



教育部 高职高专规划教材

高等数学与 经济数学 习题课指导

阎章杭 庞进生 杜跃鹏 主编

化学工业出版社
教材出版中心

教育部高职高专规划教材

高等数学与经济数学 习题课指导

阎章杭 庞进生 杜跃鹏 主编

化学工业出版社
教材出版中心
·北京·

(京)新登字 039 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学与经济数学习题课指导/阎章杭,庞进生,杜跃鹏
主编. —北京:化学工业出版社,2003.7
教育部高职高专规划教材
ISBN 7-5025-4502-6

I. 高… II. ①阎…②庞…③杜… III. ①高等数学-高等
学校:技术学院-教学参考资料②经济数学-高等学校:技术
学院-教学参考资料 IV. ①013②F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 043197 号

教育部高职高专规划教材
高等数学与经济数学习题课指导

阎章杭 庞进生 杜跃鹏 主编

责任编辑:高钰

文字编辑:刘志茹

责任校对:洪雅姝

封面设计:陈小红

化学工业出版社
教材出版中心 出版发行

(北京市朝阳区惠新里3号 邮政编码 100029)

发行电话:(010)64982530

<http://www.cip.com.cn>

*

新华书店北京发行所经销

北京管庄永胜印刷厂印刷

三河市宇新装订厂装订

开本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 10½ 字数 350 千字

2003 年 8 月第 1 版 2004 年 4 月北京第 2 次印刷

ISBN 7-5025-4502-6/G·1198

定 价:16.00 元

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责退换

出版说明

高职高专教材建设工作是整个高职高专教学工作的重要组成部分。改革开放以来,在各级教育行政部门、有关学校和出版社的共同努力下,各地先后出版了一些高职高专教育教材。但从整体上看,具有高职高专教育特色的教材极其匮乏,不少院校尚在借用本科或中专教材,教材建设落后于高职高专教育的发展需要。为此,1999年教育部组织制定了《高职高专教育专门课课程基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》),通过推荐、招标及遴选,组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师,成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍,并在有关出版社的积极配合下,推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种,用5年左右时间完成。这500种教材中,专门课(专业基础课、专业理论与专业能力课)教材将占很高的比例。专门课教材建设在很大程度上影响着高职高专教学质量。专门课教材是按照《培养规格》的要求,在对有关专业的人才培养模式和教学内容体系改革进行充分调查研究和论证的基础上,充分吸取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。这套教材充分体现了高等职业教育的应用特色和能力本位,调整了新世纪人才必须具备的文化基础和技术基础,突出了人才的创新素质和创新能力的培养。在有关课程开发委员会组织下,专门课教材建设得到了举办高职高专教育的广大院校的积极支持。我们计划先用2~3年的时间,在继承原有高职高专和成人高等学校教材建设成果的基础上,充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验,解决新形势下高职高专教育教材的有无问题;然后再用2~3年的时间,在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,通过研究、改革和建设,推出一大批教育部高职高专规划教材,从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

本套教材适用于各级各类举办高职高专教育的院校使用。希望各用书学校积极选用这批经过系统论证、严格审查、正式出版的规划教材,并组织本校教师以对事业的责任感对教材教学开展研究工作,不断推动规划教材建设工作的发展与提高。

教育部高等教育司

2001年4月3日

前言

当前,我国高职高专教育成为社会关注的热点,面临大好的发展机遇。目前公开出版发行的高职高专数学教材,大多数内容偏多、偏深、所用的学时数也较多,教材形式比较单一,与当前全国大多数高校,特别是高等职业院校的教学现状有较大的差距,这样不利于高职高专的教育发展。为了改变这一现状,进一步推动全国的高职高专教材的改革,在教育部高职高专规划教材专家组关怀和指导下,开封大学、河南大学、洛阳大学、包头职业技术学院、石家庄职业技术学院、漯河职业技术学院、南阳理工学院、商丘职业技术学院、徐州建筑职业技术学院、天津渤海职业技术学院、石家庄铁路职业技术学院、无锡职业技术学院、河北科技大学理学院、合肥学院、三门峡职业技术学院、邢台学院等院校的优秀教师和专家,经过长时间的酝酿和研究,编写了一套面向 21 世纪比较符合当前高职高专院校教学实际的《高等数学与经济数学》及与之配套的《高等数学与经济数学学习题课指导》教材。

