高考数学热点问题解析

GAOKAO SHUXUE

REDIAN WENTI

罗展华
祝本初
著

- 主要知识
- 经典范例
- 题目变化
- 精彩回放
- 巩固消化

今年高考数学热点是什么？
历年高考数学考什么？
高考数学命题有什么规律？

本书将以**全新的视角**、全方位地为你扫描**历年高考的精华**，指点应对今年高考的迷津！

上海教育出版社
SHANGHAI
EDUCATION
PUBLISHING
HOUSE

高考数学

GAOKAO SHUXUE

热点问题

REDIAN WENTI

解析

罗展华
祝本初
著

上海教育出版社
SHANGHAI
EDUCATION
PUBLISHING
HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

高考数学热点问题解析/罗展华,祝本初著. —上海:上海教育出版社,2005.7
ISBN 7-5444-0109-X

Ⅰ.高... Ⅱ.①罗...②祝... Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第077958号

高考数学热点问题解析

罗展华 祝本初 著

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行

易文网:www.ewen.cc

(上海永福路123号 邮编:200031)

各地新华书店经销 昆山市亭林印刷有限责任公司印刷

开本 890×1240 1/16 印张 14.75 插页 1

2005年6月第1版 2005年6月第1次印刷

印数 1-5,000本

ISBN 7-5444-0109-X/G·0090 定价:26.00元

前　　言

人人都希望考上大学！

人人都希望考上重点大学！

人人都希望考上一流的重点大学！

本着这些“希望”，我们编写了这本《高考数学热点问题解析》.

本书按新教材的顺序编排，与教学同步.每章中对热点问题进行阐述，以期引起读者对这些问题的重视.

每一节由以下一些栏目组成：

【主要知识】 让读者明白本节所涉及到的主要知识.

【经典范例】 由“题目、分析、解答、点拨”等部分组成，供同学们研读之用.其中的“点拨”主要给出解决这类问题的一般方法、注意事项等，请同学们领悟其实质，掌握其方法.

【题目变化】 通过题目的变化，发展读者的思维，使读者明白“万变不离其宗”的道理.

【精彩回放】 通过对高考试题的回顾，看看以前是怎么考的，再现精彩的解法.

【巩固消化】 通过这些题目的训练，使同学们的基础知识更扎实，基本方法更巩固，基本要求更明确.

理想与实际可能还有一定的距离，但我们已经尽力；由于书中仍有许多不足，我们仍需努力，恳请各位在使用后能将不足之处及时告诉我们，以便改进！

编　者

2005年5月30日

目 录

高一上册

高一下册

高二上册

高二下册

高三(选修)

综合篇

高　一　上　册

问题1　怎样判断命题的真假?

【主要知识】想一想，主要知识梳理清

1. 判断复合命题的真假，常分三步：先确定复合命题的构成形式，再指出其中简单命题的真假，最后由真值表得出复合命题的真假.

2. 判断一个"若 p 则 q"形式的复合命题的真假，不能用真值表时，可用下列方法：若"$p\Rightarrow q$"，则"若 p 则 q"为真；而要确定"若 p 则 q"为假，只需举出一个反例说明即可.

3. 判断逆命题、否命题、逆否命题的真假，有时可利用原命题与逆否命题同真同假，逆命题与否命题同真同假这一关系进行转化判断.

【经典范例】听一听，名师怎样讲范例

例1　"实数的平方是正数或0"是　(　　)

A. p 或 q 形式的命题，是真命题.

B. p 且 q 形式的命题，是真命题.

C. p 或 q 形式的命题，是假命题.

D. 不是复合命题，但是真命题.

解　这里 p 是"实数的平方是正数"，由于实数的平方不一定是正数，由命题的概念可知，p 不是命题(因不能判断 p 的真假)，同理 q(实数的平方是0)也不是命题，因此，本题这样的"p 或 q"组成的不是复合命题，但题干显然是真命题，故选D.

点拨　1. 应透彻理解"命题"、"复合命题"的概念，并非含"或"的语句一定是"p 或 q"形式的复合命题，当然更不能盲目用"p 或 q"的真值表判断命题的真假.

2. 若将题干换成"正数或0的平方根是实数"，这才是"p 或 q"形式的复合命题，这时才能用真值表判断其真假.

例2　已知两个命题 p：方程 $x^2-2x+1=0$ 的两根都是实数，q：方程 $x^2-2x+1=0$ 的两根不等. 试写出由 p、q 构成的"p 或 q"、"p 且 q"、"非 p"形式的复合命题，并判断其真假.

分析　先写出复合命题的三种形式，再确定 p、q 及非 p 的真假，最后由真值表判断三种形式命题的真假.

解　p 或 q：方程 $x^2-2x+1=0$ 的两根都是实数或不相等.

p 且 q：方程 $x^2-2x+1=0$ 的两根都是实数且不相等.

非 p：方程 $x^2-2x+1=0$ 的两根不都是实数.

因 p 真 q 假，故"p 或 q"为真，"p 且 q"为假，"非 p"为假.

点拨　1. 判断含有"或"、"且"、"非"的复合命题的真假，首先要明确 p、q 及非 p 的真假，然后由真值表判断复合命题的真假.

2. 注意"非 p"的正确写法，本题不应将"非 p"写成"方程 $x^2-2x+1=0$ 的两根都不是实根"，因为"都是"的反面是"不都是"，而不是"都不是"，要认真区分.

例3　若 p 和 q 都是简单命题，则下列说法是否正确.

① 命题 p 真，则命题"p 且 q"不一定真；

② 命题 p 假，则命题"p 或 q"不一定假；

③ 命题"p 且 q"真，则命题 p 一定真；

④ 命题"p 或 q"假，则命题 p 一定假.

分析　本题需逆用真值表解题.

解　①②③④都正确.

点拨　1. 要认真领会真值表的内涵，掌握其规律性，熟练运用，不可机械记忆和生搬硬套.

2. 由真值表可知：

① "非 p"的真假与 p 的真假相反.

② 若 p、q 至少有一个为真，则"p 或 q"为真；若 p、q 至少有一个为假，则"p 且 q"为假.

③ 若 p、q 均真，则"p 且 q"、"p 或 q"均真；若 p、q 均假，则"p 且 q"、"p 或 q"均假.

例4　将命题"正数 a 的平方大于零"改写成"若 p 则 q"的形式，并写出它的逆命题、否命题、逆否命题，再判断各命题的真假.

分析　解答本题的关键一是会正确"改写"；二是会正确"否定".

解　方法1　原命题可写成：若 a 是正数，则 a 的平方大于零.

逆命题：若 a 的平方大于零，则 a 是正数.

否命题：若 a 不是正数，则 a 的平方不大于零.

逆否命题：若 a 的平方不大于零，则 a 不是正数.

原命题、逆否命题为真，否命题、逆命题为假.

方法2　原命题可写成：若一个数是正数 a 的平方，则这个数大于零.

逆命题：若一个数大于零，则这个数是正数 a 的平方.

否命题：若一个数不是正数 a 的平方，则这个数

不大于零.

逆否命题:若一个数不大于零,则这个数不是正数 a 的平方.

原命题、逆否命题为真,否命题、逆命题为假.

点拨　1. 要注意分清原命题中的条件 p 与结论 q,正确改写.

