王学理　孔庆海　主编

高等数学全析全解

MATHEMATICS

NEUPRESS
东北大学出版社

高等数学全析全解

王学理　孔庆海　主　编
付连魁　杨中兵　副主编

东北大学出版社
·沈阳·

内容提要

本书将高等数学习题进行系统分类，将由车向凯、谢崇远主编的《高等数学》教材中的所有习题进行了全析全解.

全书共含十一章，前十章是上述教材中的前十章的全部习题，最后一章是东北大学近年来期终考试的真题及其详解.

书中所给出的解法力求简练清楚又不失连贯性，一些题给出了多种解法或多种证法，对于开拓思路大有益处.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学全析全解 / 王学理，孔庆海主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2005.10

ISBN 7-81102-200-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.①王…　②孔…　Ⅲ.高等数学-高等学校-解题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 119219 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市光华印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：170mm×228mm
印　　张：24
字　　数：554 千字
出版时间：2005 年 10 月第 1 版
印刷时间：2005 年 10 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000 册
责任编辑：孙　锋　　　　责任校对：季冬亮
封面设计：唐敏智　　　　责任出版：秦　力

定　　价：26.80 元

本书常用数学符号说明

$\forall x$	对任意的 x.
$\exists x$	存在 x.
$\in$	属于.
$\bar{\in}$	不属于.
$\cup$	集合的并.
$\cap$	集合的交.
$\subseteq$	包含于.
$U(p_0)$	点 p_0 的邻域.
$U(p_0, \delta)$	点 p_0 的 δ 邻域.
$\dot{U}(p_0, \delta)$	点 p_0 的去心 δ 邻域.
max	最大.
min	最小.
$\ll$	远小于.
$\equiv$	恒等于.
$(2n)!!$	$2n$ 的双阶乘，$(2n)!! = 2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)$.
$[x]$	x 取整，表示不大于 x 的最大整数.
$f(x) \in C[a, b]$	$f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的连续函数.
$f(x) \in C^k[a, b]\ (k \geqslant 1)$	$f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的 k 阶连续可导函数.
$f(x) \in R[a, b]$	$f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数.
$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$	表示三维向量.

数学家中外文对照表

Abel, N. H.	阿贝尔（挪威）	1802—1829 年
Bernoulli, Johann.	伯努利（瑞士）	1667—1748 年
Cauchy, A. L.	柯西（法）	1789—1857 年
Clairaut, A. C.	克莱罗（法）	1713—1765 年
D'Alembert, J. L. R.	达朗贝尔（法）	1717—1783 年
Dedelcind, J. W. R.	戴德金（德）	1831—1916 年
Descartes, R.	笛卡尔（法）	1596—1650 年
Euclid	欧几里得（希腊）	公元前 450—前 374
Euler, L.	欧拉（瑞士）	1707—1783 年
Fourier, J. B. J.	傅立叶（法）	1768—1830 年
Fermat. P. de	费马（法）	1601—1665 年
Gauss, K. F.	高斯（德）	1777—1855 年
Green, G.	格林（英）	1793—1841 年
Jacobi, C. G. J.	雅可比（德）	1804—1851 年
Lagrange, J. L.	拉格朗日（法）	1736—1813 年
Laplace, P. S. M.	拉普拉斯（法）	1749—1827 年
Leibniz, G. W.	莱布尼茨（德）	1646—1716 年
L' Hospital, G. F.	洛比达（法）	1661—1704 年
Maclaurin, C.	麦克劳林（英）	1698—1746 年
Riemann, G. F. B.	黎曼（德）	1826—1866 年
Rolle, M.	罗尔（法）	1652—1719 年
Peano, G.	皮亚诺（意大利）	1858—1932 年
Taylor, B.	泰勒（英）	1685—1731 年
Weierstrass, K.	魏尔斯特拉斯（德）	1815—1897 年

前　　言

由车向凯、谢崇远主编的《高等数学》已由高等教育出版社出版发行，这是一套为理工科院校本科生编写的高等数学教材. 该书选用了大量的习题，以供学习者演练. 这些习题取材广泛，有些题技巧性较强，难度也稍大，使得初学者感到困难.