《高等数学与经济数学学习题课指导》教材,主要内容为:每章内容小结、常见问题的分类及解题方法、典型习题解答与提示、自我测验、往届试卷等。

本教材的编写中,编者以教育部关于三年制高职高专教育的教学大纲为重要依据来组织教学内容的编写,同时又进一步结合当前高等职业教育发展趋势及学校自身的状况,力争使教材更具有科学性、基础性和使用性。

本教材针对当前高职高专学生普遍存在的课程难学、规律难寻、习题难做、表述难全等问题,对主教材中的每一章,从学习内容、学习方法到习题解答、自我检测都进行系统的、科学的编排。特别注重培养学生自学能力和运用数学知识解决实际问题的能力。该书内容也为主教材的习题课提供了充足的资料和素材,大大地方便教师的备课及学生的学习。

为了便于阅读,本书在章节顺序及内容叙述、解题方法、符号标志等方面都与主教材保持一致。每一章编排结构如下。

• 本章内容小结

首先对该章内容进行归纳提炼,必要时列表给出,帮助读者了解该章的概貌,然后指出重点、难点,使读者心中有数,把握学习的主动权。另外,针对初学者容易出现的问题,提出学习建议和注意事项,提高学习的效果。

• 常见问题分类及解法

根据每一章在解题过程中的常见习题进行分类,总结每一类习题常用的解题方法和解题技巧,并通过典型例题给出示范、分析、归纳。提倡一题多解和与实际应用相结合。

• 典型习题解答与提示

考虑到高职高专学生的特点,本书在此部分给出主册各章节练习题,复习题的答案或解答,其中基本题(约占总练习题的 1/3)仅给出答案,对难度较大的题或提高题则给出提示或详细的解答。

• 自我测验

根据解题中常见的题型及学生在学习容易出现的问题,编制每一章的自我测验题。

另外在本书的附录中,还精选了几套期终考试试题,以供学生自我检验学习效果,提高

学生学习的主动性和积极性。

该套书由阎章杭总策划，负责组织实施。该套书副主编为马幼梅、郭建萍、毛珍玲、黄士林。

其中本册主编为阎章杭、庞进生、杜跃鹏。

参加每一篇编审人员有（按章节顺序排列）

第一篇、第二篇 张 荣 辛自立 郭建萍 庞进生 杨建法 胡艳玲 鞠金东

第三篇 路世英 王灵色 孙国明

第四篇 路世英 白景华 崔树祥

在本书编写过程中，曾得到有关学校的领导、系部领导和有关专家的大力支持和帮助，杜跃鹏和杨菲老师积极参与了利用 Mathematica 软件进行数学实验内容的编写和审核，河南大学的教授、专家阎育华、王国胜曾对本书的应用数学部分进行了认真的审核，并提出了许多宝贵的意见，在此一并表示衷心的感谢！

由于我们水平有限，错误和不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

《高等数学与经济数学》教材编委会

2003 年 3 月

内 容 提 要

本书是《高等数学与经济数学》的配套习题课指导教材，其内容涉及一元函数微积分、概率论与数理统计初步、线性代数及应用等内容。本书每篇均由本章内容小结、常见问题分类及解法、典型习题解答与提示和自我测验四部分组成，并在书后附有几套精选往届期末考试试卷，以供学生自我检验和提高学习兴趣之用。本书内容精炼、例题典型、解题全面透彻。

