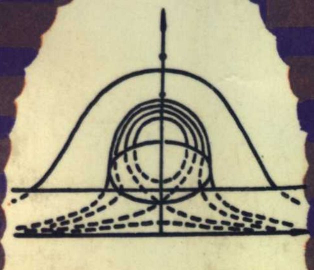
非线性振动

黄安基



西南交通大学出版社

非线性振动

黄安基

西南交通大学出版社

(川)新登字018号

内 容 简 介

本书论述了非线性振动的概念、方法和典型现象，系统地介绍了研究非线性系统的方法，其中包括一个自由度系统及多自由度系统的相平面法、摄动法、渐近法、多重尺度法，还简述了频闪法及参数激励系统解的稳定性.

本书用到的数学工具不多，收集的例题近80个、习题160个，对于初学者掌握常用的非线性振动研究方法是有利的. 除作为高等工科院校研究生和本科生的教材或教学参考书外，还可供从事振动研究工作的工程技术人员参考.

非 线 性 振 动
黄 安 基
*
西南交通大学出版社出版发行
(成都 九里堤)
新 华 书 店 经 销
郫县印刷厂印刷
*
开本：850×1168 1/32 印张：11.0000
字数：255千字 印数：1—1000册
1993年12月第1版 1993年12月第1次印刷
ISBN7—81022—487—5/T·095
定价：9.80元

前

非线性振动问题在现代科学技术的各个领域中经常会遇到，引起了广泛的注意. 非线性振动的许多现象，不能用线性振动理论来解释，因此需要专门加以研究. 目前适于初学、内容详略得当的这方面书籍，国内已公开出版的较少. 本书是作者在西南交通大学工程力学专业本科生和一般力学专业振动方向的研究生中多年教学的基础上编写而成的，出版前复经作者本人及其他教师试用过多次. 书中主要是介绍非线性振动研究中的一些方法，以作为进一步研究的基础. 所用到的数学工具不多，收集了数量较多的例题和习题，计有例题近 80 个、习题 160 个，对于初学者掌握常用的研究方法，从理论上理解非线性振动的一些特有现象是有利的，也可供有关专业从事振动研究工作的人员参考.

第一章列举了非线性振动不同于线性振动的一些主要特点，说明研究非线性振动的必要性. 简要介绍了非线性力学的发展过程及当前的进展概况.

第二章至第四章为研究非线性自治系统的几何方法，即定性方法. 第二章介绍了相平面法的一般理论，用实例强调了积分曲线与相轨线的区别，详细分析讨论了线性化系统在各种情况下奇点的类型和稳定性，指出了附加非线性项对奇点的可能影响. 对相轨线的作图法给予了足够的重视，介绍了 4 种作图法.

第三章介绍了非线性保守系统及其相图的一些基本性质，特别是论证了系统的运动微分方程中含有速度项时并不都是非保守系统，给出了两种形式的含速度项的保守系统方程. 本章还涉及了分叉值的概念及几种简单的分叉型式.

第四章为非线性非保守系统. 介绍了自振的概念及极限环的概念，集中介绍了与极限环有关的一些定理. 用读者较易于理解的方式分析了张弛振动为什么能够发生及其振动的规律.

第五章以后为研究非线性系统的解析方法，即定量方法. 第五章至第七章研究自治系统，第八章研究非自治系统. 只着重介绍各种方法及其应用条件，限于篇幅，严格的数学证明从略.

第五章介绍了摄动法，即 Lindstedt-Poincaré 法，它是其它近似方法的理

论基础.还介绍了适用于不是小参数情况下的 Shohat 展开法.第六章介绍了渐近法,即 KBM 法,还介绍了平均法、等效线性化法及谐波平衡法,讨论了拟线性自治系统存在周期解的条件及其定常解的稳定性.第七章介绍了奇异摄动理论中常用的多重尺度法,并对前述各种方法的优点及其在应用时有何不利之处作了比较.

第八章应用摄动法和多重尺度法研究拟线性非自治系统的受迫振动,还介绍了逐次逼近法和平均法.除共振情况外,还讨论了次谐波及超谐波情况.研究了非自治系统周期解的稳定性,分析说明了非线性系统特有的跳跃现象.