2. 要学会否定,不可误认为正数的反面就是负数,大于的反面就是小于.

3. "若 q 则 p"形式的命题也是一种复合命题,但其中的 p、q 不一定是命题.

4. 当一个命题的真假不易判断时,往往可以转化为判断原命题的逆否命题的真假,因为它们是等价命题.另外,否命题和逆命题也是等价命题.

【题目变化】变一变,形式不同实质同

例5　已知命题 p:方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负实根;命题 q:方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根.若"p 或 q"为真,"p 且 q"为假,求 m 的取值范围.

分析　由"p 或 q"为真,"p 且 q"为假,可以判断两命题 p、q 一真一假.而当 p 为假时,$\neg p$ 为真.

解　p 真,则 $\begin{cases}\Delta=m^2-4>0,\\ -m<0.\end{cases}$ 解得 $m>2$.

q 真,则 $\Delta=[4(m-2)]^2-16<0$,解得 $1<m<3$.

$\because$ "p 或 q"为真,"p 且 q"为假, $\therefore$ p 真 q 假,或 p 假 q 真.

即 $\begin{cases}m>2,\\ m\leqslant 1 \text{ 或 } m\geqslant 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m\leqslant 2,\\ 1<m<3.\end{cases}$ 解得 $m\geqslant 3$ 或 $1<m\leqslant 2$.

变化1　已知命题 p:方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负实根;命题 q:$4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根.若"$\neg p$ 或 $\neg q$"为真,"$\neg p$ 且 $\neg q$"为假,求实数 m 的取值范围.

答案　$m\geqslant 3$ 或 $1<m\leqslant 2$.

变化2　已知命题 p:方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负实根;命题 q:$4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根.若"p 或 q"为真,而"$\neg q$"为真,求实数 m 的取值范围.

答案　$m\geqslant 3$.

【精彩回放】看一看,以前怎么考

例6　(2003·全国卷·19)已知 $c>0$,设 P:函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;Q:不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$.若 P 和 Q 有且仅有一个正确,试求 c 的取值范围.

解　函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减 $\Leftrightarrow 0<c<1$.不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒大于1.

$\because$ $x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c & (x\geqslant 2c),\\ 2c & (x<2c).\end{cases}$

$\therefore$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $2c$.

$\therefore$ 不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow 2c>1\Leftrightarrow c>\frac{1}{2}$.

若 P 真 Q 假,则 $0<c\leqslant\frac{1}{2}$;

若 P 假 Q 真,则 $c\geqslant 1$.

故 c 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

点拨　从 P、Q 为真命题入手,P、Q 为假命题时 c 的取值范围分别为 P、Q 为真命题时在 $\mathbf{R}$ 上的补集.注意最后是求 P 真 Q 假与 P 假 Q 真的 c 的取值范围的并集.

例7　(2004·湖北卷)设 A、B 为两个集合,下列四个命题:

① $A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$,有 $x\notin B$;

② $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$;

③ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$;

④ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 存在 $x\in A$,使得 $x\notin B$.

其中真命题的序号是______(把符合要求的命题序号都填上).

解　对①,设 $A=\{2,3,4\}$,$B=\{3,4,5,6\}$,满足 $A\not\subseteq B$,但 $3\in A$ 且 $3\in B$,排除①;

对②,上例中 $A\cap B=\{3,4\}\neq\varnothing$,排除②;

对③,设 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,3\}$, $\therefore$ $A\not\subseteq B$,但 $A\supseteq B$,排除③.

由子集的定义知④正确.

【巩固消化】练一练,重点题目在里面

1. 若命题"p 或 q"与"p 且 q"都是真命题,那么,以下判断是否正确:

(1) 命题 q 一定是真命题;

(2) 命题 q 不一定是真命题;

(3) 命题 p 不一定是真命题;

(4) 命题 p 与 q 均为真.

2. 写出命题"若 $ab\neq 0$,则 a、b 中至少有一个为0"的逆命题、否命题、逆否命题,并判断其真假.

3. 有下列四个命题:

① "若 $x+y=0$,则 x、y 互为相反数"的逆命题;

② "若 $m>n$,则 $m^2>n^2$"的逆否命题;

③ "若 y 小于或等于 -3,则 y^2-y-6 为正值"的否命题;

④ "若 a^b 是无理数,则 a、b 是无理数"的逆命题.

其中真命题的个数是　(　　)

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

4. 写出下列命题的否定形式及命题的否命题,并分别判断它们的真假.

（1）面积相等的三角形是全等三角形；

（2）有些质数是奇数.

5. 判断下列命题的真假.

（1）当 $a<1$ 时，抛物线 $y=x^2-2x+a$ 与 x 轴存在交点.

（2）若 $a\neq b$，或 $a\neq -b$，则 $a^2\neq b^2$.

【答案点拨】对一对，自己做得对不对

1. 解　逆用真值表可得：①④正确；②③错误.

2. 解　逆命题：若 a、b 中至少有一个为 0，则 $ab\neq 0$；

否命题：若 $ab=0$，则 a、b 都不为 0；

逆否命题：若 a、b 都不为 0，则 $ab=0$；

四种命题均为假命题.

点拨　要掌握一些词语的否定，如“至少有一个”的否定是“一个也没有”，“都是”的否定是“不都是”，“所有”的否定是“某些”.

3. 解　（1）写出逆命题得知为真.

（2）根据原命题为假即知逆否命题也为假，举一反例即可验证，如 $-1>-2$，但 $(-1)^2>(-2)^2$ 不成立. 也可写出逆否命题，再判断真假.

（3）若 $y>-3$，则 $y^2-y-6\leqslant 0$，这是假命题.

（4）写出逆命题，再举一反例说明，如取 $a=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 是无理数，$b=\sqrt{2}$ 是无理数，则 $a^b=[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2=2$ 是有理数，故(4)是假命题. 综上可知，选 B.

4. 解　命题的否定形式是否定结论，命题的否命题是条件和结论都否定.

（1）原命题的否定形式：面积相等的三角形不是全等三角形(假).

原命题的否命题：面积不相等的三角形不是全等三角形(真).

（2）原命题的否定形式：有些质数不是奇数(真).

原命题的否命题：所有的质数不是奇数(假).

5. 解　（1）原命题真.

（2）原命题假.

问题 2　怎样判断条件的充要性？

【主要知识】想一想，主要知识梳理清

1. 区分命题的条件 p 和结论 q 的因果关系有四种情况：充分而不必要条件、必要而不充分条件、充要条件、既不充分也不必要条件. 要认真理解上述条件的意义，弄清它们之间的联系和区别.

2. 判断上述四种条件时，要注意：(1) 分清哪是条件，哪是结论；(2) 分别用条件推结论，用结论推条件，推理方法可用直接法，也可用反证法；(3) 指明条件是结论的哪种条件.

3. 证明条件是充要的，既要证明原命题成立(即充分性 $p\Rightarrow q$)，又要证明它的逆命题成立(即必要性 $q\Rightarrow p$).

4. 充要条件的判定还有转换命题法，利用充要条件的传递性等方法，应灵活运用.

【经典范例】听一听，名师怎样讲范例

例 1　下列各题中，p 是 q 的什么条件？(指充分而不必要、必要而不充分、充要、既不充分也不必要条件)

（1）p：$x^2-4x+3\geqslant 0$，q：$x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant 3$.