本书可作为高职高专院校、成人教育学院的经济、管理等专业的学生学习《高等数学与经济数学》习题课教材。

目 录

第一篇 预备知识	1
第一章 初等数学提要及重要公式	1
典型习题解答与提示	1
第二篇 一元函数微积分	4
第二章 函数、极限与连续	4
第一节 本章内容小结	4
第二节 常见问题分类及解法	5
第三节 典型习题解答与提示	10
第四节 自我测验	18
第三章 导数与微分	20
第一节 本章内容小结	20
第二节 常见问题分类及解法	21
第三节 典型习题解答与提示	23
第四节 自我测验	34
第四章 导数的应用	36
第一节 本章内容小结	36
第二节 常见问题分类及解法	37
第三节 典型习题解答与提示	39
第四节 自我测验	50
第五章 一元函数积分学	52
第一节 本章内容小结	52
第二节 常见问题分类及解法	53
第三节 典型习题解答与提示	60
第四节 自我测验	69
第六章 定积分的应用	70
第一节 本章内容小结	70
第二节 常见问题分类及解法	70
第三节 典型习题解答与提示	72
第四节 自我测验	76
第三篇 概率论与数理统计 基础	77

第七章 概率论初步	77
第一节 本章内容小结	77
第二节 常见问题分类及解法	78
第三节 典型习题解答与提示	85
第四节 自我测验	94
第八章 数理统计基础	96
第一节 本章内容小结	96
第二节 常见问题分类及解法	96
第三节 典型习题解答与提示	99
第四节 自我测验	103
第四篇 线性代数初步及应用	104
第九章 行列式	104
第一节 本章内容小结	104
第二节 常见问题分类及解法	104
第三节 典型习题解答与提示	107
第四节 自我测验	110
第十章 矩阵与线性方程组	113
第一节 本章内容小结	113
第二节 常见问题分类及解法	113
第三节 典型习题解答与提示	119
第四节 自我测验	132
* 第十一章 线性规划初步	134
第一节 本章内容小结	134
第二节 常见问题分类及解法	134
第三节 典型习题解答与提示	138
第四节 自我测验	149
附录一 往届期终考试试题选	151
附录二 自我测验参考答案及往届 期终考试试题答案	155
参考书目	161

* 为选学内容

第一篇 预备知识

第一章 初等数学提要及重要公式

典型习题解答与提示

* 习题 1-4 参考答案

1. 略.

2. $N[\text{Pi}^2 + \text{Sqrt}[E], 30],$

11.5183256717894867656831417877.

3. $f[x_] = E^x \sin[x],$

$e^x \sin[x];$

$N[f[-1]],$

-0.30956;

$N[f[-10]],$

0.0000246985;

$N[f[-100]],$

$1.88372 \times 10^{-44};$

$N[f[-1000]],$

$-4.197206560965 \times 10^{-43.5}.$

4. (1) $\text{Plot}[\text{ArcTan}[x], \{x, -10, 10\}]$ (见图 1-1);

(2) $\text{Plot}[\{\text{Exp}[x], \text{Exp}[-x]\}, \{x, -2, 2\}]$ (见图 1-2);

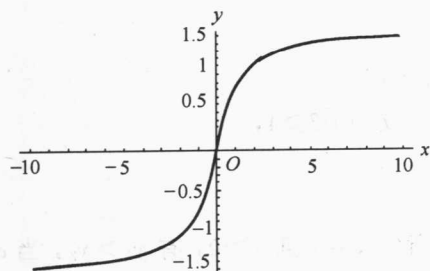


图 1-1 $y = \tan x$ 图像

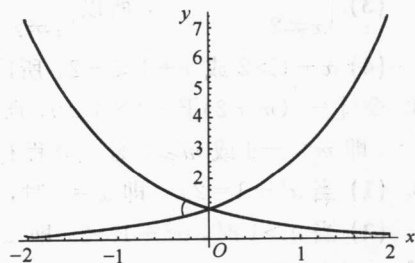


图 1-2 $y = e^x, y = e^{-x}$ 图像

(3) $\text{Plot}[\text{Exp}[1/x], \{x, -10, 10\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 10\}]$ (见图 1-3);

(4) $\text{Plot}[\text{Sin}[x]/x, \{x, -10, 10\}]$ (见图 1-4);

(5) $\text{Plot}[(1+1/x)^x, \{x, 1, 50\}]$ (见图 1-5);

(6) $\text{Plot}[(1+x)^{1/x}, \{x, -0.9, 1\}]$ (见图 1-6).

