王文林 编著

现代中小学数学运算趣谈

上海科学普及出版社

现代中小学数学运算趣谈

王文林　编著

上海科学普及出版社

责任编辑　顾蕙兰

现代中小学数学运算趣谈
王文林　编著
上海科学普及出版社出版
(上海曹杨路 500 号　邮政编码 200063)

新华书店上海发行所发行　商务印书馆上海印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 6.5　字数 142 000
1991 年 4 月第 1 版　1991 年 4 月第 1 次印刷
印数 1—5000

ISBN 7-5427-0233-5/G·136　定价：3.80 元

序　言

“图论”是近二十年来非常活跃、蓬勃发展的一个数学分支，在物理学、化学、信息论、计算机科学等许多领域中，都有着广泛的应用。

本书借助于生活中的实例，用说故事的形式，以简单生动的语言，深入浅出地阐述了图论的一些基本知识，包括：图的概念、欧拉问题、哈密顿回路、匹配和拉姆赛数等主要内容，是广大中学生的良师益友。本书还有一定数量的习题，并附有习题解答，供读者练习时参考。

本书也是中学数学教师的助手，进入课堂，能成为中学生数学兴趣小组活动的内容，兼作数学竞赛的辅导材料。

本书编者曾将本书内容，在上海市某些中学及区青少年科技站进行实践，深受中学生欢迎。

深信读完这本书，可以增长智慧，培养数学竞赛的技能技巧，开拓思路，培养敏捷的思想方法，并进一步激发学习图论的兴趣，奠定后续学习的基础。

本书承李慰萱教授审阅，并得到了刘瘦侠、王伟钰和顾文琪副教授的诸多帮助，在此深表谢忱。

本书由沈云霞副教授主编，由金德福、张志明、徐序定、车启范、吴纪新编写。

编　者

一九九〇年七月

目　　录

第一部分　听故事　学图论

图论是一个应用十分广泛而又极其有趣的数学分支。它的诞生与发展同很多的数学游戏有关，在我们的日常生活中也时时会遇到不少与图论有关的饶有趣味的问题。

一、什么是“图”

图论顾名思义是一门研究“图”的理论。它的对象是“图”。但是我们这里所指的“图”自然不是读者所熟悉的诸如地图、零件图或在几何课本上所见到的几何图形等等。它可以代表现实世界的各种各样事物，表达它们之间的各种关系，能解决许多生活中、生产上和科研中的实际问题。下面让我们先通过一个例子，给大家介绍什么是“图”。

例1：有五个人，我们不妨用A、B、C、D、E来表示他们。他们之间相互认识的关系是：A分别与B、C相互认识。B分别与A、D相互认识。C与A相互认识。D与B相互认识。E与其他四个人都不认识。

他们的认识关系可以用一个图来表示。我们用v_1、v_2、v_3、v_4、v_5五个顶点分别表示A、B、C、D、E五个人，在相互认识的两个人之间，我们就在相应的两个顶点之间联结一条边。这样就得到了图1-1记作图G。

图论中所讲的图：由一些顶点和一些边组成，每一条边联结两个顶点，这两个顶点称为这条边的端点。一条边的两个

端点可以是同一个顶点(此时这条边称为环)或者是两个不同的顶点。

图1-1中的图G,含有顶点集$V=\{v_1、v_2、v_3、v_4、v_5\}$,边集$E=\{e_1、e_2、e_3\}$。

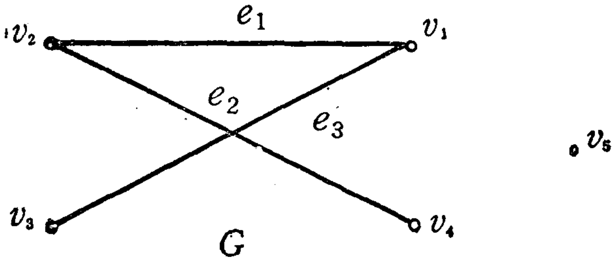

图 1-1

在图G中,我们注意的是给定两顶点,它们之间是否有边进行联结。而对于这些顶点的位置,边的长短曲直都是无关紧要的。同样是上面这个例子,我们也可以画成下面的二个形状。

图1-1、图1-2和图1-3,它们的顶点集与边集都相同,并且顶点与顶点、顶点与边的关系也是固定的,即v_1与v_2,v_1与v_3,v_2与v_4之间都有一条边相联结,而v_5与其他四个顶点都没有