（2）p：$x=2$ 或 $x=3$，q：$x-2=\sqrt{x-2}$.

（3）p：在$\triangle ABC$ 中，$\angle A\neq 30^\circ$，q：$\sin A\neq\frac{1}{2}$.

（4）p：$xy>0$，且 $x>y$，q：$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$.

分析　根据相关概念直接判定.

解　（1）p：$x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 3$，　q：$x\in\mathbf{R}$.

$\because$ $p\Rightarrow q$，$q\nRightarrow p$，$\therefore$ p 是 q 的充分而不必要条件.

（2）解方程 $x-2=\sqrt{x-2}$ 得 $x=2$ 或 $x=3$. $\therefore$ p 是 q 的充要条件.

（3）在$\triangle ABC$ 中，$\angle A\neq 30^\circ$，但当$\angle A=150^\circ$时，$\sin A=\frac{1}{2}$，$\therefore$ $p\nRightarrow q$. 又 $q\Rightarrow p$，$\therefore$ p 是 q 的必要而不充分条件.

（4）$p\Rightarrow q$，但 $q\nRightarrow p$，$\therefore$ p 是 q 的充分而不必要条件.

点拨　1. 判断充要条件时，应先对 p、q 进行简化，同时，由 $p\Rightarrow q$，根据概念可知，充分条件和必要条件是相对的.

2. 从命题的角度判断条件的充要性，应先把题目写成命题的形成，再按下列方法判断：

（1）充分而不必要条件：条件 $\Rightarrow$ 结论，反之不然.

（2）必要而不充分条件：结论 $\Rightarrow$ 条件，反之不然.

（3）充要条件：条件 $\Leftrightarrow$ 结论.

（4）既不充分又不必要条件：条件 $\nRightarrow$ 结论，反之亦然.

例2　填空：(用充分而不必要、必要而不充分、充要、既不充分又不必要填空)

(1) 已知 $p:\alpha\neq\frac{\pi}{3}$，$q:\cos\alpha\neq\frac{1}{2}$，则 p 是 q 的____________条件.

(2) 已知非零实数 a、b、c，且 $p:b\neq\sqrt{ac}$，$q:a$、b、c 不成等比数列，则 p 是 q 的____________条件.

(3) 已知 $p:x+y\neq-2$，$q:x$、y 不都是 -1，则 p 是 q 的____________条件.

(4) 已知 $p:\alpha\neq\beta$，$q:\tan\alpha\neq\tan\beta$，则 p 是 q 的____________条件.

分析　由于原命题 $\Leftrightarrow$ 逆否命题，逆命题 $\Leftrightarrow$ 否命题，故判断 p 能否推出 q，等价于判断 $\neg q$ 能否推出 $\neg p$；判断 q 能否推出 p，等价于判断 $\neg p$ 能否推出 $\neg q$.

解　(1) 它的等价命题是：已知 $\neg q:\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\neg p:\alpha=\frac{\pi}{3}$，则 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的____________条件.

易知 $\cos\alpha=\frac{1}{2}\nRightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}$，而 $\alpha=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}$，因此 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的必要不充分条件，从而 p 是 q 的必要不充分条件.

(2) 它的等价命题是：已知非零三数 a、b、c，$\neg q$：a、b、c 成等比数列，$\neg p:b=\sqrt{ac}$，则 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的____________条件.

$\because$ a、b、c 成等比数列，有可能 $b=-\sqrt{ac}$，故 $\neg q\nRightarrow\neg p$，而 $\neg p\Rightarrow\neg q$，故 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的必要不充分条件，从而原命题中 p 是 q 的必要不充分条件.

(3) $p:x+y\neq-2$，$q:x\neq-1$ 或 $y\neq-1$.

$\neg p:x+y=-2$，$\neg q:x=-1$ 且 $y=-1$.

$\because$ $\neg q\Rightarrow\neg p$，但 $\neg p\nRightarrow\neg q$，$\therefore$ $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分而不必要条件，从而 p 是 q 的充分而不必要条件.

(4) $\neg q:\tan\alpha=\tan\beta$，$\neg p:\alpha=\beta$. $\because$ $\tan\frac{\pi}{4}=\tan\frac{5\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}\neq\frac{5\pi}{4}$，$\therefore$ $\neg q\nRightarrow\neg p$. 又当 $\alpha=\beta$，且 α、β 的终边在 y 轴上时，其正切不存在，因此 $\neg p\nRightarrow\neg q$，从而 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的既不充分又不必要条件，故 p 是 q 的既不充分又不必要条件.

点拨　原命题和逆否命题是等价命题，它们同真同假，因此，对于那些带有否定性的命题，可先转换为它的等价命题，再进行判定，这种正难则反的等价转化思想，值得认真领悟和掌握.

例3　M 是 N 的充分不必要条件，N 是 P 的充要条件，Q 是 P 的必要不充分条件，则 Q 是 M 的　　(　　)

A. 充分不必要条件.

B. 必要不充分条件.

C. 充要条件.

D. 既不充分又不必要条件.

解　$\because$ $M\Rightarrow N$，$N\Leftrightarrow P$，$P\Rightarrow Q$，即 $M\Rightarrow N\Leftrightarrow P\Rightarrow Q$，$\therefore$ $M\Rightarrow Q$，$Q\nRightarrow M$，Q 是 M 的必要不充分条件，故选 B.

点拨　对于两个以上的较复杂的连锁命题，可利用传递性、对称性和推理符号判定，画出它们的综合结构图，可降低解题难度，显得直观快捷.

例4　设全集为 U，在下列条件中，哪些是 $B\subseteq A$ 的充要条件？

(1) $A\cup B=A$；　(2) $\complement_U A\cap B=\varnothing$；

(3) $\complement_U A\subseteq\complement_U B$；　(4) $A\cup\complement_U B=U$.

解　作文氏图，如图 2-1，利用图形的直观性可知：

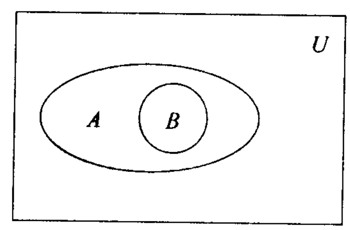

图 2-1

(1)至(4)均是 $B\subseteq A$ 的充要条件.

点拨　(1) 由本题可知，对此类题宜用文氏图直观求解.

(2) 由此例可知，同一结论，可以有多个充要条件，并且这些充要条件的表示形式可以不同.

(3) 若将 $B\subseteq A$，换成 $B\subsetneqq A$，解法相同.

例5　已知 $p:|3x-4|>2$，$q:\frac{1}{x^2-x-2}>0$，则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件？

分析　先将条件 p、q 化简，再写出 $\neg p$、$\neg q$，最后作出判断.

解　$\because$ $|3x-4|>2\Leftrightarrow x>2$ 或 $x<\frac{2}{3}$，$\therefore$ $\neg p$：$\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant2$.

又 $\because$ $\frac{1}{x^2-x-2}>0\Leftrightarrow x>2$ 或 $x<-1$，$\therefore$ $\neg q$：$-1\leqslant x\leqslant2$.

而 $\neg p\Rightarrow\neg q$，$\neg q\nRightarrow\neg p$，$\therefore$ $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分而不必要条件.