第九章是参数激励系统,它虽属非自治系统,但实际是线性系统.其所以列入本书内容,是因为当研究用摄动法求出的非自治系统周期解的稳定性时,即归结为求本类系统解的稳定性.书中试图用读者较易于接受的方式来介绍 Floquet 理论.

第十章介绍了频闪法.它的基础是变换理论.应用频闪法可以将非自治系统转化成自治系统,很多问题都可以用它来处理.

第十一章研究了多自由度(指有限自由度)非线性系统,包括自治系统及非自治系统.所用的方法是摄动法和多重尺度法,也介绍了逐次逼近法.用摄动法可直接求出周期解,但研究周期解的稳定性变为研究具有周期系数的变分方程解的稳定性.用多重尺度法求周期解变为求转化后得到的自治系统的奇点,奇点的稳定性即对应于周期解的稳定性.用多重尺度法还便于分析说明跳跃现象、饱和现象以及内共振、次谐共振、超谐共振和组合共振等情况.

在本书的写作过程中,本校高淑英同志给予了多方支持,实起了促成作用;曹登庆同志校阅了原稿和打印稿,提出了有益的意见.本书的出版,还得到了同济大学余文铎同志及长沙铁道学院谢柳辉同志的关心与支持.作者对他们谨表示深切的谢意.

由于作者水平所限,书中难免会有错误和考虑不周之处,尚请读者指正.

黄安基

1992.4. 于西南交通大学

目　录

第一章 绪　论

§1—1 为什么要研究非线性振动

自本世纪30年代以来，力学中的非线性问题日益为科学家们所注意. 这里我们研究的只是非线性力学中的一小部分，即非线性振动.

实际上，一切力学问题原本都是非线性的，通常采用的线性化只是一种近似方法. 在振动理论中，将振动系统线性化可以便于求解，因为线性微分方程理论已发展得比较完善. 在大量的工程和力学问题中，线性化的结果可以得出比较精确的近似解，线性振动理论仍然可以发挥作用. 例如，设弹性系统振动的振幅很小，线性化的处理可以得出比较满意的结果.

但在非线性系统中，原因和结果不是始终成线性相关，即不始终成正比，叠加原理无效. 无根据地弃去非线性项，将不仅引起数量上的误差，使结果不精确，而且有时还会导致根本性质上的错误. 例如，振动系统中若含有非线性元件，可在很大程度上削弱共振的影响，当振幅增大时可引起频率的改变，使系统自动退出共振区. 即使是充分接近于线性系统的非线性系统，由于非线性项的出现，也会引起振动性质上的某些变化，出现线性系统中不可能出现的某些现象(参看§1—3).

非线性振动理论揭示了许多不同类型的新现象. 另一方面，研究非线性振动理论也可以证实，在哪些情况下线性化不致引起定性的变化；或者指出，线性化将引起多大的定量的误差.

§1—2 历史简介

近代非线性力学中的许多方法，都起源于 J. H. Poincaré (1854—1912)的两部著作：其一是 1881 至 1886 年以《微分方程所定义的积分曲线》为题发表的四篇论文，这是现时常用的定性方法、拓扑方法的最早系统著作；另一是 1892 年发表的《天体力学新方法》，共三卷，其中不仅有求非线性方程近似解的小参数法，还引入了许多其它重要概念.

和 Poincaré 同一时代的还有 A. M. Liapounov(1857—1918)，他的博士论文《论运动稳定性的一般问题》(1892)是运动稳定性理论的经典性著作，他提出了两种判别稳定性的方法，其第二种方法现在用得最多，称为 Liapounov 方法.

在无线电技术研究方面，B. van der Pol 于 1926 年提出了现在以他的姓氏命名的方程

$$\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+x=0 \qquad (\varepsilon>0) \tag{1—1}$$

指出了非线性振动中一种重要现象 —— **自激振动** (self-excited vibration). 这是依靠系统内部的能量来维持振动不衰减，故也称为**自持振动**(self-sustained vibration)，简称**自振**. 1928 年，B. van der Pol 和 J. van der Mark 发表了**张弛振荡**(relaxation oscillation)的文章，指出在一非线性系统的振动中，能量可以在某一阶段中积累起来，而在另一很短的时间内又突然释放出来.

