

工人技術學校教學用書

維哥德斯基著

数 学



机械工业出版社

工人技術學校教學用書



數 學

維 哥 德 斯 著

蔡 本 源 譯

出版者的話

這本書是根據蘇聯勞動後各部教育書籍出版社 1954 年出版的 'Математика' 一書譯出的。這一讀本是根據蘇聯 1953 年工藝、鐵路、礦業工人技術學校數學教學大綱編寫的。

在這本書裏，著者除了闡明數學的理論外，而且從實際出發引用了很多日常工作中常碰到的例題來說明數學的實用價值。著者在編寫次序和一些數學法則上打破了傳統習慣，採用了新的次序和不常見的法則，力求使數學理論更好地和實際結合，發揮數學的實用功能。

本書可採用為工人技術學校的教材，也可用為工人的自修讀物。

蘇聯 М. Я. Виноградов 著 'Математика'

(Третье издание 1954 年第一版)

No. 1152

1956 年 8 月第一版

1956 年 8 月第一版第一次印刷

850×1168¹/₃₂ 字數 225 千字 印張 9⁹/₁₆ 00,001-40,000 冊

機械工業出版社（北京東交民巷 27 號）出版

機械工業出版社印刷廠印刷 新華書店發行

北京市書刊出版業營業許可證出字第 008 號 定價(9)1.30 元

目 次

序言	9
----	---

第一篇 代數學

第一章 初步知識	11
----------	----

1 關於代數學對象的概念 (11)——2 簡短的歷史知識 (12)——3 文字的应用。公式 (13)——4 數值的代入 (14)——5 运算符号 (15)——6 乘方 (15)——7 括号 (16)——8 正數和負數 (16)——9 對於怎樣的量，負數才有意义 (18)——10 正數和負數的絕對值 (18)——11 正數和負數的加法 (19)——12 正數和負數的減法 (21)——13 加法和減法的簡式 (21)——14 正數和負數的乘法 (23)——15 正數和負數的除法 (24)——16 「正号」和「負号」的应用 (25)
--

第二章 文字式	26
---------	----

17 代數和 (26)——18 係數 (26)——19 同類式 (27)——20 整理同類項 (27)——21 單項式和多項式 (28)——22 和式和多項式的加法和減法 (29)——23 乘方和單項式的乘法 (29)——24 數字乘以和式。展開括号 (30)——25 添置括号 (31)——26 和式乘以和式 (31)——27 簡化乘法的公式 (32)——28 多項式的因式分解 (34)——29 代數分式。約分 (36)——30 乘方和單項式的除法 (37)——31 數目除和 (38)——32 分式的运算 (39)
--

第三章 一次方程式	41
-----------	----

33 等式 (41)——34 恆等式 (41)——35 方程 (42)——36 解方程的第一个基本法則 (43)——37 解方程的第二個基本法則 (44)——38 解簡單方程的步驟 (45)——39 方程的次數 (47)——40 分母中含有未知數的方程 (47)——41 關於沒有解的方程 (49)——42 關於解方程的歷史知識 (50)——43 用方程解答問題 (51)——44 關於沒有解答的問題 (54)——45 文字方

程(56)——46 解文字方程(58)——47 用文字方程解問題(59)——48 用聯立方程解問題(61)——49 二元聯立方程(62)——50 解二元一次聯立方程(代入法)(63)——51 用代數加法解聯立方程(66)

第四章 平方根和立方根.....69

52 方根(69)——53 方根的近似值(70)——54 用平方表開平方(1到1000)(72)——55 用平方表開平方(任意數)(74)——56 用表格開立方(76)——57 不用開方表開平方(第一種方法)(77)——58 第二種不用開方表開平方的方法(81)——59 不用開方表開立方(84)

第五章 二次方程.....86

60 二次方程(86)——61 不完全二次方程的解法(86)——62 二次方程的標準形式(88)——63 二次方程的解法(88)——64 解簡化的二次方程的公式(90)——65 解不简化二次方程的公式(92)——66 用二次方程解答的問題(94)

