Qiaosi miaojie

巧思妙解

全新题型·精当分析·巧妙解法·超值受益

3+X教育考试研究室 编

初三数学

陕西师范大学出版社

Qiaosi
miaojie

巧思妙解

主　编　安振平
编　写　申祝平(代数部分)
　　　　刘康宁(几何部分)

初三数学

陕西师范大学出版社

Qiaosi miaojie

巧思妙解

主　编　安振平
编　写　申祝平(代数部分)
　　　　刘康宁(几何部分)

初三数学

陕西师范大学出版社

图书代号:JF197900

图书在版编目(CIP)数据

巧思妙解·初三数学/安振平主编. - 西安:陕西师范大学出版社,2001.7

ISBN 7-5613-2231-3

Ⅰ.解 … Ⅱ.安 … Ⅲ.数学课-初中-解题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 027318 号

责任编辑	朱永庚
装帧设计	徐 明
责任校对	郭健娇
出版发行	陕西师范大学出版社
社 址	西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
网 址	http://www.snuph.com
经 销	新华书店
印 刷	陕西宝石兰印务有限责任公司
开 本	850×1168 1/32
印 张	10.125
插 页	2
字 数	231 千
版 次	2001 年 7 月第 1 版
印 次	2001 年 7 月第 1 次
定 价	10.50 元

开户行:西安工行小寨分理处 账 号:216-144610-44-815

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与发行科联系、调换。

电 话:(029)5251046(传真) 5233753 5307864

E-mail: nuph@pub.xaonline.com

前　言

陕西师范大学原校长、博士生导师　王国俊

例题如同榜样，而榜样的力量是无穷的！

学医要研究病例，学法要分析案例，学画要临摹名画，学烹饪要研习菜谱……一句话，各种专业学习和技能培训都离不开学习相应的类型各异的“例题”。中学生的各科学习又何尝不是如此？学语文少不了学习古今中外的各种范文，学英语也是各种类型的例句伴随学习的始终，学数、理、化更是例题贯穿于学习全过程之中。教师讲例题、学生学例题构成了中学各科教学的基本内容，例题教学在一定程度上直接影响着各科教学质量的高低。

基于以上的认识，陕西师范大学出版社在世纪之交组织编写了**《巧思妙解》丛书**，在新世纪奉献给广大中学生，以期在他们的学习中助一臂之力。

本丛书例题由其基础性、示范性、典型性、启发性、综合性、应用性、创新性等诸多视角予以取舍，每一例题都有其明晰的目的和各自的特点。**基础性**在于能有助于各种基本知识、基本方法、基本技能的理解、巩固与加深；**示范性、典型性**在于能起到举一反三、触类旁通之功效，即学习一道题，会解一类题；**启发性**主要能达到开发智力、启迪思维、激发创造的目的，即能解一题，增一智；而**综合性、应用性、创新性**则旨在培养学生分析问题、解决问题的能力和创新的能力。总之，本丛书根本目的

在于全面提高学生各科的解题能力。

为了便于同学们的学习，也考虑到目前应试的要求，本丛书将每部分例题分为三大类：基础拓展、综合突破、能力应用。从而突显了所选例题内容的层次性和训练的阶梯性。

本丛书各科的每一部分前设有[**知识网络**]和[**易错指津**]两个栏目。[**知识网络**]对相应知识做了梳理，或归纳比较、或提纲挈领、或列表图示，简明扼要，一目了然，旨在为解题做必要的理论准备；[**易错指津**]则把解题中常见错误尽可能地列出，警示解题的误区，以确保解题的正确性。

在这里，我向中学生朋友们提一个小小建议：在学习本丛书时，千万别满足于看懂某一道例题，而应该紧接着想一下这个例题的示范作用是什么？解它主要用到了哪些知识？解法的关键在哪里？有无其他更好的解法？解此题易犯什么错误？等等，这样思考之后，再看看书中设置的[**思路分析**]、[**方法要领**]、[**一题多解**]、[**常见错误**]、[**引申发散**]等栏目，这将有助于提高自己分析问题和解决问题的能力，特别是自学的能力，从而将使你们受益匪浅。

例题不仅是学习各科知识入门的向导，而且是创新精神的激活剂。学习例题可以多快好省地助你直接获取需要的知识，学习例题最易于自学而可以无师自通。本丛书是课内的课外书，也是课外的课内书，因为它与教材相辅相成，相得益彰，是课堂学习有益的补充，有助于增强同学们的应试能力，提高大家各学科的素质和学习成绩。

最后祝中学生朋友们学业进步，健康成长！

2001 年 4 月 18 日

目录

代数部分

几何部分

目录

代 数 部 分

十二、一元二次方程

知识网络

一元二次方程
1. 定义
2. 根的情况
3. 根与系数的关系
4. 解法
5. 把一些简单的高次方程、分式方程、无理方程、二次方程组转化为一元二次方程求解
6. 列一元二次方程或能转化为一元二次方程的方程(组)解应用题

易错指津

1. 易把某些假一元二次方程误认为是一元二次方程.

