

现代控制理论

于长官 编



哈尔滨工业大学出版社

现代控制理论

于长富 编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了现代控制理论的基本内容，包括控制系统的状态空间描述、运动分析、稳定性分析、能控性与能观测性、控制系统的常规综合、最优综合、卡尔曼滤波理论及系统辨识与自适应控制。每章配有一定例题，并附有给出答案的习题。

本书可作为非自动控制专业的研究生教材，也可供自动控制专业师生及有关科技人员参考。

现代控制理论

于长官 编

哈尔滨工业大学出版社出版
新华书店首都发行所发行
哈尔滨船舶工程学院印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张21.5 字数490 000

1988年6月第1版 1988年6月第1次印刷

印数1—3000

ISBN 7-5603-0077-4/TP·8 定价 3.90 元

前 言

自动控制技术已经广泛地应用于工农业生产、交通运输与国民经济的各个部门。从60年代迅速发展起来的现代控制理论,解决了宇宙航行、导弹制导等领域中的一些高精度控制问题。在计算机应用空前发展的今天,现代控制理论及其应用正越来越为人们所重视。

本书以单输入-单输出线性系统为背景,重点介绍现代控制理论的基本问题。第一章介绍线性控制系统的数学模型的建立;第二章介绍线性控制系统的运动分析;第三章介绍控制系统的稳定性问题,即李亚普诺夫第二法;第四章介绍线性系统的能控能观测问题;第五章介绍线性定常系统的一般综合;第六章介绍最优控制的基本理论;第七章简要介绍卡尔曼滤波的基本理论;第八章介绍系统辨识与自适应控制的基本问题。

考虑读者自学方便,本书在内容上紧密结合经典控制理论的基本概念和方法,在叙述上力求保持前后呼应,由浅入深,突出设计思想、基本概念、应用条件。

本书由哈尔滨工业大学李友善教授等审阅。在编写过程中得到了曾月明等很多同志的支持和帮助,在此深表感谢。

由于编者水平有限,书中不妥之处在所难免,恳望读者批评指正。

编 者

一九八八年一月

目 录

绪论	(1)
----	-------

第一章 线性控制系统的状态空间描述

§ 1-1 状态空间表达式	(4)
§ 1-2 将系统的一般时域描述化为状态空间表达式	(10)
§ 1-3 根据传递函数及状态变量图列写线性系统的状态空间表达式	(13)
§ 1-4 根据系统的方块图导出状态空间表达式	(20)
§ 1-5 将系统的频域描述化为状态方程的规范形式	(22)
§ 1-6 将状态方程化为规范形式	(27)
§ 1-7 离散系统的状态空间表达式	(36)
§ 1-8 将状态空间描述化为输入输出频域描述	(40)
习 题	(43)

第二章 线性控制系统运动分析

§ 2-1 线性定常系统的自由运动	(50)
§ 2-2 矩阵指数 $e^{A(t-t_0)}$ (或 e^{At}) 的计算方法	(52)
§ 2-3 线性定常系统的受控运动	(56)
§ 2-4 线性时变系统状态方程的解法	(59)
§ 2-5 用计算机求解状态方程	(65)
§ 2-6 离散时间系统状态方程求解	(69)
§ 2-7 线性连续系统的离散化	(73)
习 题	(81)

第三章 控制系统的稳定性分析

(李亚普诺夫第二法)

§ 3-1 李亚普诺夫第二法的概述	(86)
§ 3-2 李亚普诺夫意义下的稳定性	(88)
§ 3-3 李亚普诺夫稳定性定理	(90)
§ 3-4 线性系统的李亚普诺夫稳定性分析	(92)
§ 3-5 非线性系统的李亚普诺夫稳定性分析	(99)
习 题	(108)

第四章 线性系统的能控性与能观测性

§ 4-1 能控性和能观测性的概念	(111)
§ 4-2 线性定常系统的能控性判据	(113)
§ 4-3 线性定常系统的能观测性判据	(121)
§ 4-4 线性时变系统的能控性与能观测性判据	(126)