第六章 函數和圖象.....98

67 變量和常量(98)——68 函數關係(98)——69 變量和函數(99)——70 用表給出函數(100)——71 用公式給出函數(100)——72 座標(101)——73 平面上點的座標(102)——74 根據點的座標作出點(103)——75 用圖象給出函數(104)——76 比例關係(106)——77 比例的判別法(107)——78 用公式表示比例關係(108)——79 用圖象表示比例關係(110)——80 反比例關係(112)——81 反比例的判別法(113)——82 用公式表示反比例關係(114)——83 用圖象表示反比例關係(114)

第二篇 幾何學

第一章 初步知識..... 119

1 關於幾何學對象的概念(119)——2 幾何體、面和綫(119)——3 直綫、綫段、射綫(123)——4 直尺的校驗(125)——5 綫段的作圖和綫段的比較(125)——6 圓周、圓心、半徑、弦、直徑(128)——7 圓、扇形、弓形(129)——8 割綫和切綫(130)——9

同圓周上的弧的比較 (130)——10 弧在圓周上的轉移 (131)——11 角 (132)——12 角的度量 (134)——13 量角器 (135)——14 一度弧 (137)——15 圓心角 (137)——16 直角、銳角和鈍角。平角 (138)——17 垂直綫和斜綫 (139)——18 畫圖三角板和畫垂直綫 (140)——19 三角板的校驗 (141)——20 鄰補角 (142)——21 對頂角 (144)——22 平行綫 (144)——23 平行的判別法 (146)——24 平行綫的作圖 (147)——25 對應邊互相平行的角 (148)

第二章 三角形..... 150

26 多邊形 (150)——27 三角形 (151)——28 根據三邊作三角形 (155)——29 三角形全等的第一判別法 (156)——30 根據兩邊一夾角作三角形。三角形全等的第二判別法 (157)——31 根據兩角及一夾邊作三角形。三角形全等的第三判別法 (160)——32 作直角三角形。直角三角形全等的判別法 (161)——33 三角形的內角和 (162)——34 公理、定理、定義 (163)——35 等腰三角形的性質 (164)——36 平分綫段 (165)——37 作垂直綫 (166)——38 角的轉移 (167)——39 等分角 (168)

第三章 多邊形..... 169

40 平行四邊形 (169)——41 平行四邊形的性質 (169)——42 平行四邊形的判別法 (171)——43 長方形 (171)——44 菱形 (172)——45 正方形 (173)——46 等分綫段 (173)——47 梯形 (174)——48 梯形和三角形的中綫 (175)——49 多邊形的內角和 (176)——50 正多邊形 (177)——51 幾種正多邊形用直尺和圓規作圖 (179)——52 正多邊形的對稱軸 (181)

第四章 相似形..... 184

53 相似形的基本知識 (184)——54 相似形對應綫段的比例 (185)——55 相似的定義 (187)——56 相似形的對應角相等 (188)——57 多邊形相似的判別法 (188)——58 關於三角形相似的判別法 (190)——59 三角形相似的第一判別法 (191)——60 三角形相似的第二判別法 (193)——61 三角形相似的第三判別法 (195)——62 相似形的作圖 (197)——63 位似圖形。相似中

心(198)

第五章 三角函数、簡單的三角形解法…………… 200

64 角的正弦(200)——65 根据圖形求出正弦函数的近似值(200)——66 根据正弦函数的数值作銳角(202)——67 角的餘弦(202)——68 根据表查出已知角的正弦和餘弦(204)——69 根据正弦或餘弦求角(205)——70 角的正切(206)——71 角的餘切(207)——72 根据表查出已知角的正切和餘切(208)——73 根据正切或餘切求角(209)——74 關於三角形的解法(210)——75 根据斜边和銳角解直角三角形(211)——76 根据直角边和銳角解直角三角形(211)——77 根据兩直角边解直角三角形(213)——78 根据直角边和斜边解直角三角形(214)——79 解等腰三角形(215)——80 解正多边形(215)——81 实用举例(217)