关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$,当 $a\neq0$ 时是一元二次方程,当 $\begin{cases}a=0,\\b\neq0\end{cases}$ 时是一元一次方程,当 $\begin{cases}a=0,\\b=0\end{cases}$ 时是一元零次方程.

2. 易在解分式方程、无理方程时忘了验根.

为什么要验根呢? 因为在数学中有两大"禁区":(1) 零不能作分母;(2) 负数不能开偶次方.

3. 易把在解分式方程、无理方程、二元二次方程组的过程中得到的一元二次方程的重根当作原方程的“重根”、原方程组的“重解”.

只有一元 n(n 是大于 1 的自然数)次方程才可能有重根．对其他的方程,没有“重根”的提法;对方程组,也没有“重解”的提法．相同的,只算一个．

典型例题评析

基础拓展

例 1 下列各方程中,哪些是一元一次方程？哪些是一元二次方程？哪些是一元高次方程？哪些是一元整式方程？哪些是一元分式方程？哪些是一元有理方程？哪些是一元无理方程？哪些是一元代数方程？

① $0x=0$,　　② $0x=1$,

③ $\dfrac{3x+4}{\sqrt{2}}=5$,　　④ $\sqrt{3}x^2+4x+5=0$,

⑤ $2x^3+4x+5=0$,　　⑥ $\dfrac{x+4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+5=0$,

⑦ $\dfrac{1}{2x+3}+4x^5=0$,　　⑧ $\sqrt{2x+1}+\dfrac{4}{3x}=5$.

答 ③、⑥是一元一次方程．④是一元二次方程．⑤是一元高次方程．①～⑥是一元整式方程．⑦是一元分式方程．①～⑦是一元有理方程．⑧是一元无理方程．①～⑧是一元代数方程．

一元整式方程分为一元一次方程,一元二次方程,一元高次方程(次数高于 2 的一元整式方程),还有一元零次方程($0x=a$,其中 a 是常数).

一元代数方程的分类如图 12－1 所示．

例 2 方程 $ax^2+bx+c=0$ 是关于 x 的一元二次方程吗？为什么？

答 不一定是．因为不知道方程中的 a,b,c 是什么．当 a,b,c 都是常数，且 $a\neq0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 是关于 x 的一元二次方程．

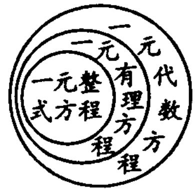

图 12－1

『方法要领』 关于 x 的一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0$，其中 a,b,c 是常数，且 $a\neq0$．

例 3 写出下列各一元二次方程的二次项系数、一次项系数及常数项：

(1) $1+2x-3x^2=0$；　　(2) $2x^2-3=4x$；

(3) $-3x^2=4$；　　(4) $4x^2=5x$；

(5) $\left(5x-\frac{1}{5}\right)\left(6x+\frac{1}{6}\right)=0$；

(6) $(6x+1)(7x-2)=(8x+3)^2$；

(7) $(x+7)^3=(x-8)^3$；

(8) $(y+8)(2y-9)=(3y-10)^2$；

(9) $(s-9)^2-2(s+2)^2=3s^2$；

(10) $(10-\sqrt{11}t)(10+\sqrt{11}t)+(10t-\sqrt{11})^2=12t$．

解 (1) $1+2x-3x^2=0$，即 $-3x^2+2x+1=0$．所以，其二次项系数是 -3，一次项系数是 2，常数项是 1．

(2) $2x^2-3=4x$，即 $2x^2-4x-3=0$．所以，其二次项系数是 2，一次项系数是 -4，常数项是 -3．

(3) $-3x^2=4$，即 $-3x^2-4=0$．所以，其二次项系数是 -3，一次项系数是 0，常数项是 -4．

(4) $4x^2=5x$，即 $4x^2-5x=0$．所以，其二次项系数是 4，一次项系数是 -5，常数项是 0．

(5) $\left(5x-\frac{1}{5}\right)\left(6x+\frac{1}{6}\right)=0$，即 $30x^2-\frac{11}{30}x-\frac{1}{30}=0$．所以，其

二次项系数是30，一次项系数是$-\frac{11}{30}$，常数项是$-\frac{1}{30}$.