点拨　1. 求 $\neg q$ 时，不可由 $\frac{1}{x^2-x-2}>0$ 得 $\frac{1}{x^2-x-2}\leqslant0$，而应先求出 q，再求 $\neg q$，切记切记！

2. 逻辑联结词“或”、“且”、“非”与集合中的“并”、“交”、“补”相关，若 p 中的元素组成集合 A，则 $\neg p$ 中元素组成的集合就是集合 A 的补集.

3. 本题若利用其逆否命题转化为判断 q 是 p 的什么条件，则更简便，并且不易出错.

例6 (2004·天津卷)已知数列$\{a_n\}$，那么“对任意的 $n\in \mathbf{N}^*$，点 $P_n(n,a_n)$ 都在直线 $y=2x+1$ 上”是“$\{a_n\}$为等差数列”的 ( )

A. 必要而不充分条件.

B. 充分而不必要条件.

C. 充要条件.

D. 既不充分也不必要条件.

解 由“对任意的 $n\in \mathbf{N}^*$，点 $P(n,a_n)$ 都在直线 $y=2x+1$ 上”可得 $a_n=2n+1$，则$\{a_n\}$为等差数列成立. ∴ 满足充分条件. 由“$\{a_n\}$为等差数列”可得 $a_n=kn+b$，不一定是 $a_n=2n+1$，故不满足必要条件. ∴ 选 B.

点拨 1. 本题考查充分必要条件的基本概念.

2. 处理充分必要条件问题，首先要分清条件与结论，然后进行推理和判断.

3. 确定条件为不充分或不必要时，常常构造反例来说明.

【题目变化】变一变，形式不同实质同

例7 $ac^2>bc^2$ 是 $a>b$ 的 ( )

A. 充分不必要条件.

B. 必要不充分条件.

C. 充要条件.

D. 既非充分也非必要条件.

解 若 $ac^2>bc^2$ 成立，则 $c^2\neq 0$， ∴ $c^2>0$. ∴ $a>b$. 即 $ac^2>bc^2\Rightarrow a>b$. ∴ $ac^2>bc^2$ 是 $a>b$ 的充分条件. 若 $a>b$ 而 $c^2=0$ 时，有 $ac^2=bc^2$，即 $a>b$ $\nRightarrow ac^2>bc^2$. ∴ $ac^2>bc^2$ 不是 $a>b$ 的必要条件. 故选 A.

变化1 若 A 是 B 的必要但不充分条件，B 是 C 的充要条件，C 是 D 的必要但不充分条件，则 D 是 A 的 ( )

A. 充分不必要条件.

B. 必要不充分条件.

C. 充要条件.

D. 既非充分也非必要条件.

答案 选 A.

变化2 (1) “$x\neq 2$ 或 $y\neq 3$”是“$x+y\neq 5$”的________条件；

(2) p: $\left|2-\frac{x-1}{2}\right|>\frac{3}{4}$，$q$: $\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x-3<0$，则 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的________条件；

(3) 使不等式 $x^2-4x+3<0$ 成立的一个充分不必要条件是 ( )

A. $|x-2|<1$.　　B. $\log_3 x<2$.

C. $1<2^{x-1}<2$.　　D. $\frac{x-1}{x-3}\leqslant 0$.

答案 (1) 必要不充分；

(2) 必要不充分；

(3) 选 C.

变化3 设有如下命题：

甲：相交两直线 l、m 都在平面 α 内，且都不在平面 β 内；

乙：l、m 中至少有一条直线与 β 相交；

丙：α 与 β 相交.

当甲成立时 ( )

A. 乙是丙的充分不必要条件.

B. 乙是丙的必要不充分条件.

C. 乙是丙的充要条件.

D. 乙是丙的既非充分也非必要条件.

答案 选 C.

【精彩回放】看一看，以前怎么考

例8 (2004·浙江卷)在$\triangle ABC$ 中，“$A>30°$”是“$\sin A>\frac{1}{2}$”的 ( )

A. 充分而不必要条件.

B. 必要而不充分条件.

C. 充分必要条件.

D. 既不充分也不必要条件.

解 在$\triangle ABC$ 中，若 $A>30°$，则 $\sin A$ 不一定大于$\frac{1}{2}$，例如 $A=150°$ 时，$\sin A=\frac{1}{2}$；若 $\sin A>\frac{1}{2}$ 时，$A\in(30°,150°)$， ∴ $A>30°$成立. ∴ “$A>30°$”是“$\sin A>\frac{1}{2}$”的必要而不充分条件. 故选 B.

点拨 1. 本题主要考查“充要条件”的基本判断方法.

2. 本题关键在于明确 $y=\sin x$ 在$(0°,180°)$上的单调性.

例9 (2004·重庆卷)一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$ $(a\neq 0)$有一个正根和一个负根的充分不必要条件是 ( )

A. $a<0$.　　B. $a>0$.

C. $a<-1$.　　D. $a>1$.

解 一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$ $(a\neq 0)$有一正一负根的充要条件是两根之积小于0，即$\frac{1}{a}<0$，得 $a<0$. 而问题是求充分不必要条件，结合题目选项知选 C.

点拨 本题主要考查充分必要条件和一元二次方程根的情况. 题目易求充要条件(学生易错选 A)，

只需理解充分不必要条件的意义就可以选出答案C. 而C答案还可以改为$a<-2$,$a<-\frac{3}{2}$等等.

【巩固消化】练一练,重点题目在里面

1. 给出下列命题:

(1) p:$m<-2$,q:方程$x^2-x-m=0$无实根.

(2) p:$x^2>y^2$,q:$x>y$.

指出p是q的什么条件.

2. 在空间,p:无三点共线,q:四点共面,则p是q的　　(　　)

A. 充分不必要条件.

B. 必要不充分条件.

C. 充要条件.

D. 既不充分又不必要条件.

3. B是C的充要条件,B是D的必要条件,D是C的必要条件,则C是D的　　(　　)

A. 充分不必要条件.

B. 必要不充分条件.

C. 充要条件.

D. 既不充分又不必要条件.

4. 已知p:$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$,$q$:$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ $(m>0)$,若$\neg p$是$\neg q$的必要而不充分条件,求实数m的取值范围.

5. 求证$a+b>0$且$a\cdot b>0$是$a>0$且$b>0$的充要条件.

6. 求使方程$x^2+(2k-1)x+k^2=0$有两个大于1的根的充要条件.

【答案点拨】对一对,自己做得对不对

1. 解　(1) 充分不必要.

(2) 既不充分也不必要.

2. 解　利用等价命题转换判断.

它的等价命题是:在空间,$\neg q$:四点不共面,$\neg p$:三点共线,则$\neg q$是$\neg p$的(　　)条件.

∵ 空间四点不共面必有三点不共线,故$\neg q \nRightarrow \neg p$. 又∵ 三点共线,则必有四点共面,故$\neg p \nRightarrow \neg q$. ∴ $\neg q$是$\neg p$的既不充分又不必要条件.

∴ p是q的既不充分又不必要条件.

故选D.

3. 解　∵ $B\Leftrightarrow C, D\Rightarrow B, C\Rightarrow D$,

∴
$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & & D \arrow[dl, Rightarrow] \\ & B & \end{tikzcd}$$
∴ $C\Leftrightarrow D$,故选C.

