初中数学基础训练

华东师范大学
第一附属中学
数学教研组　编

华东师范大学出版社

CHU ZHONG SHU XUE
JI CHU XUN LIAN

初中数学基础训练

华东师范大学第一附中数学教研组　编

华东师范大学出版社

（沪）新登字201号

初 中 数 学 基 础 训 练

华东师范大学第一附中数学教研组　编

华东师范大学出版社出版
（上海中山北路3663号）
新华书店上海发行所发行　江苏东台印刷厂印刷
开本：787×1092　1/32　印张：8.25　字数：185千字
1992年7月第一版　1992年7月第一次印刷
印数：00.1—10,000本

ISBN 7-5617-0558-1/G·256　定价：3.50元

前　　言

《初中数学辅导》一书自1985年出版以来，深受读者欢迎，先后多次重印，共发行数十万册之多。为满足当前读者的需要，我们根据延伸知识点、扩大知识面的原则，对《初中数学辅导》作了修订。现改书名为《初中数学基础训练》。

这本书的特点是从学生的实际和本书出版后读者的反映出发，删掉一些较难的内容，使之更切合当前初中数学教学的要求。这本书仍保留原有的揭示解题规律、突出重点与关键的特色，对加强基础知识、提高逻辑推理能力和综合解题能力将会有良好的帮助，为便于读者自学，每章都附有练习题，是一本较好的中学生课外课物。

本书由石源泉、王剑青、毛梦奇、夏益辉、吴传发、章蕊樱、徐惠芳同志执笔，虽然总结了多年教学实践的经验，限于水平，不当之处仍可能存在，希望读者提出意见，以便进一步修订完善。

华东师大第一附中数学教研组

目　录

第一章　因式分解

初中数学里的因式分解是一个很重要的恒等变化问题。不仅在处理约分、通分、解方程等问题时都要用到它，而且在以后的进一步学习中也有很大的用途。因式分解的一般途径是先看各项有没有公因式(有公因式就提取)，再看能否应用乘法公式，如属 ax^2+bx+c 型的二次三项式，可考虑用十字相乘法或求根公式分解。对某些项数较多、次数较高的多项式，用上述方法分解有困难的，可考虑用分组分解法或用除法分解。至于某些简单的对称多项式的分解因式，往往先用因式定理求出一个根，然后再根据对称多项式的性质结合待定系数法求出其它因式。下面着重研究几种常用的分解因式方法。

一、提取公因式法

根据乘法运算法则 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$，反过来有 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$。如果一个多项式的各项含有公因式，就可以提取这个公因式，把它写在括号外面。

［例一］　把下列各式分解因式：

(1)　$-2p^2(p^2+q^2)+6pq(p^2+q^2)$；

(2)　$2a(x-2)+3b(2-x)$；

(3)　$4(x-y)^3-8(y-x)^2$；

(4)　$-a^{m+1}y^{2n-1}+a^{m-1}y^{2n+1}$。

解： (1)　原式 $=-2p(p^2+q^2)(p-3q)$。

(2)　原式 $=2a(x-2)-3b(x-2)$

$=(x-2)(2a-3b)$。

(3) 原式 $=4(x-y)^3-8(x-y)^2$

$=4(x-y)^2(x-y-2)$。

(4) 原式 $=a^{m-1}y^{2n-1}(y^2-a^2)$

$=a^{m-1}y^{2n-1}(y+a)(y-a)$。

[例二] 把下列各式分解因式：

(1) $(a-b)(p-2)-(b-a)(q+3)-(a-b)(1-r)$；

(2) $(x-y-z)(x+y-z)-(y-z-x)(y+z-x)$。

解：(1) 原式 $=(a-b)[(p-2)+(q+3)-(1-r)]$

$=(a-b)(p+q+r)$。

(2) 原式 $=(x-y-z)(x+y-z)$

$-(y-z-x)[-(x-y-z)]$

$=(x-y-z)[(x+y-z)+(y-z-x)]$

$=(x-y-z)(2y-2z)$

$=2(y-z)(x-y-z)$。

[例三] 证明：

(1) 对于任意自然数 n，2^{n+4} 与 2^n 的差必能被 30 整除；

(2) 对于任意自然数，$3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$ 必能被 10 整除。

证：(1) 由于 $2^{n+4}-2^n=2^n\cdot2^4-2^n=2^n(2^4-1)=2^n\cdot15$ $=2\cdot2^{n-1}\cdot15=30\times2^{n-1}$。$n$ 是自然数，因此 2^{n-1} 是整数，所以 2^{n+4} 与 2^n 的差必能被 30 整除。