第六章 直綫圖形的面積和周長…………… 221

82 面積的度量(221)——83 長方形的面積和周長(222)——84 正方形的面積和周長(223)——85 例題(224)——86 等積圖形。平行四邊形的面積和周長(223)——87 三角形的面積(227)——88 梯形的面積(228)——89 多邊形的面積(229)——90 根据对角綫計算正方形和菱形的面積(231)——91 正多邊形的面積和周長(232)——92 相似多邊形的周長(233)——93 相似形的面積(234)

第七章 商高定理和它的应用…………… 237

94 商高定理(237)——95 商高定理的算術表達式(239)——96 無理數(241)——97 用外接圆半徑表達幾种正多邊形的边長(242)

第八章 圓周長和圓面積…………… 244

98 圓周長对直徑的比值(244)——99 圓周長的公式(245)——100 圓周的弧長(246)——101 圓的面積(248)——102 扇形的面積(251)——103 弓形的面積(252)——104 圓環的面積(254)

第九章 空間的直綫和平面…………… 257

105 平面的性質 (257)——106 空間直線的相關位置 (258)——
 107 空間兩直線的夾角 (258)——108 直線和平面的相關位置。
 平行的判別法 (260)——109 垂直線和斜線 (260)——110 投影
 (263)——111 平面和直線的夾角 (264)——112 兩平面的相關位
 置。它們的平行判別法 (264)——113 兩面角 (266)

第十章 多面体..... 269

114 基本定义。举例 (269)——115 角柱 (270)——116 平行六
 面体。它的界面和稜的性質 (272)——117 平行六面体对角線的
 性質 (273)——118 角錐 (275)——119 角錐台 (278)——120 角
 柱的側面積和全面積 (277)——121 平行六面体的表面積 (278)
 ——122 角錐的表面積 (279)——123 体積的度量 (280)——124
 長方体的体積 (280)——125 角柱的体積 (282)——126 角錐的
 体積 (284)

第十一章 圓形体..... 286

127 旋轉体。圓柱 (286)——128 柱面 (287)——129 圓柱的体
 積 (288)——130 圓錐 (291)——131 圓錐台 (292)——132 圓錐
 的表面積 (293)——133 圓錐的体積 (294)——134 球 (295)——
 135 球面積 (296)——136 球的体積 (298)

附錄..... 300

I 平方根和立方根表 (300)——II 三角函數表 (301)——III 面
 積、周長、体積和表面積的公式 (302)——IV 拉丁字母表 (306)

序 言

这一本讀本是根據工藝、鐵路、礦業工人技術學校1953年數學教學大綱編寫的。著者力求在一系列例題和問題中，不僅闡明數學的理論，而且顯示數學的實用價值。為了這個目的，在具有具體內容的問題中，表述條件，只引入那些在生活中可以用直接測量能得到的數據。由於同樣的理由，著者在某些情況下，放棄了材料的傳統敘述，而在另一些情況下，增加了一些具有巨大實用價值的補充知識。

例如，本書第二篇第100節中，編入了在實用上極為重要的計算弧長的規則[郭易耿斯(Гюнгев)的公式]；遺憾的是，關於這個規則，初等幾何讀本中並未提到。正是同樣理由，在第一篇58節中，闡明了一種很少為人知道的開平方的方法[蓋郎(Герон)法則]，這種方法在許多方面優於通常的[分節]法(參看第一篇57節末的註)。為了複習，著者也編入了通常的[分節]開平方的方法(作為複習材料)。但是，著者的意見，即使學生在中學裏已經牢固地掌握了一般[分節]開平方方法的運算技巧，也還是寧願使用第二種方法。它是如此簡單(無論是理論上還是實踐上)，以致掌握它並不比複習第一種方法費更多的時間。此外，學生幾乎不必多費力，就能開立方(59節)，而這在實踐上是很重要的。