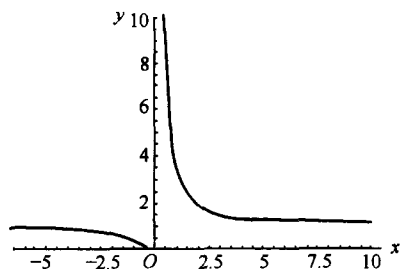


图 1-3 $y=e^{\frac{1}{x}}$ 图像

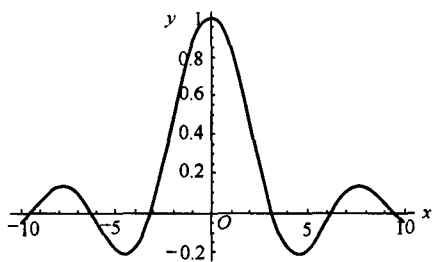


图 1-4 $y=\frac{\sin x}{x}$ 图像

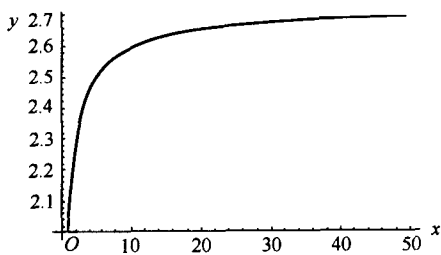


图 1-5 $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 图像

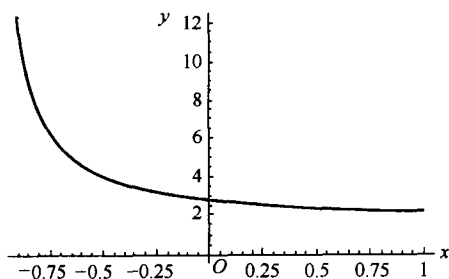


图 1-6 $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ 图像

复习题一

1. (1) 原式 $= \left(a^{\frac{9}{2}} a^{-\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \div \left(a^{-\frac{7}{3}} a^{\frac{13}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = (a^3)^{\frac{1}{3}} \div (a^2)^{\frac{1}{2}} = a \div a = 1$;

(2) 原式 $= e^{\ln 2^{-2}} - e^{\ln 3} + 4 \ln e - 0 = \frac{1}{4} - 3 + 4 = 1 \frac{1}{4}$.

2. (1) $-3 < x < 3$; (2) $-7 < x - 4 < 7$, 所以 $-3 < x < 11$;

(3) $\begin{cases} -2 \leq x - 2 \leq 2 \\ x \neq 2 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x \neq 2 \end{cases}$;

(4) $x + 1 > 2$ 或 $x + 1 < -2$, 所以 $x < -3$ 或 $x > 1$.

3. 令 $[-(m+2)]^2 - 4 \times 4 \geq 0$, 所以 $m+2 \leq -4$ 或 $m+2 \geq 4$,
即 $m \leq -6$ 或 $m \geq 2$ 时, 方程有实根.

4. (1) 当 $x^2 + 1 = 2x$ 即 $x = 1$ 时, 有 $y_1 = y_2$;

(2) 当 $a > 1$ 时, $x^2 + 1 > 2x$ 即 $(x-1)^2 > 0$, 所以 $x \neq 1$ 且 $x > 0$, 有 $y_1 > y_2$, 当 $a < 1$ 时, $x^2 + 1 < 2x$ 无解;

(3) 当 $a > 1$ 时, $x^2 + 1 < 2x$ 无解;

当 $a < 1$ 时, $x^2 + 1 > 2x$, 所以 $x \neq 1$ 且 $x > 0$ 时, 有 $y_1 < y_2$.

5. 公司销售总额为 $7000 \times 60 + 7000 \times 0.9 \times 40 = 672000$ (元)

应交税金为 $672000 \times 7\% = 47040$ (元)

可获净利润额为 $672000 - 5000 \times 100 - 47040 - 10000 = 114960$ (元)

6. (1) $\in$; (2) $\subset$; (3) $\notin$; (4) $\subset$ 7. $A \cup B$

8. $A \cap B = \{ (0, 0) \}$, $A \cup B = \{ (x, y) \mid x=0 \text{ 或 } y=0 \}$,

$\bar{A} = \{ (x, y) \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0, y \in \mathbf{R} \}$, $\bar{B} = \{ (x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R} \text{ 且 } y \neq 0 \}$.

