高等学校教材

高等数学习题课讲义

（下册）

江兆林 等 编

南海出版公司

高等学校教材

高等数学习题课讲义

（下册）

江兆林 等编

南海出版公司

1994年·海口

前　言

鉴于目前许多院校，高等数学习题课多数没有教材，我们组织全国部分高等院校多年来一直从事高等数学教学，有丰富教学实践经验的教师编写了本书。

本书共分13章，分为上、下两册，分别与《高等数学》教材相对应。第一章函数与极限；第二章导数与微分；第三章中值定理与导数的应用；第四章不定积分；第五章定积分；第六章无穷级数；第七章微分方程；第八章空间解析几何；第九章多元函数的微分法；第十章重积分；第十一章曲线积分与曲面积分；第十二章矢量分析与场论初步；第十三章线性代数。每章又包括：一、本章重点；二、内容提要；三、典型例题分析；四、复习参考题。并且在书末配了八套各类考试题。

本章重点　各章的重点是根据各章的内容要点、目的要求和教材所处的地位所确定的，主要目的是使读者在教与学的过程中较好地把握好教材的重点。

内容提要　教材的各章节内容都有主次之分，对于主要内容，教师要讲好，学生要学好，书应该越读越薄，每一章中真正应该牢记住，并成为您解题武器的内容其实并不多，这一部分就是为这方面准备的。

典型例题分析　每章典型例题的选取，系统性强，采用由浅入深，逐步介绍各种方法与技巧的方式，一般包括：(1)是非题；(2)证明题；(3)计算题；(4)综合题；(5)经济生活中的实际应用例题。所选例题难易适度，联系实际，较客观地反映了学习高等数学应掌握

的水平，编者从多年高等数学习题课教学的经验出发，在许多例题上加了思路“分析”，“说明”，只要读者重视这两个方面，就可达到举一反三，触类旁通的目的。

复习参考题　我们考虑到目前教材中所配习题一般较少，特补充部分难易适中的习题供读者练习之用。

与同类教材相比，本教材突出体现三大特点：第一，淡化某些繁杂形式，注重核心内容；第二，加强了与物理等学科联系，增加了社会经济生活中的实际应用问题；第三，采用现代数学符号系统，渗透现代数学的思想与方法。

本教材可作师专、教育学院、职大、电大、夜大、成人函授的物理、化学、生物、地理理科专业和机械、电力、电子、化工等大专工科各专业的高等数学习题课教材或参考书。

在本书编写过程中，得到各参编院校有关领导的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

由于作者水平所限，时间又紧迫，教材中出现的缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正．以便今后修订再版。

编　者

1994年9月

目　录

第八章　空间解析几何

一、本章重点

1. 矢量的代数运算.
2. 矢量的模、方向角、方向余弦的概念和计算.
3. 在一定条件下,求平面或空间直线方程.
4. 研究平面与平面,直线与直线,平面与直线的相互关系.
5. 点到平面或空间直线的距离.

二、内容提要

1. 矢量代数

定义 8.1　既有大小又有方向的量称为矢量.

矢量坐标表示式:设点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\ &= a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\\ &= \{a_x,a_y,a_z\}.\end{aligned}$$

矢量的模:矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为 a 的模,记为 $|\boldsymbol{a}|$.

$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

单位矢量:模等于 1 的矢量.

$\boldsymbol{a}$ 的单位矢量,$\boldsymbol{a}^\circ=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

基本单位矢量：$\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$　$\boldsymbol{j}=\{0,1,0\}$，$\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$.

零矢量：模等于 0 的矢量，记为 $\mathbf{0}$. 规定 $\mathbf{0}$ 的方向是任意的.

方向角：设非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标轴 x 轴，y 轴，z 轴的夹角依次为 α,β,γ，则 α,β,γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角.

方向余弦：$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$，

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

矢量运算：设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，　$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$.

(1) 加法：符合平行四边形和三角形法则.

交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

坐标表示式：$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}$.

(2) 数乘：λ,μ 为数，

结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

坐标表达式：$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$.

(3) 数量积(点积，内积)

定义 8.2　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，$\theta$ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 间的夹角.

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

坐标表示式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零矢量，θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 间夹角，

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

性质：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零矢量

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}.$$

(4) 矢量积(叉积，外积)

定义 8.3　$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta,\theta\text{ 为 }\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{ 间夹角},$$

$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定.

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 不满足交换律.

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

坐标表示式

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

性质：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零矢量，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}.$$

(5) 混合积

定义 8.4　$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

坐标表示式

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.$$

几何意义：以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为相邻的三条棱作平行六面体，混合积

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

的绝对值即表示平行六面体的体积 V，即

$$V=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|.$$

性质：$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

2. 空间解析几何

(1) 平面方程

设平面法矢量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$.

点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

一般式：$Ax+By+Cz+D=0$.