闡明三角形全等的判別法時(第二篇29~31節)，保存了著者在[簡明幾何讀本](工藝學校用)中所用的次序。與基謝列夫(А. П. Киселев)幾何教科書中所用的次序不同。這可能會產生某些不便；但這個次序和闡明它所用的方法是不可分地互相關聯着。這裏，三角形全等的判別法是由三角形的作圖所引出

的，而最簡單的三角形作圖是由三個小桿(邊)來作成。

相似三角形的判別法(第二篇 58~61 節)，著者認為按照相當的次序敘述是理想的。加之第一相似判別法(59 節)直接根據於相似形的一般定義(55 節)。

編寫本書時，著者承教學法專家維諾格拉陀夫(А. Н. Виноградов)，數學教師郭耳德曼(Л. А. Гольдман)和噶伊杜柯沃伊(Л. Д. Гайдуковой)，俄羅斯蘇維埃聯邦社會主義共和國教育科學院，科學工作者崗察羅夫(В. Л. Гончаров)教授和歐符謙柯(И. Н. Шевченко)講師，以及拉比諾維奇(В. Л. Рабинович)和瑞符金(А. З. Рывкин)給予寶貴的指示。謹向他們表示深切的感謝。

著者歡迎批評和指教。來信請寄下列地址：Москва, Центр, Хохловский пер., 7, Трудрезервиздат, 或 Москва, Б-120, 4-й, Сыромятинский, пер., д. 3/5, кв. 105, М. Я. Выгодский.

著者

第一篇 代數學

第一章 初步知識

1 關於代數學對象的概念

在算術裏研究數目的运算，這時，進行运算的數是已經知道的，而在解答中所得的數，是原來所不知道的。

例 1 从 84 公尺長的繩子上截下長度为 18 公尺的一段，剩下的繩子長多少公尺？

这个題目裏數目 84（繩子長度的公尺數）和 18（截下一段的長度）是已知的，而剩下的一段繩子長度的公尺數是不知道的。为了解答这个題目需要完成減法

$$84 - 18 = ?$$

解答中得到的數目 66 是原先所不知道的。用字母 x 來代替表示未知數的問号，問題便寫成这样：

$$84 - 18 = x,$$

而解答为：

$$x = 66。$$

在代數學裏不僅运算已知數，也运算未知數。这种运算帮助解答很多問題。

例 2 繩子的長度是 76 公尺，要使留下的繩子比截去的一段長 24 公尺，問应截去的一段長度是多少？

【解】 用字母 x 代表未知數，就是截去一段的繩長公尺數。

为了使利下來的一段比截去的一段長 24 公尺，就是它应

該有 $x+24$ 公尺。在和 $x+24$ 中有一個被加數 (x) 現在還是未知數，因此這個和本身也是未知數。但是，我們知道未知數 x (截下一段的長度) 和未知數 $x+24$ (留下的長度) 共是已知數 76。這可寫成這樣：

$$x+x+24=76. \quad (1)$$

含有未知數的等式叫做方程。這樣，我們已經得到了方程 $x+x+24=76$ 。而從這方程，應用下面的方法可以求得未知數 x 。

兩倍 x 與數目 24 的和是 76，即兩倍 x 等於 $76-24=52$ 。故 x 等於 $52 \div 2 = 26$ 。

【答】 $x=26$ ，也就是應該截下 26 公尺。

【驗算】 如果從 76 公尺截去 26 公尺，剩下的是 50 公尺。剩下的一段比截去的一段長出 $50-26=24$ (公尺)。

這裏我們解出了方程 $x+x+24=76$ ，也就是從方程中求得了未知數 x 。

代數學給出解方程的一般法則。

2 簡短的歷史知識

方程的研究從很遠的古代就已開始。遠在 4000 年前，巴比倫的學者已經能解複雜的方程，並且把它應用於各種測量問題、建築技術和軍事業務中。中國和印度的學者，也從很久以來就掌握了解方程的方法。

