x < -1). \end{cases}$$

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$\sqrt{(x-1)^2}$	$-x+1$	2	$-x+1$	0	$x-1$
$\sqrt{(x+1)^2}$	$-x-1$	0	$x+1$	2	$x+1$
原 式	$-2x$	2	2	2	$2x$

$$\text{答: } \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = \begin{cases} -2x & (x < -1) \\ 2 & (-1 \leq x \leq 1) \\ 2x & (x > 1) \end{cases}$$

请读者观察一下上面列出的表，然后回答下面的问题：
当 x 取什么值时，下面的等式

$$\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = 2$$

能够成立？

我们知道：含有未知数的等式叫做方程，这个问题实际上就是要我们解一个含有二次根式的方程。这类方程读者可能还没有在课本中看到过，但是读者只要能灵活地运用上面所讲到的一些知识，也不难把它解决。另外读者从这个问题的解答：“当 $-1 \leq x \leq 1$ 时，所给的等式成立”可以看到，一个一元方程的解，有时也可以不是某些确定的数，而是属于某一范围里的所有的数。

在上面的讲述中，顺便给读者提出了要学习好数学，应该注意到的几个方面。这些方面在后面几讲里，还将分别作专题阐述，请读者先考虑一下，你读了上面这些内容之后，已经有了哪些体会？

习 题 一

1. x 、 y 取什么值时，下列等式成立：

(1) $|x+2| + |2-y| = 0$;

(2) $|x+y-3| + \sqrt{x^2+y^2-5} = 0$ 。

2. 化简：

(1) $\sqrt{a^2+2ab+b^2+4(a+b+1)}$
 $+ \sqrt{a^2+2ab+b^2-4(a+b-1)}$;

(2) $\left(\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{1+x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{1-x}\right)$ 。

3. 证明，如果一个自然数不是3的整倍数，那末这个自然数的平方也不是3的整倍数，并且被3除以后所得的余数一定是1。

4. (1) 过不在一直线上三个点 A 、 B 、 C 作圆，这个圆的圆心 O 与 $\angle BAC$ 的位置关系有几种可能情况？

(2) 为什么在证明“圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半”这一定理时，要、而且只要分成三种情况来讨论？

二、从特殊到一般 从一般到特殊

研究数学，离不开正确地进行推理；要学习好数学，也必须逐步学会推理的方法，正确地进行推理。

让我们先来看一个平面几何中的例子。

老师在讲三角形的内角和定理之前，先让同学们做一个实验，要求他们各自画出一个三角形，然后用量角器量出各个内角的度数，并求出他们的和，精确到1度。实验的结果，绝大多数同学求出的和是180度，也有少数同学得到的结果是179度或者181度。老师问：“从我们实验的结果，可以发现三角形三个内角的和具有什么性质？”同学们回答：“三角形三个内角的和，总是等于180度。”

同学们是怎样作出这一结论的呢？事实上，这里他们是应用了一种推理的方法。他们根据画出的那些三角形的三个内角的和，总是等于180度，或者接近180度这一事实，推想出任何一个三角形都具有这一性质。这是一种特殊到一般的推理方法，这种推理方法，叫做**归纳推理**。

在初中代数里，有很多命题，常常应用归纳推理的方法来引入。例如，在学习二次根式时，我们通过计算发现

$$\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6, \quad \sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6,$$

$$\therefore \sqrt{9 \times 4} = \sqrt{9} \times \sqrt{4};$$