(2) 因为原式 $=3^n(9+1)-2^n(4+1)=10\cdot3^n-\frac{10}{2}\cdot2^n$ $=10(3^n-2^{n-1})$，所以能被 10 整除。

二、应用乘法公式法

常用的乘法公式有：

(1) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

(2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

(3) $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$；

(4) $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$。

以上公式反过来写，就是应用乘法公式分解因式的公式。应用乘法公式分解因式，就是把一些单项式或多项式看作公式的一项，然后利用乘法公式把它分解成因式。应用乘法公式分解因式常和提取公因式、分组分解、配方、添项、拆项等方法结合起来进行，如 $a^2-4ab^2+3b^4-2b^2-1$ 分解因式，可以先把它拆成 $a^2-4ab^2+4b^4-b^4-2b^2-1$，再用乘法公式，或者用十字相乘法或应用求根公式来分解因式。

［例四］ 把下列各式分解因式：

(1) $\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$；

(2) $(x+y)^2-4(x+y-1)$；

(3) $a^{2n}-a^{4n}-2a^{7n}-a^{10n}$；

(4) x^3-3x^2+4；

(5) $x^4-x^3-7x^2+x+6$。

解：(1) 原式 $=\left(\frac{1}{4}x\right)^2-2\times\frac{x}{4}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$=\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}(x-2)^2。$$

(2) 原式 $=(x+y)^2-4(x+y)+4=(x+y-2)^2$。

(3) 原式 $=(a^n)^2-[(a^{2n})^2+2a^{2n}a^{5n}+(a^{5n})^2]$

$$=(a^n)^2-(a^{2n}+a^{5n})^2$$

$$=(a^n+a^{2n}+a^{5n})(a^n-a^{2n}-a^{5n})$$

$$=a^{2n}(1+a^n+a^{4n})(1-a^n-a^{4n})。$$

(4) 原式$=(x^3+1)-(3x^2-3)$

$$=(x+1)(x^2-x+1)-3(x+1)(x-1)$$
$$=(x+1)[x^2-x+1-3(x-1)]$$
$$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2。$$

(5) 原式$=x^4-x^3-7x^2+7x-6x+6$

$$=x^3(x-1)-7x(x-1)-6(x-1)$$
$$=(x-1)(x^3-7x-6)$$
$$=(x-1)[(x+1)^3-(3x^2+10x+7)]$$
$$=(x-1)(x+1)(x^2-x-6)$$
$$=(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)。$$

[例五] 把下列各式分解因式：

(1) $1+2a+3a^2+4a^3+5a^4+6a^5+5a^6+4a^7+3a^8+2a^9+a^{10}$；

(2) $(1-a^2)(1-b^2)-4ab$；

(3) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$。

解：(1) 可先拆项再分组，发现有公因式 $1+a$ 可提取。

原式$=(1+a)+a(1+a)+2a^2(1+a)+2a^3(1+a)+3a^4(1+a)+3a^5(1+a)+2a^6(1+a)+2a^7(1+a)+a^8(1+a)+a^9(1+a)$

$$=(1+a)(1+a+2a^2+2a^3+3a^4+3a^5+2a^6+2a^7+a^8+a^9)$$
$$=(1+a)[(1+a)+2a^2(1+a)+3a^4(1+a)+2a^6(1+a)+a^8(1+a)]$$
$$=(1+a)^2(1+2a^2+3a^4+2a^6+a^8)$$
$$=(1+a)^2(1+a^2+a^4)^2$$
$$=(1+a)^2(a^2+a+1)^2(a^2-a+1)^2。$$

(2) 先把前面两个因式乘开，再分组分解。

原式$=1-a^2-b^2+a^2b^2-4ab$

$=1-2ab+a^2b^2-a^2-2ab-b^2=(1-ab)^2-(a+b)^2$

$=[(1-ab)+(a+b)][(1-ab)-(a+b)]$

$=(1-ab+a+b)(1-ab-a-b)$。

(3) 把 a、b、c 按二次式降幂整理，可发现 $b-c$ 为原式一个因式。

原式$=(b-c)a^2-b^2a+c^2a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)[a^2-(b+c)a+bc]$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$。