4. 解　方法1　由$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$,$m>0$,得$1-m\leqslant x\leqslant 1+m$ $(m>0)$.

∴ $\neg q$:$A=\{x\mid x>1+m$或$x<1-m, m>0\}$.

由$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$,得$-2\leqslant x\leqslant 10$.

∴ $\neg p$:$B=\{x\mid x<-2$或$x>10\}$.

∵ $\neg p$是$\neg q$的必要而不充分条件,∴ $\neg q$是$\neg p$的充分而不必要条件.

∴ $A\subseteq B$. ∴ $\begin{cases} m>0, \\ 1-m\leqslant -2, \\ 1+m\geqslant 10. \end{cases}$ 解得$m\geqslant 9$.

方法2　∵ $\neg p$是$\neg q$的必要而不充分条件,∴ q是p的必要而不充分条件. ∴ p是q的充分而不必要条件. 由$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ $(m>0)$,得$1-m\leqslant x\leqslant 1+m$ $(m>0)$. ∴ q:$Q=\{x\mid 1-m\leqslant x\leqslant 1+m\}$ $(m>0)$. 又由$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$,得$-2\leqslant x\leqslant 10$. ∴ p:$P=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 10\}$. 由已知得$P\subseteq Q$,

∴ $\begin{cases} m>0, \\ 1-m\leqslant -2, \\ 1+m\geqslant 10. \end{cases}$ 解得$m\geqslant 9$.

5. 证明　从充分性、必要性两方面着手证明,即$p\Rightarrow q$,同时$q\Rightarrow p$.

(i) 若$a+b>0$且$a\cdot b>0$,则由$a\cdot b>0$知,a、b同正或同负,而$a+b>0$,∴ a、b只能同正. ∴ $a>0$且$b>0$.

(ii) 若$a>0$且$b>0$,则有$a+b>0$且$a\cdot b>0$.

综上所述,$a+b>0$且$a\cdot b>0$是$a>0$且$b>0$的充要条件.

6. 解　方法1　设方程两根为x_1、x_2,则$x_1>1$,$x_2>1$. ∴ $x_1-1>0$,$x_2-1>0$.

∴ $\begin{cases} (x_1-1)+(x_2-1)>0, \\ (x_1-1)(x_2-1)>0, \\ \Delta\geqslant 0. \end{cases}$

即$\begin{cases} x_1+x_2>2, \\ x_1\cdot x_2-(x_1+x_2)+1>0, \\ \Delta\geqslant 0. \end{cases}$

即$\begin{cases} -(2k-1)>2, \\ k^2+(2k-1)+1>0, \\ (2k-1)^2-4k^2\geqslant 0. \end{cases}$

解得$k<-2$.

点拨　本题易出现这样的错误解法:设两根为x_1、x_2,则有$\begin{cases} x_1+x_2>2, \\ x_1x_2>1. \end{cases}$ 即$\begin{cases} -(2k-1)>2, \\ k^2>1. \end{cases}$ 解得$k<-1$,错误原因是$\begin{cases} x_1+x_2>2, \\ x_1x_2>1 \end{cases}$ 仅为x_1、x_2都大于1的必要条件,并不充分.

例如:取$x_1=\frac{1}{2}$,$x_2=3$满足$\begin{cases} x_1+x_2>2, \\ x_1x_2>1. \end{cases}$ 但并不满足两根都大于1.

方法2　令$f(x)=x^2+(2k-1)x+k^2$. 由图像(图2-2)可知:

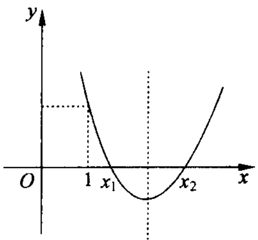

图2-2

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ -\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2k-1}{2}>1,\\ f(1)=1+(2k-1)+k^2>0\end{cases}\Rightarrow k<-2.$$

问题3 逻辑联结词中应注意哪些问题?

【主要知识】想一想,主要知识梳理清

对逻辑联结词的理解及有关问题的求解中要注意如下问题:

1. 含有文字"或、且、非"的命题不一定都是复合命题.

在某些场合,"或"、"且"、"非"不作联结词用,此时命题不一定是复合命题.

2. 复合命题不一定都显含"或"、"且"、"非".

有一些复合命题以一种简写的形式出现,不含逻辑联结词.

3. 逻辑联结词中"或"与日常生活用语中"或"的含义不一定相同,主要区别有两点:

(1) 日常生活中"或"包括"非此即彼"的意思,而逻辑联结词中的"或"为"既此又彼"的含义.如:"我明天乘火车或飞机去北京","三(1)班班长由王强或李明担任"等中的"或"的含义即为"非此即彼"的含义.

(2) 真值表中"p或q"型复合命题的真假判断的结果与日常生活中的习惯不完全一致.如教材中的举例:"苹果是长在树上的或长在地里".按真值表判断应为正确命题.但日常生活认为是不妥的.

4. 命题p的"非p"命题与p的否命题不是一回事.事实上:

命题p:若a则b.

非p:若a则非b;而p的否命题:若非a则非b.

【经典范例】听一听,名师怎样讲范例

例1 下列命题中:

① 在▱$ABCD$中,$AB\underline{\parallel}CD$;

② 梯形不是平行四边形;

③ 3是15和9的公约数;

④ 出租车为非机动车;

⑤ 方程$x^2-3x+2=0$的根是$x=1$或$x=2$.

则其中简单命题有 ( )

A. 1个. B. 2个. C. 3个. D. 4个.

分析 ①中"$AB\underline{\parallel}CD$"的含义为"$AB\parallel CD$且$AB=CD$",故为复合命题.②为"非$p$"形式的命题.③的含义为"3是15的约数且3是9的约数"为复合命题.

解 ④中"非机动车"为专业名词,"非"不作逻辑联结词用.⑤中的"或"不作逻辑联结词用,为简单命题.故选B.

点拨 1. 类似于①、③这一类复合命题的简写形式,不能简单地以是否含有逻辑联结词来判断命题是不是复合命题;而含有"或"、"且"、"非"的命题是不是复合命题,关键要看它们是否作逻辑联结词用.

2. 命题"$ax^2+bx+c=0$有根为$x=m$或$x=n$".虽然含有"或",但其不作逻辑联结词用,故为简单命题.

3. 命题"$ax^2+bx+c>0$的解为$x<m$或$x>n$"亦为简单命题.

例2 已知命题P:$2\geqslant1$;Q:若$x^2=1$则$x=1$.给出下列判断:

① P、Q都是简单命题;

② P为复合命题,Q为简单命题;

③ P、Q都是假命题;

④ P为真命题,Q为假命题;

⑤ 命题"非P"为真命题;

⑥ 命题"非Q"为真命题.

则以上判断中正确的结论的序号为________.

分析 P为"p'或q'"型复合命题.其中p':$2>1$;q':$2=1$.故P为真命题.又显然Q为假命题,简单命题.故①③⑤错误.又Q为假命题,"非Q"为真命题,即⑥正确.

解 填②④⑥.

点拨 1. 一般地:命题"$a\geqslant b$"(a、b为常数)为"p或q"型复合命题,而"$x\geqslant a$"(x为未知数,a为常数),则不是命题.

2. 命题"P"与"非p"必是一真一假.