针对上述情况，我们组织主要由原书编者参加的具有丰富教学经验的高等数学任课教师编写了这本《高等数学全析全解》. 本书有以下四个特点.

一、解答详尽

除极简单题外，我们对教材中除第 11 章的数学实验类以外的全部习题给出全部解答，带 * 的题目尽管超出了对本科学生的要求，但本书也给出了解答，尽量做到步骤细致周全，没有大的跨跃.

二、注重分析

对于难度较大的题目，我们都给出解题思路，在解题过程中注重对题目的分析. 有些题目我们给出了多种解法或多种证法，这对于开拓读者的思路大有益处.

三、自成体系

本书虽然是配合上述教材所编写的，但它又自成体系，即使读者手中没有上述教材，也可以独立阅读. 实际上，本书是将高等数学诸多内容进行了系统的分类，又对各类问题进行了全析全解.

四、内容翔实

本书覆盖面广、类型全，包含的题目类型有是非判断题、填空题、选择题、计算题、应用题和证明题等，给出的所有解答都力求清楚明白.

全书共含十一章. 参加本书编写的有孙艳蕊、谢崇远、王学理、车向凯、付连魁、孔庆海、杨中兵、孙承志. 全书由王学理、孔庆海统稿并担任主编.

本书适用于理工科院校的本科生，对于那些有志考研的学子亦不失为一本内容翔实的参考资料. 本书亦可作为高等数学任课教师的教学参考书.

我们衷心希望学生先自己动手做题，然后再阅读本书，不可用它来“抄作业”. 如果本书能为学生们的学习带来有益的帮助，那正是我们的希望. 书中存在的不足之处，仍烦读者不吝赐教.

作　者

2005 年 9 月 28 日于东北大学

目　录

第 1 章　函数与极限

习题 1.2　函　数

1. 下列函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=x^2$，$g(x)=\sqrt{x^4}$.

【解】 相同. 因为 $g(x)=\sqrt{x^4}=x^2$.

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$，$g(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$.

【解】 不同. 因为两个函数的定义域不同.

$f(x)$ 的定义域是 $x>2$；$g(x)$ 的定义域是 $x>2$ 或 $x<1$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\lg\sin\dfrac{\pi}{x}$.

【解】 要使 $f(x)$ 有意义，必须有 $\sin\dfrac{\pi}{x}>0$. 这时

$$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi,\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

或

$$-2k\pi<\frac{\pi}{x}<(-2k+1)\pi,\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

解得，$\{x\mid x>1\}\cup\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{2k+1}<x<\dfrac{1}{2k},\ k=1,\ 2,\ \cdots\right\}$

$$\cup\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2k-1}<x<-\frac{1}{2k},\ k=1,\ 2,\ \cdots\right\}.$$

(2) $f(x)=(x-\lg x)\sqrt{\sin^2x-1}$.

【解】 要使 $f(x)$ 有意义，必须有 $x>0$ 且 $\sin x=\pm1$，解得

$$\left\{x\,\middle|\,x=\frac{2k+1}{2}\pi,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\right\}.$$

3. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,\ 1]$，试求下列函数的定义域.

(1) $f(x^2)$.

【解】 因 $f(x)$ 的定义域为 $[0,\ 1]$，所以要使 $f(x^2)$ 有意义，须有 $x^2\in[0,\ 1]$，即 $x\in[-1,\ 1]$，这就是 $f(x^2)$ 的定义域.

(2) $f(\sin2x)$.

【解】 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0,\ 1]$，所以要使 $f(\sin2x)$ 有意义，须有

$$0\leqslant\sin2x\leqslant1$$

故定义域为 $\left\{x \,\middle|\, k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2k+1}{2}\pi,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\right\}$.