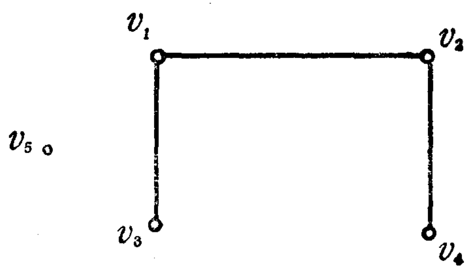

图 1-2

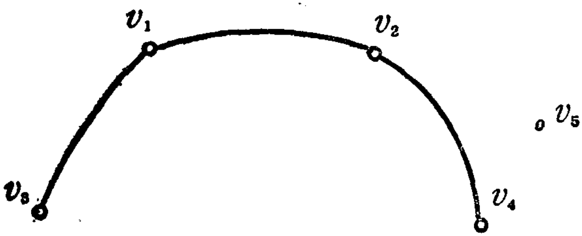

图 1-3

边相联结。所以我们就认为它们是同一个图。

如果图G的两个顶点v_1与v_2之间有一条边e_1相联结，那么我们就称顶点v_1与顶点v_2是相邻的。也可说边e_1与顶点v_1、(v_2)相关联的，v_1、v_2是e_1的两个端点。在图G中 v_5与其它四个顶点都不相邻，则称v_5为孤立点。由一个顶点关联的边的条数，称为该顶点的度数，记作$d(v)$。每个环算作两条边。从图1-1中可知v_1的度数是2，即$d(v_1)=2$。v_2的度数也是2，即$d(v_2)=2$。v_3与v_4的度数都是1，即$d(v_3)=1$，$d(v_4)=1$。孤立点v_5的度数为零，即$d(v_5)=0$。

若顶点的度数是奇数，则称该顶点为奇度点。若顶点的度数是偶数，则称该顶点是偶度点。图1-1中的顶点 v_1与v_2 是偶度点，v_3与v_4是奇度点。孤立点v_5也是偶度点。

如果一条边e_1的两个端点也是另一条边e_2的两个端点，就称e_1与e_2是平行边。

图 1-4 中边 e_1与e_2的端点都是 v_4与v_5 。e_1 与 e_2 就是平行边。

一个图如果没有环与没有平行边就称作是一个简单图。

例2：学校安排高二年级的同学下乡劳动。小瑛是班上的卫生员，她给班上的五个劳动小组各准备了一个药箱。她在每两个药箱里都放有同一种药，而每一种药都恰好只在两个药

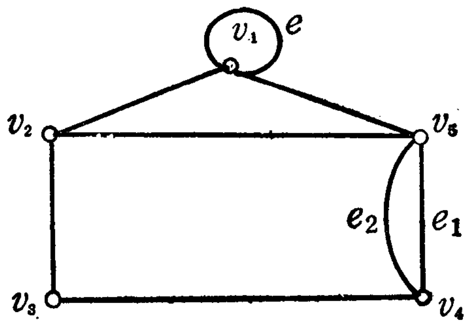

图 1-4

箱里出现。聪明的读者，你可知道小瑛在这五个药箱里共放了多少种药，而每个药箱中又各有几种药？

关于这个问题，我们不妨可用一个图来表示它。用五个顶点v_1、v_2、v_3、v_4、v_5分别表示五个药箱。若两个药箱里有一种相同的药。则我们在相应的两个顶点之间联一条边（就是图中的每条边都代表着一种药）。

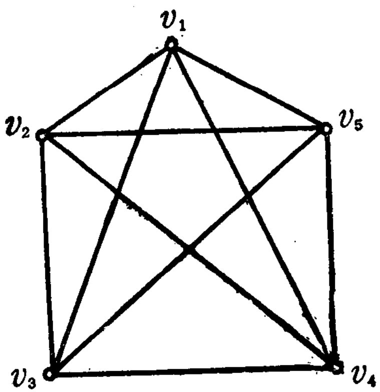

图 1-5

因为在每两个药箱中都有一种相同的药，因此图 G中任意两个顶点之间都有一条边相联结。又因为每种药恰好只在两个药箱里出现，即任意两个顶点之间有且只有一条边联结，并且图G中不同的边，是代表不同的药。我们就得到了图 G的形状，见图1-5。