例3 某位同学得出结论:"命题p与非p可以同时为假命题".其举例如下:

设p:若三角形有两个内角相等,则此三角形是

锐角三角形.

非 p：若三角形有两个内角相等，则此三角形不是锐角三角形.

显然 p 与非 p 都是假命题，故其结论正确.

请你指出上面结论的错误所在.

分析 p 中的判断词"是"在此处为"必定是"、"都是"的含义. 故它的否定词不应为"不是"，而应为"不一定是"、"不都是"，即"非 p"表示错误了.

解 非 p 中的判断词"不是"错误，p 的非 p 形式为：

非 p：若三角形有两内角相等，则此三角形不一定是锐角三角形.

显然，非 p 为正确命题.

点拨 要正确理解，把握判断词及其否定词，常见的对应关系如下表：

判断词	都是	等于	大于(>)	至多 n 个	任意的
否定词	不都是	不等于	不大于(≤)	至少 $n+1$ 个	某一个
判断词	一定是	没有	能	p 或 q	任意两个都
否定词	不一定是	至少一个	不能	$\neg p$ 且 $\neg q$	某两个不

例4 已知命题 p，写出下列命题 p 的非 p 形式及其否命题：

① 若 $x^2+y^2+z^2=0$，则实数 x、y、z 全为 0.

② 正 n 边形($n\geqslant 3$)的 n 个内角都相等.

③ 若 $x^2-1\neq 0$，则 $x\neq 1$ 且 $x\neq -1$.

分析 本题除考察能否正确地将判断词改为它的否定词外，还着重考察是否掌握非 p 与 p 的否定命题的区别.

解 ① 非 p：若 $x^2+y^2+z^2=0$，则实数 x、y、z 不全为 0.

p 的否命题：若 $x^2+y^2+z^2\neq 0$，则实数 x、y、z 不全为 0.

② 非 p：正 n 边形($n\geqslant 3$)的 n 个内角不全相等.

p 的否命题是：不是正 n 边形($n\geqslant 3$)的多边形的 n 个内角不全相等.

③ 非 p：若 $x^2-1\neq 0$，则 $x=1$ 或 $x=-1$.

p 的否命题：若 $x^2-1=0$，则 $x=1$ 或 $x=-1$.

点拨 1. 此类题容易将命题的否定与否命题混淆. 命题的否定形式是条件不变，将命题的结论否定. 命题的否命题是将条件和结论均否定得到的命题.

2. "$x\neq a$ 且 $x\neq b$"的否定是"$x=a$ 或 $x=b$"，可依此类推另外一些相似结论.

【题目变化】变一变，形式不同实质同

例5 若命题 p：$2m-1$ ($m\in\mathbf{Z}$)是奇数；q：$2n+1$ ($n\in\mathbf{Z}$)是偶数，则 ( )

A. p 或 q 为真. B. p 且 q 为真.

C. 非 p 为真. D. 非 q 为假.

解 这里 p 为真，q 为假. 由真值表得：p 或 q 为真. 故选 A.

变化1 已知复合命题"p 且 q"为假命题，则可以肯定的是 ( )

A. p 为真命题.

B. q 为真命题.

C. p、q 中至少有一个是假命题.

D. p、q 均为假命题.

答案 选 C.

变化2 已知复合命题"p 或 q"为真，"非 p"为假，则必有 ( )

A. p 真 q 假.

B. p 真 q 真.

C. p 假 q 真.

D. p 真 q 可能真也可能假.

答案 选 D.

【精彩回放】看一看，以前怎么考

例6 (2004·福建卷)命题 p：若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充分而不必要条件. 命题 q：函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$，则 ( )

A. "p 或 q"为假. B. "p 且 q"为真.

C. p 真 q 假. D. p 假 q 真.

解 取 $a=1$，$b=-1$，则 $|a|+|b|>1$. 而 $|a+b|\not>1$，从而不充分，命题 p 是假命题. 由 $|x-1|-2\geqslant 0$，解得：$x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

∴ 命题 q 是真命题. 故选 D.

点拨 本题考查简易逻辑和不等式以及定义域等知识点，同时考察证明假命题和真命题的不同方法.

【巩固消化】练一练，重点题目在里面

1. 已知命题：① 30 是 4 和 5 的公倍数；② 相似三角形的对应边不一定相等；③ 三角形的中位线平行且等于底边的一半；④ 有两个角相等的三角形是等腰三角形；⑤ 不等式 $x^2-2x-3>0$ 的解为 $x<-1$ 或 $x>3$. 则这 5 个命题中，简单命题是 ( )

A. ①②④. B. ①④.

C. ②④⑤. D. ④⑤.

2. "在三角形 ABC 中，若 $\angle A=90°$，则 $\angle B$、$\angle C$ 全为锐角"，其否命题为 ( )

A. 在△ABC 中，若 $\angle A\neq 90°$，则 $\angle B$、$\angle C$ 全不是锐角.

B. 在△ABC 中，若 $\angle A\neq 90°$，则 $\angle B$、$\angle C$ 不全是锐角.

C. 在△ABC 中，若 $\angle A\neq 90°$，则 $\angle B$、$\angle C$ 不一定为锐角.

D. 在△ABC 中，若 $\angle A\neq 90°$，则 $\angle B$、$\angle C$ 有一

个不是锐角.

3. 如果命题“p 或 q”与“非 p”都是真命题，那么 q 是____________命题.（填真或假）

4. 命题“若 $|x|+|y|=0$，则 $x=0$ 且 $y=0$”的逆否命题是________________.

5. 指出下列命题中哪些是简单命题，哪些是复合命题，并写出复合命题的构成形式.

① x、$y\in \mathbf{N}$，若 $x+y$ 为偶数，则 x、y 都是偶数；

② $10\geqslant 9$；

③ 对边平行且相等的四边形是平行四边形；

④ 若 $A\cup B=B$，则 $A\subseteq B$.

6. 写出下列命题 p 的非 p 形式及 p 的否命题：

① 面积相等的两个三角形是全等三角形；

② 末位数是 0 或 5 的整数能被 5 整除；

③ 若 $x^2-2x-3=0$，则 $x=-1$ 或 $x=3$.

【答案点拨】对一对，自己做得对不对

1. 解　选 C. ①与③都是复合命题（简写形式）.

2. 解　选 B. 条件的否定为 $\angle A\neq 90°$，结论的否定为不全是锐角.

3. 解　真. 因“非 p”真，故 p 假. 又“p 或 q”为真，必有 q 为真.

4. 解　若 $x\neq 0$ 或 $y\neq 0$，则 $|x|+|y|\neq 0$.

5. 解　① 为“p 且 q”形式的复合命题. 其中 p：若 $x+y$ 为偶数，则 x 为偶数；q：若 $x+y$ 为偶数，则 y 为偶数.

② “p 或 q”形式的复合命题. 其中 p：$10>9$；q：$10=9$.

③ 简单命题.

④ “p 或 q”形式的复合命题. 其中 p：若 $A\cup B=B$，则 $A\subsetneqq B$；q：若 $A\cup B=B$，则 $A=B$.

6. 解　① 非 p：面积相等的两个三角形不一定是全等三角形. p 的否命题：面积不相等的两个三角形不一定是全等三角形.

② 非 p：末位数是 0 或 5 的整数不能被 5 整除. p 的否命题：末位数不是 0 且又不是 5 的整数不能被 5 整除.