4. 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$的定义域.

【解】 $f[f(x)]=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$，所以要使 $f[f(x)]$有意义，须有

$$1-x\neq 0,\ 且\ x\neq 0,$$

即 $x\neq 0,\ 1$.

$f[f(x)]$的定义域为$\{x \mid x\in R$ 且$x\neq 0,\ 1\}$.

$f\{f[f(x)]\}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$，要使 $f\{f[f(x)]\}$有意义，$f[f(x)]$必须有意义，因此 $f\{f[f(x)]\}$的定义域为$\{x \mid x\in R$ 且$x\neq 0,\ 1\}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<1\\ |x|-2, & 1\leqslant |x|<3,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$和$g[f(x)]$.

【解】 $f[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)<0\\ 1, & g(x)\geqslant 0.\end{cases}$

由 $g(x)$的表达式知，当 $1\leqslant |x|<2$ 时，$g(x)<0$；当 $|x|<1$ 或 $2\leqslant |x|<3$时，$g(x)\geqslant 0$. 因此

$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & 1\leqslant |x|<2\\ 1, & |x|<1 或 2\leqslant |x|<3.\end{cases}$$

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f^2(x), & |f(x)|<1\\ |f(x)|-2, & 1\leqslant |f(x)|<3.\end{cases}$$

由 $f(x)$的表达式知，当 $x<0$ 时，$|f(x)|=0<1$；当 $x\geqslant 0$ 时，$1\leqslant |f(x)|=1<3$. 因此

$$g[f(x)]=\begin{cases}2, & x<0\\ -1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

6. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

【解】 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}\quad (0<y<1)$.

所求反函数 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}\quad (0<x<1)$.

(2) $y=\begin{cases}1+x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ -(1+x^2), & x<0.\end{cases}$

【解】 由 $y=\begin{cases}1+x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ -(1+x^2), & x<0\end{cases}$ 解得 $x=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y>1\\ 0, & y=0\\ -\sqrt{-y-1}, & y<-1.\end{cases}$

所求反函数 $y=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x>1\\ 0, & x=0\\ -\sqrt{-x-1}, & x<-1.\end{cases}$

7. 证明.

(1) 定义在(a, b)上的任意函数$f(x)$必能表示为一个非负函数和一个非正函数之和.

【证明】 设 $f_1(x)=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$, $f_2(x)=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$.

显然 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$且 $f_1(x)\geqslant 0$, $f_2(x)\leqslant 0$. 结论成立.

(2) 定义在(a, b)上的任意函数$f(x)$必能表示为一个偶函数和一个奇函数之和.

【证明】 设 $f_1(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_2(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

则 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 且

$f_1(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=f_1(x)$, 即 $f_1(x)$为偶函数;

$f_2(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-f_2(x)$, 即 $f_2(x)$为奇函数.

因此, 结论成立.

8. 已知某一天波士顿的水平面在午夜 12 点恰处于高潮位, 水平面的高度在高潮位时达到 3.01m, 在低潮位时为 0.01m, 设下一个高潮位恰在 12 小时以后, 且水平面的高度由余弦曲线给出, 求出波士顿的水平面作为时间函数的表达式.

【解】 设 t 时刻水平高度为ym, 从午夜 12 点开始计时, 此时$t=0$. 根据题意, 有

$$y=A+A_0\cos\omega t \tag{1}$$

其中 $\omega=\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$, 且 $\cos\omega t=1$ 时, $y=3.01$, $\cos\omega t=-1$ 时, $y=0.01$. 代入(1)式有

$$\begin{cases}3.01=A+A_0\\ 0.01=A-A_0,\end{cases}$$

解得 $A=1.51$, $A_0=1.5$.

因此, 所求函数表达式为 $y=1.51+1.5\cos\dfrac{\pi}{6}t$.