9. (1) 9 种; (2) 20 种. 10. (1) P_{20}^2 ; (2) P_{10}^2 .

11. (1) “某人必须站在中间”, 则该人可先选定中间位置站着, 其他 4 人可在剩下的 4 个位置上任意排列, 因此此时的站法有 $P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (种);

(2) “某两人必须站在两边”, 如此的站队可分两步安排; 第一步先安排这两个人排在两边位置, 其站法有 $P_2 = 2$ (种), 第二步安排剩余 3 人的站法, 有 $P_3 = 6$ (种); 因此, 按要求的站法有 $P_2 \times P_3 = 2 \times 6 = 12$ (种);

(3) “某人不站在中间也不站在两边”, 这种站法可分两步完成; 第一步先安排该人, 其站法为: P_2^1 ; 第二步再安排剩余的 4 人, 站法为: P_4 种, 因此, 按要求的站法有 $P_2^1 \times P_4 = 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$ (种);

(4) “某两人必须站在一起”, 此时可把他们作为一组, 另外 3 人作另 3 组, 共 4 组进行全排列, 有 P_4 种排法, 又某两人在组内可互换位置, 因此共有站法为 $P_2 \times P_4 = 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$ (种).

12. (1) $\binom{20}{2}$; (2) $\binom{10}{2}$.

13. (1) 由于采用的是单循环赛, 每两队要比赛一场, 因此 20 个队共需比赛

$$\binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2!} = 190 \text{ (场)};$$

(2) 三个小组各自比赛的场次分别为 $\binom{7}{2}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{7}{2}$; 三小组赛的第一名进行冠军决赛的场次为 $\binom{3}{2}$; 因此, 共需比赛的场次为 $\binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2} + \binom{3}{2} = 60$ (场).

14. (1) 因为 $P_x^5 + P_x^4 = 4P_x^3$, 所以 $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x(x-1)(x-2)(x-3) = 4x(x-1)(x-2)$, 且 $x \geq 5$, 所以有 $(x-3)(x-4) + (x-3) = 4$, 即 $x^2 - 6x + 5 = 0$, 所以 $x = 5$, $x = 1$ (舍去);

(2) 因为 $\binom{x}{3} + \binom{x}{2} = 15 \binom{x-1}{1}$, 所以由组合数的性质得

$$\binom{x+1}{3} = 15 \binom{x-1}{1}, \text{ 且 } x \geq 3; \text{ 于是有 } \frac{(x+1)x(x-1)}{3!} = 15 \times (x-1),$$

即 $x^2 + x - 90 = 0$, 所以 $x = 9$, $x = -10$ (舍去).

15. (1) 从 2, 3, 5, 7 四个数字中任取两个组成真分数时, 要求分子小于分母, 换句话说, 小的数字排在上边, 大的数字排在下边, 每一对数字只能组成一个真分数, 因此可组成的真分数的个数为 $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2!} = 6$ (个);

(2) 组成分数时, 分子、分母的大小没有限制, 因此每一排列对应一个分数, 那么组成的分数个数为 $P_4^2 = 4 \times 3 = 12$ (个).

第二篇 一元函数微积分

第二章 函数、极限与连续

第一节 本章内容小结

一、本章主要内容

函数的定义；函数的几种特性；复合函数、反函数与初等函数的概念；数列与函数极限的定义；极限的运算法则；无穷小与无穷大的概念；两个重要极限；无穷小的比较；函数在点与区间的连续性及间断性；闭区间上连续函数的性质.