③ 非 p：若 $x^2-2x-3=0$，则 $x\neq -1$ 且 $x\neq 3$. p 的否命题：若 $x^2-2x-3\neq 0$，则 $x\neq -1$ 且 $x\neq 3$.

问题 4　怎样求函数的定义域？

【主要知识】想一想，主要知识梳理清

1. 根据给出函数解析式求定义域的基本题型：

（1）$y=f(x)$（多项式）定义域 $\mathbf{R}$.

（2）$y=\dfrac{1}{f(x)}\Rightarrow f(x)\neq 0$.

（3）$y=\sqrt{f(x)}\Rightarrow f(x)\geqslant 0$.

（4）$y=[f(x)]^0\Rightarrow f(x)\neq 0$.

（5）$y=\log_{\varphi(x)}f(x)\Rightarrow \begin{cases}\varphi(x)>0,\\ f(x)>0,\\ \varphi(x)\neq 1.\end{cases}$

（6）$y=x^\alpha$ 定义域需要讨论.

（7）$y=f[\varphi(x)]$复合函数等.

2. 所采用常用办法是：

（1）利用解不等式（组）、方程的方法求其定义域.

（2）利用题设中的实际意义来规定自变量的取值.

（3）利用反函数法求定义域；因为 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$定义域与值域互换. 也谓“正难则反”的转化思想.

（4）复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，先由 $y=f(u)$成立的条件定 u 取值范围，再由 u 的取值范围来确定 $u=\varphi(x)$，x 取值范围. 含有参数函数定义域求法，采用分类讨论法（对参数实施讨论）.

【经典范例】听一听，名师怎样讲范例

例 1　求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{\sqrt{3x-x^2}}{|x-1|-1}$；

（2）$y=\sqrt{9^{-x}-3^{1-x}+2}$；

（3）$y=\sqrt{2+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)}$；

（4）$y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$.

解　（1）由$\begin{cases}3x-x^2\geqslant 0,\\ |x-1|-1\neq 0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3,\\ x\neq 0 \text{ 且 } x\neq 2,\end{cases}$

∴ 函数的定义域是$(0,2)\cup(2,3]$.

（2）$9^{-x}-3^{1-x}+2\geqslant 0$，即 $3^{-2x}-3\cdot 3^{-x}+2\geqslant 0$. $(3^{-x}-1)(3^{-x}-2)\geqslant 0$，∴ $3^{-x}\leqslant 1$ 或 $3^{-x}\geqslant 2$.

∴ 定义域为$\{x\,|\,x\geqslant 0 \text{ 或 } x\leqslant \log_{\frac{1}{3}}2\}$.

（3）$2+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\geqslant 0$，$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\geqslant -2$，

∴ $\log_2(x+1)\leqslant 2$. 定义域为$\{x\,|-1<x\leqslant 3\}$.

（4）$\begin{cases}25-x^2\geqslant 0,\\ \cos x>0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-5\leqslant x\leqslant 5,\\ 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in \mathbf{Z}).\end{cases}$

借助于数轴，解这个不等式组，得函数的定义域是 $\left[-5,-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},5\right]$.

点拨　本例的四个小题，基本代表了求具体函数定义域的题型和方法.

例2　已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，且 $a+b>0$，求下列函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　　(2) $F(x)=f(x)-f(-x)$；

(3) $g(x)=f(x+c)+f(x-c)\ (c>0)$.

解　据题意，$b>a$ 且 $b>-a$，∴ $b>0$ 且 $b>|a|$.

(1) 由 $a\leqslant x^2\leqslant b$，得当 $a\leqslant 0$ 时，$x\in[-\sqrt{b},\sqrt{b}\,]$；当 $a>0$ 时，$x\in[-\sqrt{b},-\sqrt{a}\,]\cup[\sqrt{a},\sqrt{b}\,]$.

(2) 由 $a\leqslant -x\leqslant b$ 得 $f(-x)$ 的定义域为 $-b\leqslant x\leqslant -a$. 解不等式组 $\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b,\\-b\leqslant x\leqslant -a,\end{cases}$ 注意到 $b>-a$ 或 $a>-b$. ∴ 当 $a>0$ 时，$F(x)$ 的定义域为 $\varnothing$，即函数 $F(x)$ 不存在；当 $a=0$ 时，$F(x)$ 的定义域为 $\{0\}$；当 $a<0$ 时，$F(x)$ 的定义域为 $[a,-a]$.

(3) 解不等式组 $\begin{cases}a\leqslant x+c\leqslant b,\\a\leqslant x-c\leqslant b,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a-c\leqslant x\leqslant b-c,\\a+c\leqslant x\leqslant b+c.\end{cases}$

∵ $c>0$，∴ $a+c>a-c,b+c>b-c$. ∵ $g(x)$ 的定义域为非空集合，∴ 当 $a+c\leqslant b-c$，即 $0<c<\frac{1}{2}(b-a)$ 时，$g(x)$ 的定义域为 $[a+c,b-c]$；当 $c=\frac{b-a}{2}$ 时，定义域为 $\left\{\frac{a+b}{2}\right\}$.

点拨　若函数 $f(x)$ 的定义域为 A，则 $f[g(x)]$ 的定义域可由 $g(x)\in A$ 解出 x 即可.

例3　已知 $y=f(\lg x)$ 的定义域是 $\left[\frac{1}{10},100\right]$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域；

(2) 求 $f(x^2-2)$ 的定义域.

解　(1) ∵ $\frac{1}{10}\leqslant x\leqslant 100$，∴ $-1\leqslant \lg x\leqslant 2$. ∴ $f(x)$ 的定义域是 $[-1,2]$.

(2) 由 $-1\leqslant x^2-2\leqslant 2$，得 $-2\leqslant x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x\leqslant 2$. 故 $f(x^2-2)$ 的定义域是 $[-2,-1]\cup[1,2]$.

点拨　1. 函数 $y=f(\lg x)$，$y=f(x)$，$y=f(x^2-2)$ 是三个不同的函数，但它们都在同一法则“f”之下，因此自变量“$\lg x$”、“x”、“x^2-2”的范围一致.

2. 若 $f[g(x)]$ 的定义域为 A，则 $f(x)$ 的定义域就是当 $x\in A$ 时 $g(x)$ 的值域.

例4　已知函数 $f(x)=x+\frac{b^2}{x}$ 定义域为 $(0,a]$ 且 $a<b$，求函数 $f(x)$ 的值域.

解　令 $0<x_1<x_2\leqslant a<b$，则 $x_1-x_2<0$ 且 $x_1x_2<b^2$，$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1x_2-b^2}{x_1x_2}\right)>0$，∴ $f(x_1)-f(x_2)>0$. ∴ $f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上是减函数. ∴ 当 $x=a$ 时，$f(x)$ 最小值为 $a+\frac{b^2}{a}$. ∴ $f(x)\geqslant a+\frac{b^2}{a}$.

点拨　1. 如把定义域扩大为 $(0,b]$，那么由均值不等式知 $x=b$ 时 $f(x)$ 最小为 $2b$. 而当 $x=\frac{b}{2}$ 时，$f(x)=\frac{5}{2}b>2b$，于是猜想，在 $(0,b]$ 上函数递减，当然在 $(0,a]$ 上也递减.