§ 4-5 能控性、能观测性和传递函数矩阵	(132)
§ 4-6 能控规范型和能观测规范型	(139)
§ 4-7 系统的能控性与能观测性的对偶原理	(146)
习 题	(147)
第五章 线性定常控制系统的综合	
§ 5-1 状态反馈和输出反馈	(153)
§ 5-2 单输入-单输出状态反馈系统的极点配置法	(155)
§ 5-3 状态重构问题的提出及解决途径	(162)
§ 5-4 观测器的极点配置问题	(166)
习 题	(171)
第六章 系统最优控制	
§ 6-1 最优控制的基本概念	(173)
§ 6-2 无约束最优控制的变分方法	(175)
§ 6-3 二次型性能指标的最优控制	(180)
§ 6-4 线性调节器问题	(181)
§ 6-5 线性伺服器问题	(189)
§ 6-6 受约束最优控制的极小值原理	(194)
§ 6-7 最小时间系统的控制问题	(196)
§ 6-8 极小值原理在离散最优控制系统中的应用	(205)
§ 6-9 最优控制中的梯度法	(209)
§ 6-10 动态规划法	(215)
§ 6-11 动态规划的连续形式	(220)
§ 6-12 综合举例——最优伺服系统综合	(224)
习 题	(229)
第七章 卡尔曼滤波理论	
§ 7-1 线性估计问题概述	(233)
§ 7-2 随机变量与随机过程	(235)
§ 7-3 最小二乘估计	(243)
§ 7-4 线性最小方差估计	(250)
§ 7-5 随机线性系统的数学描述	(253)
§ 7-6 卡尔曼滤波的基本思想	(258)
§ 7-7 离散系统的卡尔曼滤波	(260)
§ 7-8 离散卡尔曼滤波的推广	(269)
§ 7-9 有色噪声情况下线性系统的滤波	(274)
§ 7-10 连续时间系统的卡尔曼滤波	(277)
§ 7-11 卡尔曼滤波器实际应用的问题	(285)
§ 7-12 随机线性系统的最优控制	(293)
习 题	(295)

第八章 系统辨识与自适应控制系统

§ 8-1 系统辨识的概述.....	(298)
§ 8-2 累积辨识原理.....	(299)
§ 8-3 相关辨识原理.....	(301)
§ 8-4 基于卡尔曼滤波的参量嵌入辨识技术.....	(308)
§ 8-5 辨识的一般过程.....	(309)
§ 8-6 自适应控制系统概述.....	(316)
§ 8-7 输入自适应控制系统.....	(318)
§ 8-8 参考模型自适应控制系统.....	(319)
§ 8-9 综合举例——直流他激电动机参数在线辨识与自适应控制.....	(327)
§ 8-10 学习控制与人机系统.....	(331)
参考文献.....	(334)

绪 论

现代科学技术的迅速发展对自动控制的程度、精度、速度、范围及其适应能力的要求越来越高,从而推动了自动控制理论和技术的迅速发展。特别是60年代以来,电子计算机技术的迅速发展奠定了自动控制理论和技术的物质基础,于是逐步形成了一门现代科学分支,即现代控制理论。

一、控制理论发展的三个阶段

为了说明现代控制理论在整个控制理论中的地位,我们把控制理论的发展化为不同阶段。这种阶段性的发展过程是由简单到复杂,由量变到质变的辩证发展过程。

经典控制理论多半是用来解决单输入-单输出的问题,所涉及的系统一般来说是线性定常系统,非线性系统中的相平面法也只含两个变量。常接触到的系统,如机床和轧钢机中常用的调速系统,发电机的自动电压调节系统以及冶炼炉的温度自动控制系统等等。这些系统均被当作单输入-单输出的线性定常系统来处理。如果把某个干扰考虑在内,也只是将它们进行线性迭加而已。解决上述问题时,采用频率法、根轨迹法、奈氏稳定判据、期望对数频率特性综合等是比较方便的,这些方法均属于通常所说的古典控制论范畴,所得结果在对精确度、准确度要求不是极高的情况下是完全可用的。总之,经典控制论是与生产过程的局部自动化相适应的,它具有明显的依靠手工进行分析和综合的特点,这个特点是和40~50年代生产发展的状况,以及电子计算机技术的发展水平尚处于初期阶段密切相关的。