三点式：设不在一直线上的三点

$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2),M_3(x_3,y_3,z_3)$,

则过 M_1,M_2,M_3 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0$.

a,b,c 分别为平面在三坐标轴 x,y,z 上的截距.

(2) 直线方程

设直线上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，直线的方向矢量 $S=\{m,n,p\}$.

一般式：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$

对称式(点向式，标准式)：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

参数式：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$;

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, & -\infty < t < +\infty. \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

(3) 点、直线、平面间的关系和判定

设点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$,

平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$,

$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

直线 $L: \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$.

$L_1: \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$,

$L_2: \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$.

M_1, M_2 间距离:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

π_1 与 π_2 相交,夹角为 θ,则

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

$L_1 \parallel L_2 \quad \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$,

$L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

L_1 与 L_2 相交,夹角为 θ,则

$$\cos\theta = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

$L \parallel \pi: \quad \Leftrightarrow mA + nB + pC = 0$.

$L \perp \pi$: $\quad \Leftrightarrow \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$.

L 与 π 相交，夹角为 θ，则

$$\sin\theta = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

点 M_0 到平面 π 的距离 d

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(4) 空间曲线方程

一般式：$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}$

参数式：$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$

投影式：由方程组 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 消去 z 得 $H(x,y) = 0$，则 $\begin{cases} H(x,y) = 0 \\ z = 0, \end{cases}$ 为空间曲线 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 在 xOy 坐标面上的投影曲线方程.

(5) 空间曲面方程

球面：$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$，

球心在 (a,b,c)，半径为 R.

椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$，$a,b,c$ 为椭球面的半轴.

圆 柱 面：$x^2 + y^2 = R^2$.

椭圆柱面：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

双曲柱面：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

抛物柱面：$x^2 - 2py = 0$.

旋转曲面：曲线$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$绕 z 轴旋转构成

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

椭圆抛物面：$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$，（$p$,$q$ 同号）

锥面：　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0.$

当 $a=b$ 时为圆锥面，

单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1,$

双曲抛物面：$z=\dfrac{y^2}{2q}-\dfrac{x^2}{2p}$，（$p$,$q$ 同号）

三、典型例题分析

例 1　已知两点 $A(1,1,1)$,$B(3,3,2)$. (1) $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BA}$ 表示什么？(2) 求$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BA}$ 在各坐标轴上的投影；(3) $\overrightarrow{AB}$ 有哪几种表达形式？(4) 求$\overrightarrow{AB}$ 的单位矢量.

解　(1) $\overrightarrow{AB}$ 表示 A、B 两点联线，方向由 A 指向 B 构成的矢量. AB 线段的长度为$\overrightarrow{AB}$ 矢量的模. 其值为

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2+(2-1)^2}=3.$$

$\overrightarrow{BA}$ 表示由 B 指向 A，即与$\overrightarrow{AB}$ 矢量方向相反且模相等的矢量.

(2) 矢量$\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴上的投影，等于矢量$\overrightarrow{AB}$ 终点 B 的 x 坐标与起点 A 的 x 坐标之差. $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴上的投影为

$$x=x_2-x_1=3-1=2,$$

$\overrightarrow{AB}$ 在 y 轴上的投影为 $y=y_2-y_1=3-1=2$,

$\overrightarrow{AB}$ 在 z 轴上的投影为 $z=z_2-z_1=2-1=1$,

$\overrightarrow{BA}$ 在 x 轴上的投影为 $x=x_1-x_2=1-3=-2$,

$\overrightarrow{BA}$ 在 y 轴上的投影为 $y = y_1 - y_2 = 1 - 3 = -2$,

$\overrightarrow{BA}$ 在 z 轴上的投影为 $z = z_1 - z_2 = 1 - 2 = -1$.

(3) $\overrightarrow{AB}$ 的表达形式有两种:一种有向线段表示法,线段长度为 $\overrightarrow{AB}$ 矢量的模,箭头表示 $\overrightarrow{AB}$ 矢量的方向.

另一种是坐标表示式

$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \{2,2,1\}$

或 $\overrightarrow{AB} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

(4) $\overrightarrow{AB}$ 的单位矢量 $\overrightarrow{AB^0}$ 为

$$\overrightarrow{AB^0} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{3} = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}\boldsymbol{k}.$$

例 2 已知矢量 $\boldsymbol{a} = \{x,y,z\}$,$\boldsymbol{a}^\circ$,$\boldsymbol{b}^\circ$ 是单位矢量.(1) 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}$,$0\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 说明 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^\circ$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}^\circ$,$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ$,$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^\circ)\boldsymbol{b}^\circ$ 的意义.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i} = \{x,y,z\}\cdot\{1,0,0\} = x$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}$ 代表 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影.同理 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j} = y$ 代表 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的投影.$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k} = z$ 代表 $\boldsymbol{a}$ 在 z 轴的投影.$0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 表示数 0 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是个零矢量.$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a} = 0$ 表示零矢量与任意矢量的点积是数量 0.