9. 某运输公司规定货物的运价:在距离 a(单位:km)内为 k(单位:元/km);超过 a, 超出部分为 $0.8k$. 求运价 y 和里程 s 之间的函数关系.

【解】 $y=\begin{cases}ks, & 0<s\leqslant a\\ ka+0.8k(s-a), & s>a.\end{cases}$

习题 1.3 极 限

1. 观察下列数列的变化趋势, 判别哪些数列有极限. 如果有极限, 指出它们的极限.

(1) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$.

【解】 随着 n 的增大，$|x_n|$无限趋于零，从而 x_n 也无限趋于零，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = 0.$$

(2) $x_n = 1 + (-1)^n \frac{2}{n}$.

【解】 由(1)知，随着 n 的增大，$(-1)^n \frac{2}{n}$无限趋于零，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 + (-1)^n \frac{2}{n}\right] = 1.$$

(3) $x_n = (-1)^n \sin\frac{1}{n}$.

【解】 随着 n 的增大，$\frac{1}{n}$无限趋于零，$\sin\frac{1}{n}$也无限趋于零，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n} = 0.$$

(4) $x_n = \cos n\pi$.

【解】 $x_n = (-1)^n$，1 和 -1 交替出现，所以该数列的极限不存在.

(5) $x_n = 2^{(-1)^n}$.

【解】 $x_{2k} = 2$，$x_{2k-1} = \frac{1}{2}$，所以该数列的极限不存在.

(6) $x_n = \arctan n$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$.

2. 用极限定义证明.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(0.\overbrace{99\cdots9}^{n个}) = 1$.

【证明】 (1) 记 $x_n = 0.\overbrace{99\cdots9}^{n个} = 1 - 10^{-n}$，$|x_n - 1| = \frac{1}{10^n}$.

$\forall\, 0<\varepsilon<1$，只要取 $N = [-\lg\varepsilon]$，则 $n>N$ 时，$\frac{1}{10^n}<\varepsilon$，即$|x_n - 1|<\varepsilon$，由数列极限的定义知

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(0.\overbrace{99\cdots9}^{n个}) = 1.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

【证明】 记 $x_n = \frac{n}{2n+1}$，$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{n}$.

$\forall\,\varepsilon>0$，只要取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则 $n>N$ 时，$\frac{1}{n}<\varepsilon$，从而$\left|x_n - \frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，由数列极限的定义知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$.

【证明】 记 $x_n=\frac{n}{n^2+1}$，$|x_n-0|=\frac{n}{n^2+1}<\frac{1}{n}$.

$\forall\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则 $n>N$ 时，$\frac{1}{n}<\varepsilon$，从而 $|x_n-0|<\varepsilon$，由数列极限的定义知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0.$$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

【证明】 $|\cos x-\cos a|=\left|-2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|$.
因为对任意角度 α，当 $\alpha\neq0$ 时，有 $|\sin\alpha|<|\alpha|$，所以

$$|\cos x-\cos a|\leqslant2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|<|x-a|.$$

$\forall\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|\cos x-\cos a|<\varepsilon$，由函数极限的定义知 $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

3. 在 x_0 的某个去心邻域内，$f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，问是否有 $a>0$?

【解】 由已知条件，必有 $a\geqslant0$. a 有可能等于 0. 如取 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，对任何 x，$f(x)>0$. 取 $x_0=0$，由极限的定义可以证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{1+x^2}=0$.

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是否存在?

【证明】 因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由数列极限的定义有，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

而 $\big||x_n|-|a|\big|\leqslant|x_n-a|$，因此 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $\big||x_n|-|a|\big|<\varepsilon$，由数列极限的定义有，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在. 如 $x_n=(-1)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，数列 $\{y_n\}$ 有界，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

【证明】 因为数列 $\{y_n\}$ 有界，则 $\exists M>0$，对任意自然数 n，有 $|y_n|\leqslant M$.
又 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，由极限定义有，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N$ 时，有

$$|x_n|<\frac{\varepsilon}{M},$$

于是

$$|x_ny_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

6. 设 $x_n=2^{(-1)^nn}$，讨论数列 $\{x_n\}$ 的收敛性.