现代控制理论主要用来解决多输入-多输出系统的问题,系统可以是线性或非线性的、定常或时变的。例如对加工机械有了更高的要求,反映在磨床上,只靠恒速或恒转速,即使加上砂轮自动补偿也是不够的。因为磨床在磨削过程中,砂轮质量是不断变化的,砂轮的半径越来越小,切线速度处在变动中,如果保持恒转速,磨削效率就会越来越低。为了提高效率,可以使转速提高,但在恒功率条件下,这样作的结果必然导致转速减小,因此需要调速。但这种调速与通常的调速含义不同,而且由于考虑了另一个变量(砂轮),所以系统已是一个时变系统。显然,其他加工机械都有类似情况,在较精密的加工机械的使用中,有的控制变量多达七个,而古典法显然对此无能为力。因此,不仅在航天飞行器、导弹、火炮的控制方面需要现代控制理论,而且随着工业生产对产品的质量和产量要求的提高,现代控制理论也日渐为人们所关注。现代控制理论研究方法在本质上是一种时域方法,即所谓状态空间法;它的分析和综合目标是要揭示系统的内在规律,实现系统在一定意义下的最佳化;它的构成具有更高的仿生特点,即不仅限于单纯的闭环,而且可扩展为适应环、学习环等。总之,现代控制理论的出现,是60年代人类探索空间的需要和电子计算机的飞速发展和普及的产物。

大系统理论和智能控制理论的出现是70年代后控制理论向广度和深度发展的新阶段。

所谓大系统,是指规模庞大、结构复杂、变量众多的信息与控制系统,它涉及生产过程、交通运输、生物控制、计划管理、环境保护、空间技术等多方面的控制和信息处理问题。而智能控制系统是具有某些仿人智能的工程控制与信息处理系统,其中最典型的就是智能机器人。

二、现代控制理论与经典控制理论的比较

1. 适用对象

一般来说,经典控制理论只是对单输入-单输出线性定常系统的分析与综合是有效的。现代控制理论则可适用于线性和非线性、定常和时变、单变量和多变量、连续和离散系统。现代控制理论适用领域的扩大,使它成为更有普遍性的理论。

2. 采用的数学工具

由于经典控制理论主要限于处理单变量的线性定常问题,反映到数学上就是单变量的常系数微分方程问题,因此拉氏变换就成了它的主要数学工具,数学模型是传递函数。现代控制理论要处理多变量问题,因此矩阵和向量空间理论是它的主要数学基础。

3. 研究方法

经典控制理论是一种频域方法,它以系统的输出输入特性作为研究的依据,而现代控制理论的本质是一种时域方法,它是建立在状态变量描述方法基础上的。因此,经典控制理论着眼于系统的输出,而现代控制理论则着眼于系统的状态,它能更完全地表达系统的动力学性质。

4. 分析与综合的差别

经典控制理论是在给定一类特定的输入情况下,分析输出的响应。在综合问题上,是根据给定的某种指标来设计系统的校正网络。总之,经典控制理论着眼于系统外部联系。而现代控制理论则主要揭示系统对控制和初始状态的依赖关系,指出其可能影响的性质和程度。揭示系统在一定的指标提法和其它限制条件下可能达到的最佳状态,即最优控制。

5. 控制器的实现

经典控制理论的控制器即校正装置,是由能实现典型控制规律的调节器构成的,简单的就是 RC 无源网络。而现代控制理论的控制器则是能实现任意控制规律的数字机。

6. 基本内容与主要问题

经典控制理论的基本内容有时域法、频率法、根轨迹法、描述函数法、相平面法、代数与几何稳定判据、校正网络设计等,研究的主要问题是稳定性问题。现代控制理论的基本内容有系统辨识、最优控制问题、最佳滤波问题等,研究的主要问题是优化问题。

三、现代控制理论的基本内容

现代控制理论是对系统的状态进行分析和综合的理论。

系统辨识:要研究系统的状态,首先要建立系统在状态空间中的数学模型,由于系统比较复杂,所以往往不能通过解析的方法直接建立其数学模型,而主要是通过试验或运行的数据来估计出控制对象的数学模型及参数,这就是系统辨识问题。