从图1-5中可见，每个药箱里都只有四种药，而小瑛共放

置了十种药。

象图1-5这样，如果每一对不同的顶点有且仅有一条边相联，则称此图是一个完全图。

我们把具有n个顶点的完全图记作K_n，所以图1-5是个K_5图。下面我们还给出K_3与K_4图。

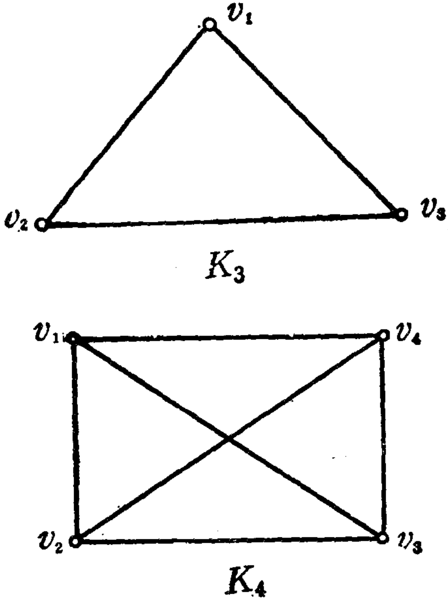

图 1-6

例3：徐老师给数学小组的同学出了这样一道思考题："有10个点，其中任意三个点都不在一条直线上，证明可以添加25条连接这些点的线段而不能构成以这10个点中的某三个点为顶点的一个三角形？

这个问题，我们可以用一个图来表示它。让我们先来讨论10个点的问题，先把10个点以5个点一组分为二类，第一类我

们用集合x表示，第二类用集合y表示。

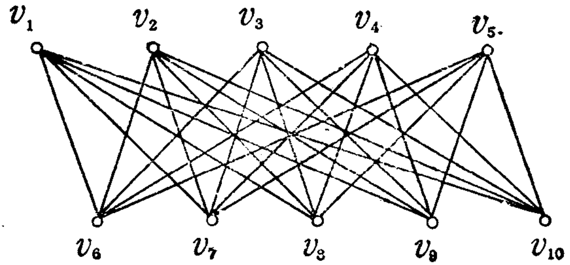

图 1-7

$x=\{v_1、v_2、v_3、{}_4v、v_5\}$，$y=\{v_6、v_7、v_8、v_9、v_{10}\}$。在图论中我们称(x，y)是一个二分类。将$v_1$、$v_2$、$v_3$、$v_4$、$v_5$这五个顶点分别与$v_6$、$v_7$、$v_8$、$v_9$、$v_{10}$联结起来，得到了图1-7。

在图1-7中共有25条边，但是在图中并没出现一个以这10个点中某三个点为顶点的一个三角形。

在图1-7中，我们把一个图G的顶点分成二个集合x、y，其中每条边都是一个端点在集合x中，另一个端点在集合y中。若图G中的顶点，划分成二个集合x和y，并且图G中的每一条边都有一个端点在集合x中，另一个端点在集合y中，这样的一个图G我们就称为偶图。记作G＝(x、y)。

同样可以证明，有2n个点，其中任意三个点不共线，可以添加n^2条连接这些点的线段，而不形成一个以这2n个点中某三个点为顶点的三角形。

最后我们给读者介绍路和连通的概念。

在图1-8中，我们考虑从顶点v_1出发沿着边走到v_4。

下面列出这样几种走法。

① $v_1e_5v_5e_7v_2e_2v_3e_6v_5e_4v_4$。

② $v_1e_5v_5e_7v_2e_1v_1e_5v_5e_4e_4$。

③ $v_1e_1v_2e_7v_5e_4v_4$。

④ $v_1e_5v_5e_4v_4$。

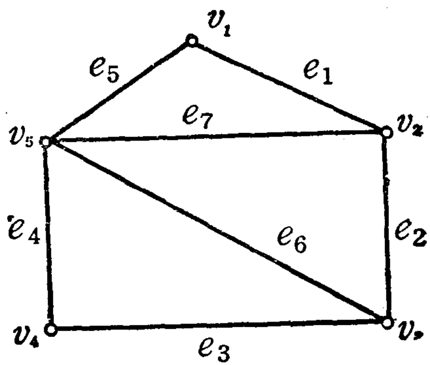

图 1-8

我们发现这些走法都是点与边交错的序列；开始于顶点v_1，终止于顶点v_4；在序列中每边相邻的两个顶点是该边的两个端点。我们称它是图G的一条**途径**。若途径的边$e_1, e_2\cdots\cdots, e_k$互不相同则称它为**迹**。上述的四种走法都是图G的一条途径，而①、③、④又是迹。又若途径中不仅边互不相同，且顶点$v_0, v_1, \cdots\cdots, v_k$也互不相同，则此途径又称为**路**。所以上述的走法中③、④又是路。