2. 另途径就是对函数解析式变形为：$x^2-f(x)x+b^2=0$，一元二次方程，用判别式建立 $f(x)$ 的不等式. 还可创造条件使用均值不等式或配方、三角代换等方法.

【题目变化】变一变，形式不同实质同

例5　设 $f(x)=\lg(x^2-2x+a)>0$ 的定义域为 **R**，求 a 的取值范围.

解　由条件知不等式 $x^2-2x+a>0$ 的解集是 **R**，于是 $4-4a<0$. ∴ $a>1$，即 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

变化　已知 $f(x)=\lg(x^2-2x+a)>0$ 的值域为 **R**，求 a 的取值范围.

分析　如果值域为 **R**，则真数 x^2-2x+a 必须“取遍”所有正实数，则 $4-4a\geqslant 0$，∴ $a\in(-\infty,1]$.

点拨　1. 二次不等式恒成立问题通常利用二次函数图像及判别式使数和形结合来思考.

2. 值域为 **R** 不等价于 $x^2-2x+a>0$ 恒成立，事实上由对数函数 $y=\lg x$ 的性质，$y\in\mathbf{R}$ 则 $x\in(0,+\infty)$，故只需真数 x^2-2x+a 的取值范围包含 $(0,+\infty)$ 即可，因此二次函数 $y=x^2-2x+a$ 的图像一定要与 x 轴有交点，故 $\Delta\geqslant 0$.

【精彩回放】看一看，以前怎么考

例6　(2002·上海春季卷)函数 $y=\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ 的定义域为__________.

解　由 $\begin{cases}\sqrt{3-2x-x^2}\neq 0,\\3-2x-x^2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow x^2+2x-3<0\Rightarrow -3<x<1$. ∴ 所求函数的定义域为 $(-3,1)$.

例7　(2004·重庆卷)函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是　　(　　)

A. $[1,+\infty)$.　　B. $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$.

C. $\left[\frac{2}{3},1\right]$.　　D. $\left(\frac{2}{3},1\right]$.

解　由 $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)\geqslant 0$ 得 $0<3x-2\leqslant 1$. ∴ $\frac{2}{3}<x\leqslant 1$. 故选 D.

【巩固消化】练一练，重点题目在里面

1. 设 $f(x)$ 的定义域 $A=[4,+\infty)$，在下列函数 $y=f(2x-4)$，$y=f\left(\frac{x^2}{4}\right)$，$y=f(2\sqrt{x})$，$y=f\left(\frac{16}{x}\right)$，

$y=f(\lg x)$中定义域仍是 A 的有　　（　　）

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

2. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{\log_a x^2-1}}{|x|-x}$ $(0<a<1)$定义域是　　（　　）

A. $[-\sqrt{a},\sqrt{a}]$.　　B. $[-\sqrt{a},0)\cup(0,\sqrt{a})$.

C. $(0,\sqrt{a}]$.　　D. $[-\sqrt{a},0)$.

3. 函数 $f(e^x-1)=\sqrt{x}+1$，则 $f(x)$定义域是______.

4. 设函数 $y=\dfrac{ax-1}{\sqrt[3]{ax^2+4ax+3}}$定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 取值范围.

5. 已知函数 $f(x)$定义域为$(0,1)$，求 $g(x)=f(x+a)f(x-a)$ $(a\leqslant 0)$的定义域.

【答案点拨】 对一对，自己做得对不对

1. **解**　由 $2x-4\geqslant 4\Rightarrow x\geqslant 4$，又由 $2\sqrt{x}\geqslant 4\Rightarrow x\geqslant 4$. 故函数 $y=f(2x-4)$，$y=f(2\sqrt{x})$满足 A，∴ 选 B.

2. **解**　$\begin{cases}x^2\leqslant a,\\ |x|\neq x,\end{cases}$ 解得$-\sqrt{a}\leqslant x<0$. ∴ 选 D.

3. **解**　换元法：令 $u=e^x-1$，则 $e^x=u+1$，$x=\ln(u+1)$，$f(u)=\sqrt{\ln(u+1)}+1$，$f(x)=\sqrt{\ln(x+1)}+1$，$\begin{cases}x+1>0,\\ \ln(u+1)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1,\\ \ln(u+1)\geqslant\ln 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1,\\ x+1\geqslant 1\end{cases}$ $\Rightarrow$ ∴ $x\geqslant 0$. ∴ 所求定义域为$[0,+\infty)$.

4. **解**　此题对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $ax^2+4ax+3\neq 0$.

(i) $a=0$ 时，上式成立；

(ii) $a\neq 0$ 时，要使上式成立只需 $\Delta=(4a)^2-4a\cdot 3<0\Rightarrow 0<a<\dfrac{3}{4}$.

综上所述 $0\leqslant a<\dfrac{3}{4}$.

5. **解**　$\begin{cases}0<x+a<1,\\ 0<x-a<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a<x<1-a,\\ a<x<1+a.\end{cases}$

∵ $a\leqslant 0$，∴ $-a\geqslant 0$. ∵ 当 $a=0$ 时，$x\in(0,1)$；当 $a<-\dfrac{1}{2}$时，$-a>1+a$，$x\in\varnothing$；当$-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，$-a<1+a$，且 $1+a<1-a$，∴ $x\in(-a,1+a)$；当 $a=-\dfrac{1}{2}$时，$x\in\varnothing$.

综上，当$-\dfrac{1}{2}<a\leqslant 0$ 时，所求定义域为$(-a,1+a)$；当 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$时，所求定义域为$\varnothing$.

问题 5　怎样判断函数的单调性？

【主要知识】 想一想，主要知识梳理清

1. 判断函数单调性的方法

(1) 定义法：在给定区间上任取两个值 x_1、x_2，设 $x_1<x_2$，然后判断 $f(x_1)-f(x_2)$的符号，再得出结论.

(2) 等价法：设 x_1、$x_2\in[a,b]$，且 $x_1\neq x_2$ 则

$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是增函数，

$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是减函数.

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是增函数，

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是减函数.

(3) 图像法：作出函数的图像，则函数的单调性和单调区间一目了然.

(4) 两个增（减）函数的和仍为增（减）函数.

一个增（减）函数与一个减（增）函数的差是增（减）函数.

(5) 奇函数在对称的两个区间上有相同的单调性.

偶函数在对称的两个区间上有相反的单调性.

(6) 互为反函数的两个函数有相同的单调性.

(7) 如果 $f(x)$在区间 D 上是增（减）函数，则 $f(x)$在 D 的任一子区间上也是增（减）函数.

(8) 如果 $y=f(u)$和 $u=g(x)$单调性相同，则 $y=f[g(x)]$是增函数，如果 $y=f(u)$和 $u=g(x)$单调性相反，则 $y=f[g(x)]$是减函数.

2. 注意事项

(1) 由定义判断函数的单调性，关键是对 $f(x_1)-f(x_2)$的变形，要求运算过程要合理，有时还要分区间讨论.

(2) 在研究函数的单调性时，常需要先将函数化简，转化为讨论一些熟知函数的单调性，故应掌握一些常见函数的单调性.

(3) 要会利用函数的性质（奇偶性、周期性等）进行综合判断.

【经典范例】 听一听，名师怎样讲范例

例 1　设 $f(x)$、$g(x)$都是单调函数，有如下四个命题：