1929 年，A. A. Andronov 指出，Poincaré 在天体力学问题中导出的**极限环**(limit cycle)这一数学概念正是 van der Pol 所揭示的自激振动这一物理现象，从而将常微分方程定性理论与无线电振荡的本质联系起来，开辟了常微分方程定性理论的一个重要应用领域——非线性振动. Andronov 毕生研究各种自激振动，并在相平面上进行分析. 他和他的同事、学生 A. A. Witt、S. E. Chaikin

合写的著作《振动理论》(1935 年初版,1959 年有增订版)总结了这方面的研究.

苏联的非线性振动理论学派由 L. Mandelstam、N. Papalexi 及 Andronov 所创立,他们用非线性力学一词表示非线性振动. N. Minorsky 于 1947 年出版的非线性振动著作,也用非线性力学这一名称,直至 1962 年改版时才改为《非线性振动》. 苏联的另一振动理论学派 N. M. Krylov、N. N. Bogoliubov 于 1947 年出版了《非线性力学引论》,其内容也为非线性振动. 他们二人所创立、后由 Y. A. Mitropolsky 所发展的一种非线性振动的渐近计算方法,就是后来通常称为的 KBM 法.

本世纪 50 年代,美国数学家 S. Lefschetz 主编了《非线性振动论文集》,共五卷. 英国女数学家 M. L. Cartwright 在研究 van der Pol 方程受迫振动的性质时,发现了周期很长的次谐波(subharmonic)解等奇怪现象. 这些问题在 60 年代又使得 S. Smale 提出了有名的**马蹄**(horseshoe)变换. 50 年代起,日本的林千博(C. Hayashi)长期从事非线性振动的电模拟计算,其实验结果为后来的一些非线性现象研究提供了例证.

本世纪 60 和 70 年代,非线性力学的研究突飞猛进. 在保守系统(Hamilton 系统)的研究中,A. N. Kolmogorov、V. I. Arnold 和 J. K. Moser 提出了以三人姓的第一字母命名的卡姆(KAM)定理,揭示了接近于保守的系统中的**混沌**(或作**浑沌**,chaos)现象. Smale 的马蹄变换可为 70 年代的混沌理论作好数学理论的准备.

混沌是指在**确定性**(deterministic)系统中出现的类似随机的过程. 确定性系统指**动力系统**(dynamical system),通常由微分方程、差分方程甚或代数迭代方程描述,方程中的系数是确定的. 非线性是系统发生混沌现象的必要条件(但非充分条件). 在某些非线性系统中,系统的状态对初始条件的依赖非常敏感,初值的任何微小改变对系统的长期性质将引起变化. 由于事实上初值不可能

以无限精确度确定，这种系统在长期内的状态将不可预测. 混沌理论中的个别概念，Poincaré 在 19 世纪末已经指出；但通常认为，E. N. Lorenz 在 1963 年研究大气对流时得到的三维一阶非线性常微分方程组是混沌的第一个例子.

1971 年，D. Ruelle 和 F. Takens 提出，湍流的形成也可由常微分方程的定性理论得到解释. 这一假设又对混沌和与之有关的马蹄及奇怪吸引子（简称怪引子，strange attractor）理论起了很大的推进作用. 系统的稳定平衡态或稳定周期解即为吸引子. 除了这两种吸引子以外，怪引子是一个无限点集，其中任意点的任意次映射都不是其自身，但仍在这一集合中. 怪引子对应于一类混沌过程. 混沌和怪引子的研究近来正蓬勃兴起.

Andronov 学派对二维系统的性质作了比较彻底的研究，J. Guckenheimer 和 P. Holmes 在他们的著作《非线性振动、动力系统和向量场的分叉（bifurcation）》（1983 年）中由二维推广到三维，这是一个比较关键性的推广.

非线性振动问题是近代物理学和技术科学许多领域中的重要课题，对它的研究已取得了不少成果. 随着生产建设事业的发展，仍将有许多问题需要加以探索和研究. 当前研究工作主要有非线性振动理论的定性方法（分叉理论、混沌、随机方法等）和解析方法，非线性振动问题的数值解法，力学系统中的非线性振动问题，非线性振动理论在物理学（等离子体物理、近代光学与声学）、电子学、生物学（生物工程）中及近代流体力学和航天技术中的应用等.

§1—3　非线性振动系统的实例及分类

在线性系统中，弹性力与弹簧的变形成正比，阻尼与物体的速度成正比，惯性力与物体的加速度成正比. 但对于实际的振动系统，根据问题的性质及对精度的要求，弹性力、阻尼及（或）惯性力

不能按线性化处理，这就是非线性振动系统.