[例六] 把下列各式分解因式：

(1) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$；

(2) $a^3+b^3+c^3-3abc$；

(3) $(a-2b)^3a-(b-2a)^3b$。

解：(1) 先用两数立方差公式，再用两数立方和公式，可发现有因式$(b+c)$。

原式$=[(a+b+c)^3-a^3]-(b^3+c^3)$

$=(b+c)(3a^2+3ab+3ac+3bc)$

$=(b+c)\cdot 3[a(a+b)+c(a+b)]$

$=3(a+b)(b+c)(c+a)$。

(2) 原式$=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]$

$-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$。

(3) 设 $a-b=k$，则 $a-2b=k-b$，$b-2a=-(k+a)$。

原式$=(k-b)^3a+(k+a)^3b$

$=ak^3-3k^2ab+3kab^2-ab^3+bk^3+3k^2ab+3ka^2b+a^3b$

$$=(a+b)k^3+3kab(a+b)+ab(a^2-b^2)$$

$$=(a+b)[k^3+3kab+ab(a-b)]$$

$$=(a+b)[(a-b)^3+3ab(a-b)+ab(a-b)]$$

$$=(a+b)(a-b)(a+b)^2=(a+b)^3(a-b)。$$

(3)的解法二：

$$原式=(a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3)a$$

$$-(b^3-6ab^2+12a^2b-8a^3)b$$

$$=a^4-6a^3b+12a^2b^2-8ab^3-b^4+6ab^3-12a^2b^2+8a^3b$$

$$=(a^4-b^4)-6ab(a^2-b^2)+8ab(a^2-b^2)$$

$$=(a^2-b^2)(a^2+b^2+2ab)$$

$$=(a+b)^3(a-b)。$$

三、二次三项式的分解因式

二次三项式分解因式一般可应用下列公式：

(1) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$；

(2) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$；

(3) ax^2+bx+c

$$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)。$$

［例七］ 把下列各式分解因式：

(1) $6x^2-x-15$；

(2) $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)-120$；

(3) $3x^2+5xy-2y^2+x+9y-4$。

解：(1) 6 可以分解成 1 与 6、2 与 3，-15 可以分解成 -1 与 15、-15 与 1、-3 与 5、-5 与 3，注意观察与思考，用十字乘法进行试验，不难得出原式 $=(2x+3)(3x-5)$。

(2) 原式 $=(x+2)(x+1)(x+3)(x+4)-120$

$$=(x^2+5x+6)(x^2+5x+4)-120,$$

令 $x^2+5x=A$，代入得

$$\text{原式}=A^2+10A-96=(A+16)(A-6)$$
$$=(x^2+5x+16)(x^2+5x-6)$$
$$=(x^2+5x+16)(x+6)(x-1)\text{。}$$

（3）把 x、y 按二次三项式降幂整理，就可用十字相乘法或求根公式解之。

解法一：原式 $=3x^2+(5y+1)x-(2y-1)(y-4)$，

$\because$
$$\begin{array}{ccc} 3 & & -(y-4) \\ & \times & \\ 1 & & 2y-1 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{-y+4+6y-3=5y+1} \end{array}$$

$\therefore$ 原式 $=(3x-y+4)(x+2y-1)$。

解法二：

$$\text{原式}=3x^2+(5y+1)x-2y^2+9y-4$$
$$=3\left(x+\frac{5y+1+\sqrt{(5y+1)^2+4\times3(2y^2-9y+4)}}{2\times3}\right)$$
$$\cdot\left(x+\frac{5y+1-\sqrt{(5y+1)^2+4\times3(2y^2-9y+4)}}{2\times3}\right)$$
$$=3\left(x+\frac{5y+1+7(y-1)}{2\times3}\right)\left(x+\frac{5y+1-7(y-1)}{2\times3}\right)$$
$$=(x+2y-1)(3x-y+4)\text{。}$$

解法三：应用待定系数法，设

$$\text{原式}=(3x-y+a)(x+2y+b)$$
$$=3x^2-xy+ax+6xy-2y^2+2ay+3bx-by+ab$$
$$=3x^2+5xy-2y^2+(a+3b)x+(2a-b)y+ab,$$