在图G中，且任意二个顶点间总存在着一条途径，则称图G是一个连通图。

图1-9是个连通图，而图1-10是个不连通的图。

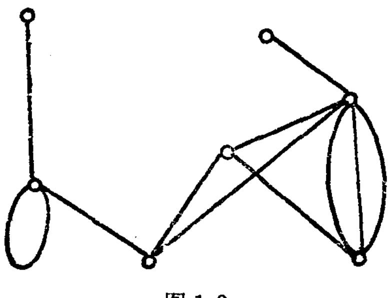

图 1-9

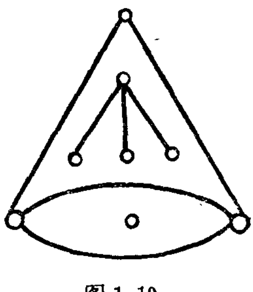

图 1-10

通过上面的例子，我们将图论的一些简单的知识给读者作了介绍，大家一定也对“图论”发生了浓厚的兴趣。下面我们想通过大家所熟悉的生活实例，继续地把“图论”的一些基本知识、基本方法介绍给大家。

二、握手问题

今天是星期天，正巧又是小明15周岁生日。早在数星期前，小明邀请了他在小学和中学中的一些好友，前来他家参加生日庆祝。

时钟刚打过九下，小胖第一个风风火火地冲进门来。“小明，这是我给你的生日礼物，祝你生日快乐！”

小明接过小胖手上的礼物，原来是几本中学生数学课外丛书，十分高兴，真是“好友知我心”。突然，小明的头脑里萌生出一个念头。

“小胖，谢谢你的礼物，等会儿大家到齐后，我们一起做一个游戏。”

不一会儿，小明所邀的10个同学都来了。小明向他的客人提出了游戏的要求，要大家相互间握握手，每个人将自己与其他人握手的次数记在心里。大家好奇地答应了。

大家握完手后，小明开口道：“现在请握过奇数次(1、3、5、7等等)手的人站到我的左边，握过偶数次(0、2、4、6等等)手的人站到我的右边。”

大家正要按小明所讲的要求分开站时，小明又摆了摆手，胸有成竹地：“请大家再等一会儿，虽然我不知道你们每个人握了多少次手，但站到我左边的，也就是握过奇数次手的人必然是成双的，或0个、或2个、4个、6个、8个、10个，决不可能是成

单的。”

等到大家分开来站后，果然站到小明左边的有4个人。小明真的能掐会算？大家纷纷要小明说出其中的缘由。

小明笑了笑，他走进厨房拿出一大把筷子，要求凡是互相握过一次手的两个人，从他手里领取一双筷子，每人各执其一，多握多领依次类推。每人手中拿的筷子数就是他握手的次数。接着小明又要求每人把手中成双的筷子还给他。如持有2只筷子的就还他一双，持有3只的，除还他一双以外还余1只留在手中。这样握偶数次手的人，手上的筷子都还到了小明的手中，握奇数次手的人手上还留有1只筷子。由于小明发筷子时是成双成对发出的，所以没有收回的筷子必定也是成双的。但是由于握奇数次手的人，他们的手中都只持有1只筷子，这就是说握奇数次手的人一定是成双的。

大家对小明这样的解释感到很高兴。这个游戏顿使小明的生日庆祝活动增添了不少的情趣。

亲爱的读者，这个游戏事实上是图论中的一个重要结论。

将学生用顶点表示，两学生相互之间握手的话就在相应的两顶点之间联一条边，得到图G。在图G中每一条边相当于一双筷子，每一顶点的度数相当于每一个学生手中所持的筷子数，就得到：

图G中所有顶点的度数之和，是图G中所有边数之和的2倍，并且奇度点的个数一定有偶数个。

亲爱的读者，你们能否应用这个结论来解释匈牙利的一道数学竞赛题：“证明，任何一群人中，认识这群人中奇数个人的人有偶数个。”

握手确是一件十分有趣的事儿，让我们再来讨论一个握手的趣题吧！

某个国际会议共有n个代表出席，许多认识的朋友，大家见了面后都热情地握手问好。在所有参加会议的代表中，任意的四个人中发现其中必都有一个人与其他的三个人握过手。根据这个情况我们可以断定在任意的四名代表中必定有一个人与其他n－1名代表都握过手。