二、几个常用的基本极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} c = c, (c \text{ 为常数}); (2) \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0; (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0, (\alpha \text{ 为正的常数});$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m \\ 0, & \text{当 } n>m \\ \infty, & \text{当 } n<m \end{cases}$$

其中 $a_0, a_1 \cdots a_m$ 和 $b_0, b_1 \cdots b_n$ 都是常数, 且 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$;

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; (7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1; (8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; (9) \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e;$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = 0 \quad (|q| < 1).$$

三、几个充要条件

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha, [\text{当 } \begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty) \end{matrix} \text{ 时 } \alpha \rightarrow 0];$$

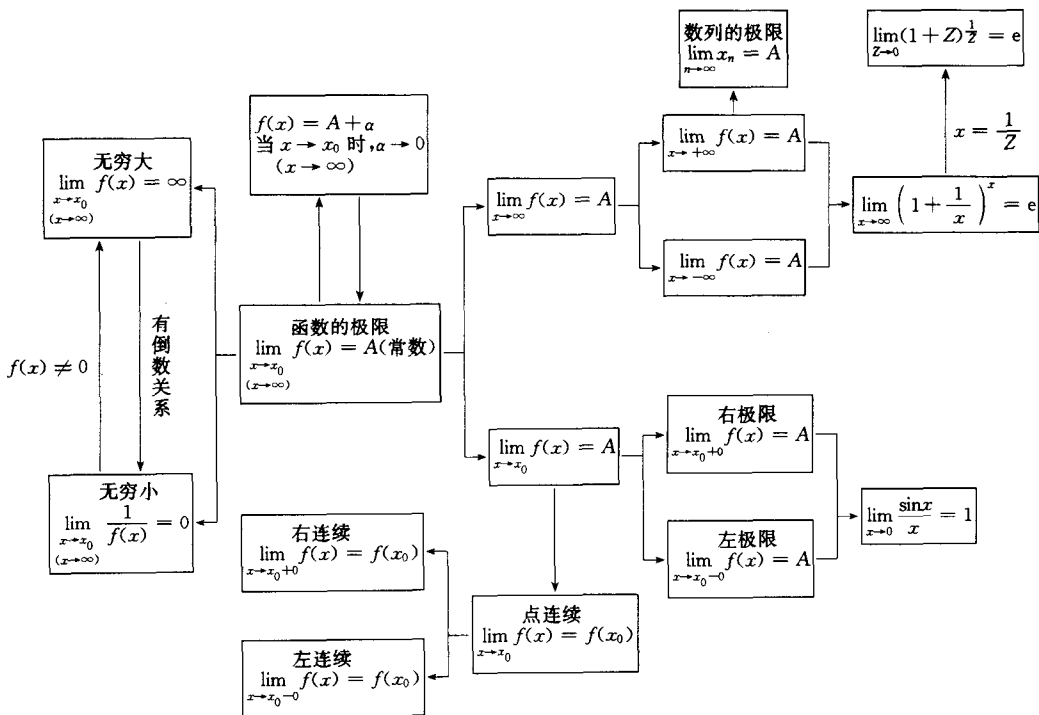
$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

四、表 2-1 列出了当 $x \rightarrow \infty$ 和 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限与由此引伸出来的有关概念之间的关系

表 2-1



五、表 2-2 列出函数 $y=f(x)$ 的点连续与区间连续的概念

表 2-2

条 件	结 论
(1) 如果 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$	那么 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续
(2) 如果 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内每一点连续	那么 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续
(3) 如果 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$	那么 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

六、本章关键词

函数 极限 连续

第二节 常见问题分类及解法

一、求函数的定义域

函数的定义域就是指使函数有意义的自变量 x 的取值范围。判断函数有意义的方法有

以下几种.

- (1) 分式的分母不等于零.
- (2) 偶次方根式中, 被开方式大于等于零.
- (3) 含有对数的式子, 真数式大于零.
- (4) 反正弦、反余弦符号内的式子绝对值小于等于 1.
- (5) 分段函数的定义域是各段函数定义域的并集.
- (6) 若已知 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$, 求 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域, 方法是解不等式组 $a \leq \varphi(x) \leq b$.