非线性振动系统的微分方程可写为

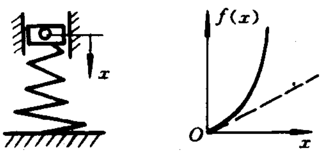
$$m\ddot{x}+F(\dot{x})+f(x)=P(t) \tag{1—2}$$

式中 x 为位移，$F(\dot{x})$为阻尼，$f(x)$为弹性力，$P(t)$为干扰力.

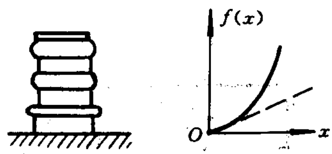
1. 非线性振动系统的实例

(1) 弹性力为非线性

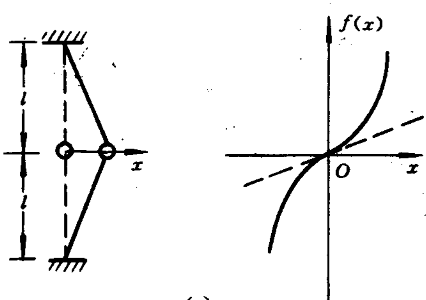
设物体距平衡位置的位移为 x 时，弹性力为方程(1—2)中的 $f(x)$，则 $c=\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 为弹性系数，或称刚度. 若 c 为非常数，这就是非线性弹性力的情况. 如 c 随$|x|$增加而增加，则弹性力为**硬特性**的(图 1—1)；反之，如 c 随$|x|$增加而减小，则弹性力为**软特性**的(图 1—2). 弹性力也可能在 x 的某一区间内为硬特性，而在另一区间内为软特性.



(a) 受压圆锥弹簧

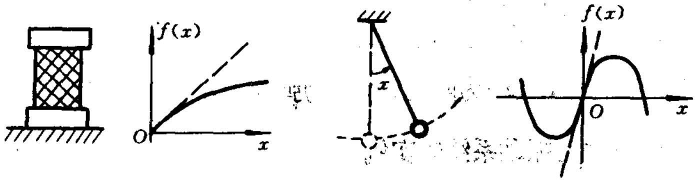


(b) 空气弹簧



(c)

图 1—1



(a) 受压胶块　　(b) 悬挂点固定的单摆

图 1—2

图 1—3 中各弹簧均为线性弹簧，但物体运动到不同区段时，相应的刚度是不同的，这称为**分段线性系统**(piecewise linear system). 图中分段线性的弹性力可看作是非线性弹性力的近似表示形式，因此该振动系统实际上是非线性的.

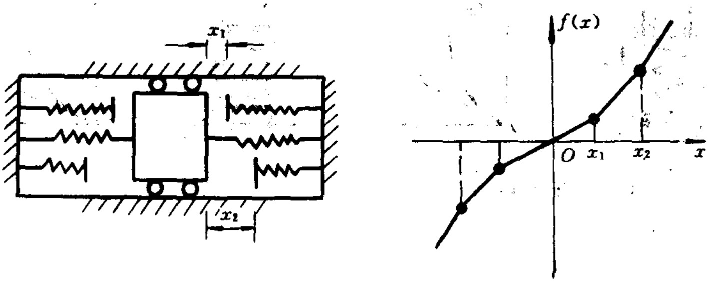


图 1—3

通常情况下，只有当系统偏离平衡位置的位移较大时，才需要考虑弹性力为非线性. 而在微振动情况下，系统可认为是线性的. 但有时即使位移很小，也必须考虑弹性力为非

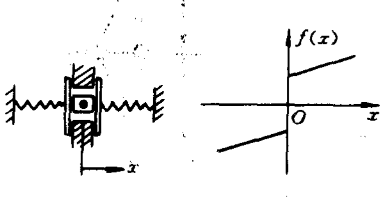


图 1—4

线性，如图 1—4 所示的系统就是这样.