这个问题确实非常有趣。我们可以作这样的解释。

将这n名代表分别用n个顶点来表示。假若其中的两名代表相互之间没有握过手的话，我们就在相应的两个顶点之间联一条边。

根据告诉我们的条件：在这n名代表中任意的四个人中都有一个人与其他的三个人握过手。所以在图G中，任意的四个顶点间必有一个顶点与其他的三个顶点不相邻。问题所要证明的结论是在任意的四个顶点中，必有一个孤立点，也就是说，G中至多只有三个顶点不是孤立点。

按问题的条件，图G中不能有两条没有公共端点的边，因为如果 v_1、v_2 与 v_3、v_4 是这样的四个顶点，那末这四个顶点也不存在一个顶点与其他三个顶点都不相邻，所以图G中每两条边都有公共端点。另外，图G中如果最多只有两条边，那么因为这两条边有公共端点，就不可能有四个顶点不是孤立点，结论当然成立，这样就知道，图G中至少有三条边，这三条边中每两条边都有公共端点，如图2-1或图2-2所示：

如果按图2-1，不可能有第四条边与这三条边都有公共端点，因此，图G中没有其它边，即只有这三个顶点不是孤立点。如果按图2-2，这四个顶点并不满足问题的条件，因此是

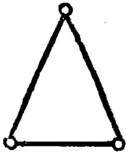

图 2-1

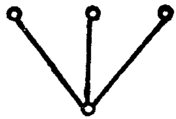

图 2-2

不可能的。这样就证明了图G中最多只有三个顶点不是孤立点。

三、巧妙的安排

吉米是绅士俱乐部的主任，俱乐部中共有99个成员，其中每个人认识的人数恰好都大于66。吉米想从他们中间找出相互认识的4个人，在周末晚上安排一场牌局。可是到了当天，牌局还没有安排妥当，这可真愁煞了吉米。正在这时，吉米在大学数学系学习的儿子小吉米回家了。小吉米看到父亲面露难色，似有什么解决不了的难题，关切地上前去询问。

于是老吉米把事情向儿子和盘托出。当小吉米得知这99个绅士中，每个人都认识其中的三分之二以上的人时，他马上劝慰父亲不必担心，他能从这99个人中找出4个人，使他们能参加今天晚上的牌局。

果然不多时小吉米从这99个绅士中，指出了查利、约瑟、约翰和亨利4个人。老吉米仔细一看，果真这四个人是互相认识的。见儿子替他解决了这一难题，老吉米喜滋滋地夸赞起来："你真了不起，亲爱的。你是怎么找出来的？"

"爸爸，这没什么，我是用了刚学过的《图论》知识。"小吉米毫不掩饰自己的喜悦。

亲爱的读者，小吉米是用什么方法找到这四个人的呢？

作一个图G，用99个顶点分别表示这99个绅士。如果两个人之间互不认识时，就在这相应的两个顶点之间联一条边。因为每个绅士认识的人数都超过他们总人数的三分之二，即大于66个人，所以对每个顶点 v_1，它所引出的边数不会超过99－1－67＝31条。

小吉米先选定了喜爱打牌的查利先生（我们把查利对应的顶点不妨记作 v_1）。而查利认识的人超过66个，就在这66人中，小吉米又进而选定了约瑟（我们也把约瑟对应的顶点记作 v_2）。见图3－1。

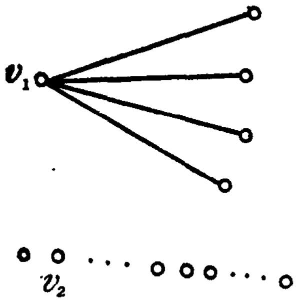

图 3-1

这时图G中还剩下97个顶点，其中与查利（v_1）或与约瑟（v_2）相邻的顶点的个数不会超过31＋31＝62个。因而在这97个顶点中，至少有35个人同时认识查利和约瑟。小吉米在这35个人中又选定了约翰（我们把约翰对应的顶点记作 v_3）。见图3－2。

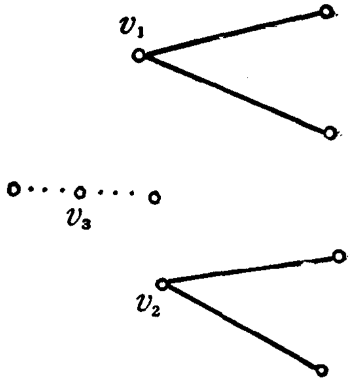

图 3-2

这时图G中还剩下96个顶点。因为与 v_1、v_2、v_3 至少有一个相邻的点的个数不会超过31＋31＋31＝93个。因此在这96个顶点中至少有3个顶点均不与 v_1、v_2、v_3 相邻，也就是说