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^\circ = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \dfrac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|} = |\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$ 由此可知,矢量 $\boldsymbol{a}$ 与单位矢量 $\boldsymbol{b}^\circ$ 的点积表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 在矢量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}^\circ = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0}{|\boldsymbol{a}|} = |\boldsymbol{a}|,$$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模.

$$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ = \frac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \boldsymbol{a}.$$

$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ$ 表示矢量 $\boldsymbol{a}$.

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^\circ)\boldsymbol{b}^\circ = |\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}^\circ.$$

$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^\circ)\boldsymbol{b}^\circ$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的分矢量.

例 3　若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是单位矢量，那么 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是单位矢量吗？

答：不一定. 因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个矢量，当 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=1$ 时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 才是单位矢量. 但是 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 一般情况，$|a\times b|\leqslant 1$，只有当 $a\perp b$ 时，$\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=1$，这时 $a\times b$ 才是单位矢量.

例 4　设三个力 $\boldsymbol{F}_1=\{1,2,3\}$，$\boldsymbol{F}_2=\{-2,3,-4\}$，$\boldsymbol{F}_3=\{3,-4,5\}$ 同时作用于一质点，质点从原点沿射线的方向移动到点 $A(2,1,-1)$. 求合力 $\boldsymbol{R}$ 所作的功（力的单位为牛顿，距离的单位为米）；并求合力 $\boldsymbol{R}$ 与位移 $\overrightarrow{OA}$ 的夹角.

解　$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$

$$=\{1-2+3,2+3-4,3-4+5\}=\{2,1,4\},$$

$\overrightarrow{OA}=\{2,1,-1\}$，

合力所作的功为：

$W=\boldsymbol{R}\cdot\overrightarrow{OA}=2\times2+1\times1+4\times(-1)=1$（焦耳），

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{R},\overrightarrow{OA}})=\frac{\boldsymbol{R}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\boldsymbol{R}||\overrightarrow{OA}|}=\frac{1}{\sqrt{21}\sqrt{6}}=\frac{1}{3\sqrt{14}},$$

$$(\boldsymbol{R},\overrightarrow{OA})=\arccos\frac{1}{3\sqrt{14}}.$$

例 5　证明下列恒等式：

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2).$$

并说明它的几何意义.

证　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$

$$=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

$$=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^2$$

$$=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2),$$

设平行四边形相邻两边为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，则两条对角线分别为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.（图 8－1）因为

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2,$$

$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$,

$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2, \boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{b}|^2$,

所以上述恒等式即表明平行四边形对角线的平方和等于各边的平方和.

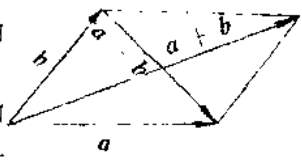

图 8 − 1

例 6 已知两点 $M_1(1,3,0)$ 和 $M_2(2,2,\sqrt{2})$ 试求矢量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模,方向余弦,方向角和 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的单位矢量 $\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2-1,2-3,\sqrt{2}-0\}=\{1,-1,\sqrt{2}\}$,

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2}=2,$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{-1}{2},\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{2\pi}{3},\gamma=\frac{\pi}{4},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\{\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\}.$$

例 7 求垂直于矢量 $\boldsymbol{a}=\{1,-3,1\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{2,-1,3\}$ 的单位矢量.

解 方法一:设所求单位矢量为

$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,由于要求它与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直,并且它的大小为1,因此有

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0,\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=0,\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=1.$$

用坐标写出,即得方程组

$$\begin{cases}x-3y+z=0,\\2x-y+3z=0,\\x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$$

解得 $x=\pm\dfrac{8}{3\sqrt{10}},y=\pm\dfrac{1}{3\sqrt{10}},z=\mp\dfrac{5}{3\sqrt{10}}$,

所以 $\quad c=\pm\dfrac{1}{3\sqrt{10}}\{8,1,-5\}$.

方法二 $\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 就是垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的矢量，而

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=\{-8,-1,5\},$$

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-8)^2+(-1)^2+5^2}=3\sqrt{10},$$

于是 $\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{3\sqrt{10}}\{-8,-1,5\}$.

就是所求的单位矢量. 此外与它方向相反的单位矢量

$\dfrac{1}{3\sqrt{10}}\{8,1,-5\}$ 亦为所求.

例 8 应用矢量证明不等式：

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$$

其中 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 为任意实数，并指出等式成立的条件.

证 设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ 则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}),$$

故

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|.$$

即

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}.$$

当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 即 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$ 时，等式成立.

例 9 从点 $A(2,-1,7)$ 沿矢量 $\boldsymbol{a}=\{8,9,-12\}$ 的方向取线段长 $|AB|=34$，求点 B 的坐标.

解 设 $B(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{AB}=\{x-2,y+1,z-7\}$.

因为 $\quad \boldsymbol{a}^\circ=\dfrac{1}{17}\{8,9,-12\}$,