最优控制问题:简单地说,就是在给定限制条件和评价函数下,寻找使系统性能指标最佳的控制规律问题。这里的限制条件即约束条件,就是物理上对系统所施加的一些限

制；评价函数即性能指标，它是为评价系统的优劣所规定的标准，也称为目标函数，要寻求的控制规律也就是综合控制器。在解决最优控制问题中，庞德亚金（Понтрагин）的极大值原理和贝尔曼（Bellman）的动态规划是最重要的两种方法。

最佳滤波或称最佳估计：当系统中有随机干扰时，其综合就必须同时应用概率和统计的方法来进行，即在系统数学模型已经建立的基础上，通过对系统输入输出数据的测量，利用统计方法对系统的状态进行估计。古典的维纳（Wiener）滤波理论阐述的是对平稳随机过程按均方意义的最佳滤波。而现代的卡尔曼（Kalman）滤波理论克服了维纳滤波理论的局限性，在很多领域中得到广泛应用。卡尔曼滤波理论的提出，奠定了现代控制理论的基础。

现代控制理论的出现，是人类探索空间的客观需要。随着社会的发展与科学技术的进步，控制理论将不断完善。具体来说，状态与状态空间概念和方法的引入，在现代控制理论中起了很重要的作用，如果说经典控制理论是研究控制系统输出的分析与综合的理论，那么可以说，现代控制理论是研究控制系统状态的分析与综合的理论。

第一章 线性控制系统的状态空间描述

现代控制理论是在引入状态和状态空间概念的基础上发展起来的。因此，确定控制系统的状态空间描述，即建立在状态空间中的数学模型是一个基本问题，也是现代控制理论中分析和综合控制系统的前提，其重要性就象经典控制理论中确定系统的传递函数一样。

§1-1 状态空间表达式

一、状态和状态空间

状态和状态空间并不是新概念，长期以来它就在质点和刚体的古典力学中得到广泛应用。在经典控制理论中，分析非线性系统所采用的相平面法就是一个特殊的二维状态空间。

例1-1 设有如1-1所示的R-L-C网络， u 为输入变量， u_c 为输出变量。试求其数学描述。

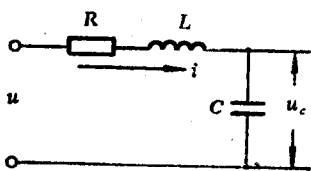


图1-1 R-L-C网络

解：可得到三种形式的数学描述。
列方程

$$\begin{aligned} C \frac{du_c}{dt} &= i \\ L \frac{di}{dt} + Ri + u_c &= u \end{aligned} \quad (1-1)$$

消去中间量

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u \quad (1-2)$$

用传递函数形式表示

$$\frac{U_c(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (1-3)$$

式(1-1)、(1-2)、(1-3)均可表示系统的状态。分析式(1-1)，可用它的两个一阶微分方程组表示

$$\begin{cases} \dot{u}_c = \frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} i \\ \dot{i} = \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L} u_c - \frac{R}{L} i + \frac{1}{L} u \end{cases}$$

用向量矩阵方程表示

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} [u]$$

在此R-L-C网络中,若已知电流的初值 $i(t_0)$ 、电压的初值 $u_C(t_0)$ 以及 $t \geq t_0$ 时的输入电压 $u(t)$,则 $t \geq t_0$ 时的状态可完全确定,因此 $i(t)$ 、 $u_C(t)$ 是这个系统的一组状态变量。

综上所述,可建立如下基本概念:

状态: 动力学系统的状态是指能完整地、确定地描述系统的时域行为的最小一组变量。如果给定了 $t = t_0$ 时刻这组变量的值和 $t \geq t_0$ 时输入的时间函数,那么系统在 $t \geq t_0$ 的任何瞬时的行为就完全确定了,这样的一组变量称为状态变量。

状态向量: 以状态变量为元所组成的向量,称为状态向量。如 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dots$, $x_n(t)$ 是系统的一组状态变量,则状态向量就是以这组状态变量为分量的向量,即