比较系数，得

$$\begin{cases} a+3b=1 \\ 2a-b=9 \\ ab=-4. \end{cases}$$

解方程组，得 $a=4$，$b=-1$。

原式 $=(3x-y+4)(x+2y-1)$。

[例八] k 为何值时，$x^2-y^2+3x-7y+k$ 可以分解成两个一次因式？

解：设 $x^2-y^2+3x-7y+k=x^2+3x-(y^2+7y-k)=0$，

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+4(y^2+7y-k)}}{2}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{4y^2+28y+9-4k}}{2}.$$

原式要分解成两个一次因式，必须 $4y^2+28y+9-4k$ 是完全平方式，

$$4y^2+28y+9-4k$$

$$=4\left[y^2+7y+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{9-4k}{4}\right]$$

$$=4\left[\left(y+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{-49+9-4k}{4}\right]$$

$$=4\left[\left(y+\frac{7}{2}\right)^2-k-10\right].$$

当 $-k-10=0$ 时为完全平方式，即 $k=-10$ 原式可分解成两个一次因式。本题也可以用待定系数法，设原式 $=(x+y+m)\cdot(x-y+l)$，先求出 m、l 的值再求出 k。

四、应用除法分解因式

如果多项式 $f(x)$ 能被多项式 $\phi(x)$ 整除，并且存在第三多项式 $g(x)$，能使恒等式 $f(x)=\phi(x)\cdot g(x)$ 成立，则 $\phi(x)$、

$g(x)$叫做 $f(x)$的因子。设有理系数多项式

$$f(x)=\frac{1}{a}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n),$$

这里 a、a_0、a_1、a_2、$\cdots\cdots$、a_{n-1}、a_n 都是整数($a\neq0$)，若 $f(x)$有一次因式$\left(x-\dfrac{p}{q}\right)$,其中 p、q 是整数，那么 p 一定是 a_n 的约数，q 一定是 a_0 的约数。如果要使多项式 $f(x)$能被 $x-a$ 整除，必须并且只须 $f(a)=0$。解题时，如多项式有一次因式，可应用综合除法或一般除法。某些有高于一次的因式或特殊的多项式的因式分解，可考虑应用一般除法。

［例九］　将多项式 $f(x)=x^5+6x^4+13x^3+14x^2+12x+8$ 分解因式。

解：用 ±1、±2、±4、±8 来试验，知道 $f(x)$ 有一个根 $x=-2$。以 $x+2$ 除，得

$$f(x)=(x+2)(x^4+4x^3+5x^2+4x+4)。$$

经过试验知第二因式有一个根 $x=-2$，以 $x+2$ 除，得

$$x^3+2x^2+x+2=(x+2)(x^2+1)。$$

所以最后有

$$x^5+6x^4+13x^3+14x^2+12x+8=(x+2)^3(x^2+1)。$$

［例十］　把下列各式分解因式：

(1) a^5-b^5;　　(2) $32x^{15}+y^{15}$。

解：当 n 为正整数时，(i)a^n-b^n 能被 $a-b$ 整除；(ii)当 n 为偶数时，a^n-b^n 能被 $a-b$ 及 $a+b$ 整除；(iii)a^n+b^n 决不能被 $a-b$ 整除；(iv)当 n 为奇数时，a^n+b^n 能被 $a+b$ 整除。

(1) $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$。

(2) $$32x^{15}+y^{15}=(2x^3+y^3)[(2x^3)^4-(2x^3)^3y^3+(2x^3)^2(y^3)^2-(2x^3)(y^3)^3+(y^3)^4]$$

$$= (2x^3+y^3)(16x^{12}-8x^9y^3 + 4x^6y^6-2x^3y^9+y^{12})。$$

[例十一] 把 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 因式分解。

解：$a^3+b^3+c^3-3abc=a(a^2-3bc)+b^3+c^3$，

令 $a=-(b+c)$ 代入原式为零，所以 $a+b+c$ 是它的一个因式，应用一般除法得

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)。$$

在分解因式时还要特别注意到因式分解的范围。多项式的因式分解，根据数的范围有三种情况：1.在有理数范围内；2.在实数范围内；3.在复数范围内。如无特殊说明，一般指的是在有理数的范围内，而且分解的因式必须是整式。而在因式分解时，应分解到每一个因式不能再分解为止，即把一个多项式分解成几个既约的多项式的乘积。