(2) 阻尼为非线性

当物体在空气或液体介质中以较大的速度运动时，方程(1—2)中阻尼 $F(\dot{x})$ 可与速度平方成正比(图 1—5a)，表为

$$F(\dot{x})=\mu\dot{x}|\dot{x}| \quad 或 \quad \mu\dot{x}^2\operatorname{sgn}(\dot{x})$$

当物体沿某一有摩擦的固体表面运动时，应区别湿摩擦与干摩擦两种情况. 对于湿摩擦(图 1—5b)，阻尼在通过 $\dot{x}$ 的零值而改变符号时是连续的，在 $\dot{x}$ 的零值附近，阻尼可认为是线性的. 而对于干摩擦(图 1—5c)，则在 $\dot{x}$ 的零值处阻尼有"跳跃"现象，因此，即使在 $|\dot{x}|$ 很小的区域中，阻尼也是非线性的. 即使按照 Coulomb 假设，摩擦力大小与速度无关(图 1—5d)，系统也仍然是分段线性，即非线性的.

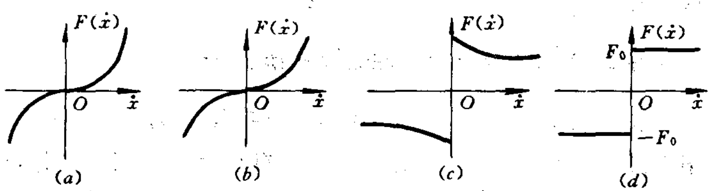


图 1—5

在计算系统的固有频率或非共振情况下的振幅时，即使阻尼是强非线性，但因其对振动的振幅及频率影响很小，仍可将其线性化，甚至将其略去不计. 但在分析自由衰减振动及计算共振情况下的振幅或研究自激振动时，就必须考虑阻尼的非线性特性.

当 $F(\dot{x})\cdot\dot{x}>0$，则阻尼 $F(\dot{x})$ 作负功. 它消耗能量，称为**正阻尼(或耗散阻尼)**；当 $F(\dot{x})\cdot\dot{x}<0$，则阻尼 $F(\dot{x})$ 作正功，可以积累能量，称为**负阻尼**. 若阻尼在某一阶段内作负功，而在另一阶段内作正功，则系统将具有自激振动的性质.

(3) 惯性力为非线性

在某些情况下，振动系统的参数在一定程度上与系统的状态有关. 例如，图 1—6a 中的单摆，其摆长 l 就是 x 的函数. 又如，设重物由弹性线悬挂(图 1—6b)，线长 l 将与摆动角度 x 及角速度 $\dot{x}$ 有关. 由于物体实际上都不是绝对刚性的，在旋转时总要发生变形，因此旋转体对转轴的转动惯量一般不是常量，而与角速度有关. 这些都是惯性力为非线性的一些例子.

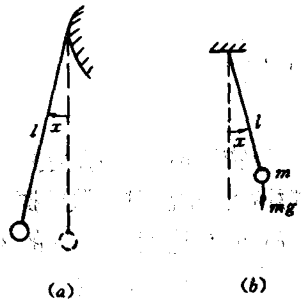


图 1—6

若一个力不仅与位移 x 有关，还与速度 $\dot{x}$ 有关，则这种力称为**混合型**的力. 除上述例子外，(1—1)式中的 $\varepsilon(x^2-1)\dot{x}$ 也是混合型非线性力.

2. 非线性振动系统与线性振动系统的比较

与线性系统相比，非线性系统无论在理论分析上或是在振动规律上都有本质上的不同. 这是研究非线性振动时必须加以注意的. 现列举非线性振动的几个主要特点如下，这些特点在以后的分析研究中可以得到证实.

(1) 对于非线性系统，叠加原理不能成立. 例如，在真空中的抛射体运动可看作是水平方向的匀速运动与铅垂方向的匀加速运动二者叠加而成，但如有与速度平方成正比的空气阻力作用，就不能再将二者叠加了. 又如，非线性系统

$$\ddot{x}+\alpha x+\beta x^3=H_1\cos\Omega_1 t+H_2\cos\Omega_2 t$$

式中，α、β 为小参数，其首次近似解中不仅有频率为 Ω_1、Ω_2 的项，还有频率为 $3\Omega_1$、$3\Omega_2$ 以及 $\Omega_1\pm2\Omega_2$、$\Omega_2\pm2\Omega_1$ 的项. 这与线性系统($\beta=0$)的受迫振动只是频率为 Ω_1 与 Ω_2 的两项叠加大不相同. 因此，若在非线性系统上作用一周期干扰力，不可以将它展开成