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ 或 } X^T(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$$

状态空间: 以状态变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为坐标轴组成的 n 维正交空间称为状态空间。状态空间中的每一点都代表了状态变量的唯一的、特定的一组值。

二、被控过程的状态空间描述

在引入了状态和状态空间概念的基础上,建立被控过程在状态空间中的数学模型。

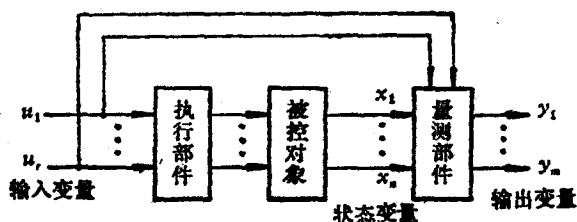


图1-2 被控过程的动力学描述

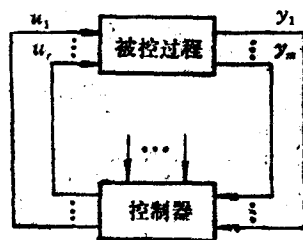


图1-3 控制系统方块图

从动力学观点来看,一个基于反馈建立起来的控制系统由被控过程和控制器两部分组成。被控过程由执行机构、被控对象、量测机构组成,一般情况下,控制器是一台电子计算机。

由例1-1 很容易得知,列写状态方程就是把一个高阶微分方程化为所确定的状态变量相应的一阶微分方程组,然后用向量矩阵形式表示。下面将按上述步骤举例列写状态方程,进而得出被控过程状态空间描述的形式与规律。

例1-2 R-L-C网络如图1-4所示。其中 $e(t)$ 为输入变量, $u_{R2}(t)$ 为输出变量,试求其状态空间描述。

解: (1) 确定状态变量。

此网络 u_C 和 i_L 可构成最小变量组, 当给定 u_C 和 i_L 的初始值和 $e(t)$ 后, 网络各部分的电流、电压在 $t \geq 0$ 的过度过程就完全确定了。所以可以选择 u_C 和 i_L 作为状态变量, 它们组成的状态向量为 $X^T = [u_C \ i_L]^T$

(2) 列写网络方程并化为一阶微分方程组

取两个回路, 根据克希霍夫定律可得

$$\begin{cases} R_1 \cdot (i_L + i_C) + L \frac{di_L}{dt} = e(t) & (1-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 \cdot (i_L + i_C) + u_C + R_2 i_C = e(t) & (1-5) \end{cases}$$

因为 i_C 不是所确定的状态变量, 所以得将 $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ 代入式(1-4)、(1-5)中, 消去 i_C ,

$$\begin{cases} R_1 i_L + R_1 C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di_L}{dt} = e(t) & (1-6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 i_L + R_1 C \frac{du_C}{dt} + u_C + R_2 \cdot C \frac{du_C}{dt} = e(t) & (1-7) \end{cases}$$

由(1-7)式可得

$$(R_1 + R_2) C \cdot \frac{du_C}{dt} = -u_C - R_1 i_L + e(t)$$

即

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} u_C - \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} i_L + \frac{1}{C(R_1 + R_2)} e(t) \quad (1-8)$$

由(1-6)式可得

$$L \frac{di_L}{dt} = -R_1 C \frac{du_C}{dt} - R_1 i_L + e(t)$$

将(1-8)式代入上式可得

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= -R_1 C \left\{ -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} u_C - \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} i_L \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \cdot e(t) \right\} - R_1 i_L + e(t) \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_C + \frac{R_1^2}{R_1 + R_2} i_L - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e(t) - \frac{(R_1^2 + R_1 \cdot R_2)}{R_1 + R_2} i_L \\ &\quad + \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2} \cdot e(t) \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_C - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t) \end{aligned}$$

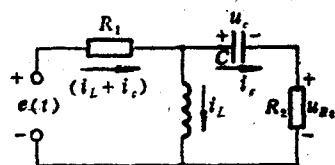


图1-4 R-L-C网络

即

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} u_C - \frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} e(t) \quad (1-9)$$