例 1 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}} + \arccos(3x-18); \quad (2) y = \frac{\ln(5x-2)}{x^2-7x+10} + \sqrt{10-x}.$$

解 所求定义域应使函数式中各部分都有意义, 即求解不等式组,

(1) 若使函数有意义, 必须

$$\begin{cases} x^2-3x+2 > 0 \\ |3x-18| \leq 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x < 1 \text{ 或 } x > 2 \\ \frac{17}{3} \leq x \leq \frac{19}{3} \end{cases}, \text{ 故所求函数定义域为 } \frac{17}{3} \leq x \leq \frac{19}{3};$$

(2) 若使函数有意义, 必须

$$\begin{cases} 5x-2 > 0 \\ x^2-7x+10 \neq 0 \\ 10-x \geq 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x > \frac{2}{5} \\ x \neq 2, x \neq 5 \\ x \leq 10 \end{cases}$$

故所求函数的定义域为 $\frac{2}{5} < x \leq 10$ 且 $x \neq 2, x \neq 5$.

例 2 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[2, 5]$, 求函数 $y=f(4x-3)$ 的定义域.

解 由已知得 $2 \leq 4x-3 \leq 5$, 即 $\frac{5}{4} \leq x \leq 2$, 故所求函数的定义域为 $\frac{5}{4} \leq x \leq 2$.

二、判断两个函数是否相同

一个函数的确定取决于其定义域和对应关系的确定, 因此判断两个函数是否相同必须判断其定义域是否相同, 且要判断函数表达式是否统一即可.

例 3 判断下列各对函数是否相同.

$$(1) f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} \text{ 与 } g(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos x); \quad (2) f(x) = \frac{|x|}{x} \text{ 与 } g(x) = 1.$$

解 利用定义域和对应法则来判断

(1) 因为 $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$ 的定义域是一切实数, 而 $g(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ 的定义域也是一切实数, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同的定义域, 又因为 $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x) = g(x)$, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同的对应法则, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的函数;

(2) 因为 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 的定义域是 $x \neq 0$ 的一切实数, 而 $g(x) = 1$ 的定义域是一切实数, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数.

三、判断函数奇偶性

判断函数的奇偶性, 主要的方法就是利用定义, 其次是利用奇偶的性质, 即奇(偶)函数之和仍是奇(偶)函数; 两个奇函数之积是偶函数; 两个偶函数之积仍是偶函数; 一奇一偶之积是奇函数.

例 4 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1); \quad (2) f(x) = x^3(2x^2 + \tan x^2).$$

解 用定义判断:

$$(1) \text{ 因为 } f(-x) = \frac{a^{-x} - 1}{a^{-x} + 1} = \frac{1 - a^x}{1 + a^x} = -\frac{a^x - 1}{a^x + 1} = -f(x), \text{ 所以 } f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} \text{ 是奇函数;}$$

(2) 用性质判断, 因为 x^3 是奇函数, $2x^2 + \tan x^2$ 是偶函数, 所以 $f(x) = x^3(2x^2 + \tan x^2)$ 是奇函数.

四、数列极限的求法

利用数列极限的四则运算法则、性质以及已知极限求极限.

1. 若数列通项的分子、分母都是关于 n 的多项式, 则用分子分母中 n 的最高次项的幂函数同除分子分母, 然后由四则运算法则求极限.

例 5 求下列数列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 5}{n^3 + 3n^2 + 5n - 3}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 1}{5n^2 + 3n - 4}; \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + 3n - 2}}.$$

$$\text{解} \quad (1) \text{ 分子分母同除以 } n^3 \text{ 得} \quad \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{3}{n^3}} = 0;$$

$$(2) \text{ 分子分母同除以 } n^2 \text{ 得} \quad \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}} = \frac{2}{5};$$

$$(3) \text{ 分子分母同除以 } n \text{ 得} \quad \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}} = 1.$$

2. 若通项中含有根式, 一般采用先分子或分母有理化, 再求极限的方法.

$$\text{例 6} \quad \text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}).$$

解 对通项式有理化得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1})(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1})}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. 若所求极限是无穷项之和, 通常先利用等差或等比数列的前 n 项和公式求和, 再求

极限.

例7 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2^n} \right)$.