距今最久流傳到現在的最早一本有解方程法則的書，是亞歷山大時代 (2~3 世紀) 希臘的數學家基奧方特 (Диофант) 所著。

但是，我們有權認為代數學的奠基人是我國●花刺子模城 (現在是烏茲別克社會主義共和國的撒瓦城) 的穆罕默德 (Мухаммед)。大約在紀元 830 年，他在他的著作中系統地敘述了關於方程的學說。穆罕默德的著作

● 指蘇聯。下同。

名叫「还原与对消」^①。按照当时的习惯，穆罕默德用阿剌伯語著作，而阿剌伯語的「还原」叫做「 اخذجبر 」，由此得到「代数学」(الخبر)这个名称。

3 文字的应用。公式

1. 用文字表示需由题目的条件求出的未知数(参看 1 節的例子)。

2. 用文字表示那些根据某种原因没有必要區別其大小的数。

例 为了將普特換算成为公斤，可以应用下述法則：重量用普特表示的数乘以 16，所得乘積就是重量用公斤表示的数。例如，設穀物儲存量为 20 普特，那末同样重量的穀物用公斤表示的数是 $20 \times 16 = 320$ 。同样，5 普特是 $5 \times 16 = 80$ (公斤)， $7\frac{1}{2}$ 普特是 $7\frac{1}{2} \times 16 = 120$ (公斤) 等。

在換算普特成为公斤的法則裏，普特数是假定为已知的；但是在这个法則裏，普特数为任何数都是成立的，沒有區別它大小的必要，因此，我們可以用任一字母來表示它，例如用 p 表示。用 x 表示未知的公斤数，那末这法則可用下列算式表明：

$$x = p \times 16.$$

这个式子完全可以代替上述用文字敘述的法則，而且是比较簡短的，比較形象化的。如果要知道 5 普特是多少公斤，那末只要用 5 去代替式子 $x = p \times 16$ 中的 p ，我們立刻求得

$$x = 5 \times 16 = 80.$$

① 穆罕默德將減数从方程式的一边移到另一边成为加数叫做「还原」。例如，方程式 $x - 15 = 36$ 中的減数 15 可以移到右边；得方程式 $x = 36 + 15$ 。將方程式中的未知数集合在一边，已知数集合到另一边。穆罕默德把这叫做「对消」。

要知道 $7\frac{1}{2}$ 普特中的公斤數，用數目 $7\frac{1}{2}$ 代替字母 p 等。

由數字、文字(表示未知數或任意數)、運算符號、等號或不等號所組成的式子叫做公式。這樣，式子 $x = p \times 16$ 是公式：其中有表示十六的數字、表示任意數的文字 p 、表示未知數的字母 x 、乘號和等號。

〔註1〕 公式中不一定必須同時含有數字、文字、運算符號和等號。例如，公式 $x = a + b$ 中就不含有數字。

由數字、文字和運算符號(沒有等號或不等號)所組成的式子也可以叫做公式，但這種式子多半叫做代數式，或簡短地叫做式。

〔註2〕 表示任何具體的數量(物理的、技術的、幾何的等等)間的關係的公式，應該附有用文字所代表的名數的說明。這樣，換算普特成為公斤的公式，要寫成：

$$x = p \times 16 [p \text{——重量(普特)}; x \text{——重量(公斤)}].$$

4 數值的代入

公式的主要用途是：根據它可以求得某一量的數字表達式。這樣，根據公式

$$x = p \times 16 [p \text{——重量(普特)}; x \text{——重量(公斤)}]$$

我們可以求得表示 $2\frac{1}{2}$ 普特穀物的公斤數。為此，我們用數 $2\frac{1}{2}$ 代替 p ，並求得 $x = 2\frac{1}{2} \times 16 = 40$ (公斤)。