【解】 取子列 $\{x_{2k}\}$，$x_{2k}=2^{2k}$，显然 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=+\infty$. 因此，数列 $\{x_n\}$ 发散.

7. 证明.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$.

【证明】 $\left|\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}-2\right|=|\sqrt{x}-1|=\left|\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}\right|\leqslant|x-1|$

$\forall\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}-2\right|<\varepsilon$，由函数极限的定义知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=1$.

【证明】 考虑 $x\to0$ 时函数的极限，不妨设 $0<|x|<1$，则

$$\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}-1\right|=\left|\frac{-2x^2}{1+x^2}\right|<2|x|.$$

$\forall\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当 $0<|x-0|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{1-x^2}{1+x^2}-1\right|<\varepsilon$，由函数极限的定义知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=1$.

8. 设 $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$，求 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$. 试问$\lim\limits_{x\to1}f(x)$是否存在?

【解】 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$,

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{1-x}=-1$,

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$，故$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

9. 给出极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$的精确定义.

【解】 设 $\exists X_0>0$，当 $x<-X_0$ 时函数 $f(x)$有定义. 如果 $\forall M>0$(无论多么大)，总 $\exists X>X_0>0$，当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$为$x\to-\infty$时的无穷大，即

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty.$$

10. 试证函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在区间(0, 1]内无界，但当 $x\to0^+$ 时函数不是无穷大.

【证明】 $\forall M>0$，取自然数 n，使 $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$，记 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，则 $x_n\in(0,1)$且

$f(x_n)=\dfrac{1}{x_n}\sin\dfrac{1}{x_n}=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$.

因此，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在区间(0, 1]内无界.

下面证明当 $x\to0^+$ 时该函数不是无穷大.

取 $x'_n=\dfrac{1}{2n\pi}>0$，$n=1, 2, \cdots$，显然$\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=0$，但 $f(x'_n)=0$ ($n=1, 2, \cdots$). 因此，当 $x\to0^+$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$不是无穷大.

11. 对于数列$\{x_n\}$，如果$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【证明】 因为$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$，则由极限的定义有，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}^*$，当$k>N_1$时，

$$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon.$$

同理，由$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$有，对上述$\varepsilon$，$\exists N_2\in\mathbf{N}^*$，当$k>N_2$时，

$$|x_{2k}-a|<\varepsilon.$$

取$N=\max\{2N_1-1,\ 2N_2\}$，则对上述ε，当$n>N$时有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

12. 试证在自变量的同一变化过程中，若$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小；若$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大.

【证明】 以$x\to x_0$时的情形为例. 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

$\forall\varepsilon>0$，根据无穷大的定义，取$M=\dfrac{1}{\varepsilon}$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)|>M=\frac{1}{\varepsilon}.$$

即

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon.$$

所以$\dfrac{1}{f(x)}$是$x\to x_0$时的无穷小.

反之，设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，且$f(x)\neq0$.

$\forall M>0$，根据无穷小的定义，取$\varepsilon=\dfrac{1}{M}$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)|<\varepsilon=\frac{1}{M}.$$

由于$0<|x-x_0|<\delta$时$f(x)\neq0$，从而

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M.$$

所以$\dfrac{1}{f(x)}$是$x\to x_0$时的无穷大.

同理可证$x\to\infty$时的情形.

13. 试证数列$x_n=n^{(-1)^n}$无界.

【证明】 $\forall M>0$，总可取$n=2[M+1]$，$x_n=2[M+1]>M$，因此，数列$x_n=n^{(-1)^n}$无界.

习题 1.4 极限的运算

1. 回答下列问题.