解 先求由 $a_1 = 1, q = -\frac{1}{2}$ 所构成的等比数列的前 n 项和, 再求极限.

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left[1 - (-1)^n \frac{1}{2^n} \right] = \frac{2}{3}$$

4. 利用两边夹定理求数列极限, 方法是把极限式中的每一项放大或缩小, 并使放大、缩小后的数列具有相同的极限.

例8 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + \pi} + \frac{n}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n\pi} \right)$.

解 因为 $\frac{n}{n^2 + i\pi} \geq \frac{n}{n^2 + n\pi} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad \frac{n}{n^2 + i\pi} \leq \frac{n}{n^2 + \pi} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$

$$\text{所以 } n \frac{n}{n^2 + n\pi} \leq \frac{n}{n^2 + \pi} + \frac{n}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n\pi} \leq n \frac{n}{n^2 + \pi},$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nn}{n^2 + n\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\pi}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nn}{n^2 + \pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\pi}{n^2}} = 1,$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + \pi} + \frac{n}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n\pi} \right) = 1.$$

5. 若通项式为形如 1^∞ 的不定式形式, 一般采用重要极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ 求极限.

例9 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+3}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^n.$$

解 用重要极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ 求极限.

$$(1) \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^2 = e;$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{n+1} \right)^{\frac{n+1-1}{2}} \right]^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{2}{n+1} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^2 = e^2 \end{aligned}$$

五、函数极限的求法

函数的极限比数列的极限复杂, 原因有两个, 一是自变量的变化过程多; 二是函数式复杂, 因此, 求函数的极限首先要观察自变量的变化和函数表达式, 然后选择适当方法, 一般地, 函数极限有以下几种求法:

① 数列极限的求法也适合求函数的极限 ($x \rightarrow \infty$).

② 利用函数的连续性求函数的极限, 即若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

例 10 求 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{x^2+5x+4}$.

解 因为函数 $\frac{x+1}{x^2+5x+4}$ 在 $x=4$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{x^2+5x+4} = f(4) = \frac{1}{8}$.

③ 若求分段函数在分界点处的极限, 则利用极限存在的充要条件求极限. 即函数在某一点极限存在的充要条件是函数在该点的左、右极限存在且相等.

例 11 已知

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-3, & x \leq 1 \\ x-1, & 1 < x < 3 \\ \sin x+1, & x \geq 3 \end{cases}, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

解 在 $x=1$ 处, 求 $f(x)$ 的左、右极限,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+2x-3) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$;

在 $x=3$ 处, 求 $f(x)$ 的左、右极限,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (\sin x+1) = \sin 3+1$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 不存在.

④ 利用两个重要极限求函数的极限. 即若所求极限为形如 $\frac{0}{0}$ 的不定式形式, 并且极限式中含有三角函数, 一般通过三角函数的恒等变换再利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 求极限; 若所求极限为形如 1^∞ 的不定式形式, 并且所求函数易转化为 $(1+u)^{\frac{1}{u}}$ 或 $\left(1+\frac{1}{u}\right)^u$ 的形式, 通常采用 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ 求极限.

例 12 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\arcsin 5x}$.

解 因为已知极限为 $\frac{0}{0}$ 形式不定式, 且含有三角函数, 则有

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} \cdot \frac{\sin 5x}{\arcsin 5x} \cdot \frac{7x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arcsin 5x)}{\arcsin 5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{5} = \frac{7}{5}.$$

例 13 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\cos x - 1}}$

解 因为所求极限为 1^∞ 形式不定式, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 得

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1}} = e.$$

⑤ 利用无穷小量的特性以及无穷小量与无穷大量的关系求极限. 即无穷小量与有界变量之积仍是无穷小量; 有限个无穷小量之积仍是无穷小量; 有限个无穷小量之代数和仍为无穷小量等. 无穷小量与无穷大量的关系是互为倒数.

例 14 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin x \cos \frac{1}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x-3}{x^2-4}.$$

解 (1) 利用无穷小量的性质求该极限, 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, x^2 , $\sin x$ 均是无穷小量, 而