這裏我們說： $2\frac{1}{2}$ 是文字 p 的數值；同樣，40 是文字 x 的數值。文字 p 可以取不同的數值，依據這些 p 的數值， x 的數值也將不同。用文字的數值去代替文字也叫做代入。

例1 期限在一年內的存款利息按照下列公式計算，

$$x = \frac{3at}{36500}$$

(a ——存款總數， t ——存款日數， x ——利息)。

要知道存款 1460 盧布 50 日的利息是多少，需將下列 a 和 t 的數值代入：

$$a=1460, t=50。$$

根据公式，求得 $x = \frac{3 \times 1460 \times 50}{36500} = 6$ (盧布)。

可見， x 的數值是 6；換句話說，利息為 6 盧布。

5 运算符

代数学中的加法符号 (+) 与減法符号 (-) 和算術中一样。作为乘法符号只用一點●，但通常可以省略。如，不寫 $a \cdot b$ 而寫 ab ；不寫 $16 \cdot p$ 而寫 $16p$ 。只有在點子後有數字（不是文字）的情況下才保留點。如當 $a \cdot 2b$ 或 $6 \cdot 3.5x$ 時，點子應該保留。

作为除法的符号或者用兩點 (:)●，或者用橫綫（被除數在綫上，除數在綫下）。例如 $2a:3b$ 也可以寫作 $\frac{2a}{3b}$ 。

6 乘方

取任意數的二、三、四等次方就是將它重複地乘二、三、四等次。被乘的數叫做乘方的底數；表明所乘的次數的數叫做指數；所得到的乘積叫做乘方數。

这样，取 $\frac{1}{2}$ 的四次方就是將 $\frac{1}{2}$ 重複地乘四次：

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}。$$

簡單的算式為：

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}。$$

這裏 $\frac{1}{2}$ 是乘方的底數；4 是指數； $\frac{1}{16}$ 是乘方數。

● 我國習慣上乘法不但用點而且也用乘號 (×)，除法則不用兩點而只用除號 (÷)。如 $a \cdot 2b$ 也寫 $a \times 2b$ ；不寫 $2a:3b$ 而只寫 $2a \div 3b$ 。——譯者

二次方又叫做平方；三次方叫做立方[●]。某數本身又叫做這數的一次方。

7 括 号

在代數裏也和算術裏一樣，括號用來指明運算的順序。這樣，代數式

$$a - (b + c)$$

表明先將 b 和 c 相加，然後從 a 中減去所得的和數。如果沒有括號，也就是，如果是下式

$$a - b + c,$$

那末，應該先從 a 中減去 b ，然後將所得的差數和 c 相加。

在代數裏括號的使用規則和算術中一樣。

例 1 當 $a=7$, $b=2$ 時，計算下式的數值：

$$(2a + 3b)b.$$

【解】 $(2a + 3b)b = (2 \times 7 + 3 \times 2) \times 2 = 40.$

例 2 當 $a=5$, $b=3$, $c=1$ 時，計算下式的數值：

$$[40a - 3(b - c)a^3]b.$$

【解】 $[40a - 3(b - c)a^3]b = [40 \times 5 - 3 \times (3 - 1) \times 5^3] \times 3 = [200 - 3 \times 2 \times 25] \times 3 = 150.$

8 正數和負數

算術裏的減法運算只有當減數小於(或等於)被減數時才可能，在代數中也討論從小的數中減去比較大的數的減法。這種運算之所以可能，是由於引用了新數，這種新數叫做負數。

● 所以得到這個名稱是由於 a^2 表示每邊有 a 個比例尺單位的正方形的面積； a^3 表示邊長 a 比例尺單位立方體的體積。那末，如果正方形邊長 6 公分，正方形的面積是 6^2 ，就是 36 平方公分。如果立方體邊長 2 公分，立方體的體積等於 2^3 ，就是 8 立方公分。