(3) 状态空间描述

将式(1-8)、(1-9)用向量矩阵形式表示

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{pmatrix} [e(t)] \quad (1-10)$$

输出 (或量测) 方程为

$$\begin{aligned} u_{R_2} &= R_2 i_C = R_2 C \frac{du_C}{dt} \\ &= -\frac{R_2}{R_1 + R_2} u_C - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t) \end{aligned}$$

即

$$[u_{R_2}] = \begin{pmatrix} -\frac{R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) [e(t)] \quad (1-11)$$

式(1-10)、(1-11)即为系统的状态方程与输出 (或量测) 方程, 它们构成了被控过程的状态空间描述。

令

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} -\frac{R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

令状态向量

$$X = \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{pmatrix}$$

输入向量 $u = e(t)$, 输出向量 $y = u_{R_2}$

因此状态空间描述可表示为

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu & \text{—— 状态方程} \\ y = CX + Du & \text{—— 输出方程 (或量测方程)} \end{cases}$$

这就是 n 维线性定常系统的状态空间描述。系数矩阵 A 为 $n \times n$ 矩阵，输入系数矩阵 B 为 $u \times r$ 矩阵，输出系数矩阵 C 为 $m \times n$ 矩阵，系数矩阵 D 为 $m \times r$ 矩阵，它们对应的状态向量 X 为 n 维，输入向量 u 为 r 维，输出向量 y 为 m 维。

对于线性时变系统，系数矩阵 A 、 B 、 C 、 D 均与时间 t 有关，所以状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X + B(t)u \\ y = C(t)X + D(t)u \end{cases}$$

从以上结果不难看出，状态空间描述具有代表性。

用方块图表示

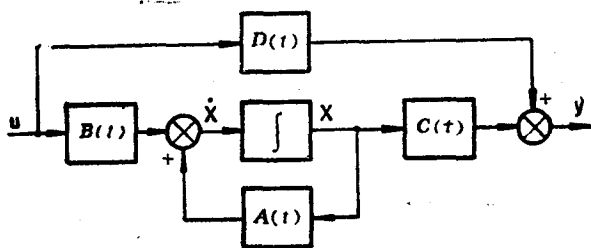


图1-5 线性系统方块图

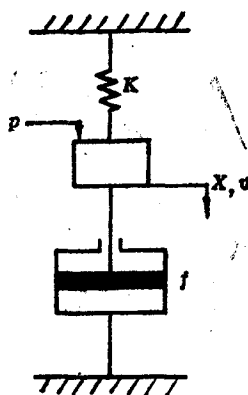


图1-6 简单力学系统

例1-3 一简单力学系统如图1-6所示。其中外作用力为 P ，输出位移为 X ，试求其状态空间描述。

解 (1) 确定状态变量

在此简单力学系统中，位移 X 和速度 v 是两个独立的变量，故选它们为状态变量。

(2) 列写一阶方程组

由牛顿定律得

$$\begin{cases} m \cdot \frac{dv}{dt} + fv + KX = P \\ v = \frac{dX}{dt} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -\frac{f}{m}v - \frac{K}{m}X + \frac{1}{m}P \\ \frac{dX}{dt} = v \end{cases}$$

(3) 状态空间描述

状态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f}{m} & -\frac{K}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix} P$$

输出方程为

$$y = X$$

即

$$[y] = [0 \ 1] \begin{bmatrix} v \\ X \end{bmatrix}$$

例1-4 考察图1-7中的枢控直流电动机，试求其状态空间描述。

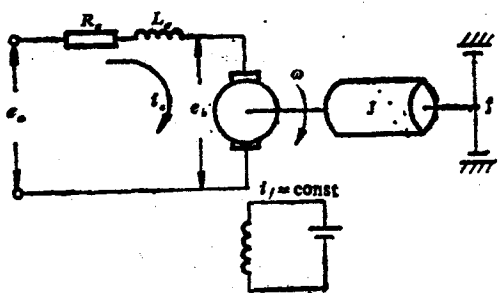


图1-7 枢控直流电动机

解 (1) 确定状态变量

确定电枢电流 i_a 和转速 ω ，理由同上。

(2) 列写一阶方程组

由物理规律可得

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a \quad (\text{电枢回路微分方程})$$

$$J \frac{d\omega}{dt} + f\omega = K_a i_a \quad (\text{力学回路微分方程})$$

$$e_b = K_b \omega \quad (\text{电磁感应关系式})$$

整理得

$$\begin{cases} \frac{di_a}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{K_b}{L_a} \omega + \frac{1}{L_a} e_a \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{K_a}{J} i_a - \frac{f}{J} \omega \end{cases}$$