[例十二] 分别在有理数、实数范围内分解因式：

(1) x^4-4；

(2) $3x^4-5x^3+3x^2+4x-2$。

解：(1) 在有理数范围内，$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2)$。

在实数范围内，

$$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2)=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})。$$

(2) 在有理数范围内，

$$原式=3x^2(x^2-2x+2)+x(x^2-2x+2)-(x^2-2x+2)$$
$$=(x^2-2x+2)(3x^2+x-1)。$$

在实数范围内，

$$原式=3(x^2-2x+2)\left(x+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x+\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}\right)。$$

下面再举两个例子，说明因式分解的应用。

[例十三]　计算$\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2+4ab+3b^2}\div\dfrac{a^3-b^3}{a^2-9b^2}$。

解：原式$=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2+4ab+3b^2}\times\dfrac{a^2-9b^2}{a^3-b^3}$

$$=\frac{(a-b)^2}{(a+b)(a+3b)}\times\frac{(a+3b)(a-3b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$$=\frac{(a-b)^2(a-3b)(a+3b)}{(a+b)(a+3b)(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$$=\frac{(a-b)(a-3b)}{(a+b)(a^2+ab+b^2)}。$$

[例十四]　解方程 $x^4-x^3-5x^2-7x+12=0$。

解：$x^4-x^3-5x^2-7x+12=0$，

$x^3(x-1)-5x(x-1)-12(x-1)=0$，

$(x-1)(x^3-5x-12)=0$，

$(x-1)(x^3-3x^2+3x^2-9x+4x-12)=0$，

$(x-1)[x^2(x-3)+3x(x-3)+4(x-3)]=0$，

$(x-1)(x-3)(x^2+3x+4)=0$。

$\because x^2+3x+4=0$ 无实数根，

$\therefore$原方程的根为 $x_1=1, x_2=3$。

练　习　一

一、下列不可以用提公因式法分解因式的只有(　　)。

1. $4x^2-1$；　2. $2(a+b)^2-4(a^2-b^2)+3(b-a)$；

3. $8a^3-4a^2+2a-1$；　4. $15x^3-5x^2-20$；

5. $-xy+y^2$；　6. $4a(x-y)^2-2b(y-x)$。

二、下列在有理数范围内不能分解因式的有(　　)。

1. x^2+1；　2. a^2-3b^3；　3. x^2+x+1；

4. $2x^2+x-3$；　5. a^4-a；　6. $ax+b-a-bx$。

三、判断下列各式分解因式的结果是否有误，正确的在括号内画“✓”，错误的画“×”。

1. $b^2x^2-2b^2xy+b^2y^2=(bx-by)^2$。( )

2. $4(a-b)^2-4(b-a)+1=(2a-2b+1)$。( )

3. $x^4+x^3+x+1=x^3(x+1)+(x+1)$

$=(x+1)(x^3+1)=(x+1)^2(x^2+x+1)$。( )

4. $a^2-4-b^2=(a+2+b)(a-2-b)$。( )

5. $a^2-b^2+2b-1=a^2-(b-1)^2$

$=(a+b-1)(a-b-1)$。( )

6. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$。( )

四、把下列各式分解因式：

1. $3a(x+y)-4b(y+x)$。

2. $6a(x-1)^3-8a(1-x)^2$。

3. $5(x+y)(a-b+c)+3(x-y)(b-a-c)$。

4. $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(b+c)+ab(c-a)$。

5. $12a^{2n+1}-32a^{2n-1}+24a^{n-1}$。

6. $5a(x-y+z)-2bx+2by-2bz$。

7. $(a+b-c)x+(c-a-b)y+(a+b-c)z$。

8. $(a+b)^2(a-b)^2-(a^2+b^2)(a^2-b^2)$。

9. 证明：(a)两个连续整数的积是2的倍数；(b)任意三个连续整数的积是6的倍数；(c) a为整数，a^3+5a、a^3+11a、a^3-19a都能被6整除。

10. 在六位数 $abcdef$ 中，若 $a=d$，$b=e$，$c=f$，求证这个六位数必能被7、11、13整除。

五、把下列各式分解因式：

1. $(x+y)^3-x^3-y^3+3xy$。

2. m^4+m^3+m+1。

3. $n^6-n^4+2n^3+2n^2$。

4. $(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$。