(3) 状态方程

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ \frac{K_a}{J} & -\frac{f}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{pmatrix} e_a$$

三、系统状态空间描述问题的讨论

通过以上对状态空间描述的初步认识，可总结出如下几点：

(1) 状态空间描述考虑了“输入—状态—输出”这一过程，其中它考虑了被经典控制理论的输入—输出描述所忽略的状态，因此它揭示了问题的本质，即 输入引起状态的变化，而状态决定了输出。

(2) 输入引起的状态变化是一个运动过程，数学上表现为向量微分方程，即 状态方程。状态决定输出是一个变换过程，数学上表现为变换方程，即代数方程。

(3) 系统的状态变量个数仅等于系统包含的独立贮能元件的个数（即物理解释），因此一个 n 阶系统仅有 n 个状态变量可以选择（变量之间最大线性无关组即最小变量组）。

(4) 对于给定的系统，状态变量的选择不是唯一的。如果是系统的一个状态向量，只

要矩阵 P 是非奇异的, 那么 $\hat{X} = P^{-1} X$ 也是一个状态向量。

(5) 一般来说, 状态变量不一定是物理上可测量或可观察的量, 但从便于控制系统的构成来说, 把状态变量选为可测量或可观察的量更为合适。

(6) 对于结构和参数已知的系统, 建立状态方程的步骤是: 首先选择状态变量, 其次根据物理或其它方面的机理或定律列写微分方程, 并将其化为状态变量的一阶微分方程组, 最后将一阶微分方程组化为向量矩阵形式即得状态空间描述。对于结构和参数未知的系统, 通常只能通过辨识的途径建立状态方程。

(7) 系统的状态空间分析法是时域内的一种矩阵运算方法, 特别适合于用电子计算机来计算, 有利于把工程技术人员从繁琐的计算中解脱出来, 使他们在控制系统的分析与综合中从事更富有创造性的工作。

(8) 状态空间法可用于求解大量的非线性系统、时变系统、随机系统和采样数据系统。

必须指出, 确定最小的状态变量组以及与之对应的状态空间描述的形式、特点、它们之间的联系与转换等问题, 需要进一步分析解决, 下面分节介绍。

§1-2 将系统的一般时域描述化为状态空间表达式

在经典控制理论中, 通常把控制系统的时域模型表征为输出和输入间的一个单变量高阶微分方程, 它具有如下一般形式:

$$\begin{aligned} \ddot{y}^{(n)} + a_1 \dot{y}^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y \\ = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \end{aligned}$$

由§1-1可知, 线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{X} = A X + B u \\ y = C X + D u \end{cases}$$

所以将一般时域描述化为状态空间表达式的关键问题是适当选择系统的状态变量, 并由 $a_i (i = 1, \cdots, n)$ 、 $b_j (j = 0, 1, \cdots, n)$ 定出相应的系数矩阵 A 、 B 、 C 、 D 。下面分两种情况进行讨论。

一、方程中不包含输入函数导数的情况

线性微分方程中的输入函数为 u , 不包含的各阶导数的微分方程形式如下:

$$\ddot{y}^{(n)} + a_1 \dot{y}^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_n u$$

(1) 选择状态变量

一个 n 阶系统, 具有 n 个状态变量, 因为当给定 $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\ddot{y}(0)$, $\cdots$, $y^{(n-1)}(0)$ 和 $t \geq 0$ 的输入 $u(t)$ 时, 系统在 $t \geq 0$ 时的运动状态就完全确定了, 所以可以取 y , $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\cdots$, $y^{(n-1)}$ 为系统的一组状态变量, 令

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \cdots \cdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$