(6) $(6x+1)(7x-2)=(8x+3)^2$，即$-22x^2-53x-11=0$. 所以，其二次项系数是-22，一次项系数是-53，常数项是-11.

(7) $(x+7)^3=(x-8)^3$，即$45x^2-45x+855=0$. 所以，其二次项系数是45，一次项系数是-45，常数项是855.

(8) $(y+8)(2y-9)=(3y-10)^2$，即$-7y^2+67y-172=0$. 所以，其二次项系数是-7，一次项系数是67，常数项是-172.

(9) $(s-9)^2-2(s+2)^2=3s^2$，即$-4s^2-26s+73=0$. 所以，其二次项系数是-4，一次项系数是-26，常数项是73.

(10) $(10-\sqrt{11}t)(10+\sqrt{11}t)+(10t-\sqrt{11})^2=12t$，即$89t^2-(12+20\sqrt{11})t+111=0$. 所以，其二次项系数是89，一次项系数是$-12-20\sqrt{11}$，常数项是111.

【方法要领】 只有先把一元二次方程化成一般形式，才能说清它的二次项系数、一次项系数、常数项．

(5)也可以这样做：$\left(5x-\frac{1}{5}\right)\left(6x+\frac{1}{6}\right)=0$，即$900x^2-11x-1=0$. 所以，其二次项系数是900，一次项系数是$-11$，常数项是$-1$.

其中的“即”，是“互为同解方程”的意思．同理，其他小题也会有不同的解答．

例4 写出下列各一元二次方程的二次项系数、一次项系数及常数项：

(1) $a(x-b)^2=c$(a,b,c是常数，且$a\neq0$)；

(2) $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$(a,α,β是常数，且$a\neq0$)；

(3) $(ax+b)(cx-d)=0$(a,b,c,d是常数，且$ac\neq0$)；

(4) $a(x-m)^2+n=0$(a,m,n是常数，且$a\neq0$).

解 (1) $a(x-b)^2=c$，即$ax^2-2abx+ab^2-c=0$. 所以，其二次项系数是a，一次项系数是$-2ab$，常数项是ab^2-c.

(2) $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$，即$ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0$. 所以，

其二次项系数是 a，一次项系数是 $-a(\alpha+\beta)$，常数项是 $a\alpha\beta$.

(3) $(ax+b)(cx-d)=0$，即 $acx^2+(bc-ad)x-bd=0$. 所以，其二次项系数是 ac，一次项系数是 $bc-ad$，常数项是 $-bd$.

(4) $a(x-m)^2+n=0$，即 $ax^2-2amx+am^2+n=0$. 所以，其二次项系数是 a，一次项系数是 $-2am$，常数项是 am^2+n.

「方法要领」 先把一元二次方程化成一般形式.

例 5 写出关于 x 的二次方程 $3x^2-5y^2+7xy-9=0$ 的二次项系数、一次项系数及常数项.

解 $3x^2-5y^2+7xy-9=0$，即 $3x^2+7yx-5y^2-9=0$. 所以，其二次项系数是 3，一次项系数是 $7y$，常数项是 $-5y^2-9$.

「方法要领」 先把方程的左边按 x 的降幂排列.

例 6 写出关于 y 的二次方程 $3x^2-5y^2+7xy-9=0$ 的二次项系数、一次项系数及常数项.

解 $3x^2-5y^2+7xy-9=0$，即 $-5y^2+7xy+3x^2-9=0$. 所以，其二次项系数是 -5，一次项系数是 $7x$，常数项是 $3x^2-9$.

「方法要领」 先把方程的左边按 y 的降幂排列.

例 7 用直接开平方法解下列方程:

(1) $x^2=1$;　　(2) $x^2=2$;

(3) $(3x)^2=3$;　　(4) $(x-4)^2=5$;

(5) $(5x-6)^2=7$;　　(6) $6(7x+8)^2=9$;

(7) $x^2=b^2$(b 是常数);　　(8) $x^2=c$(c 是常数).

解 (1) $x=\pm 1$.

(2) $x=\pm\sqrt{2}$.

(3) $3x=\pm\sqrt{3}$，所以，$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(4) $x-4=\pm\sqrt{5}$，所以，$x=4\pm\sqrt{5}$.

(5) $5x-6=\pm\sqrt{7}$,

$5x=6\pm\sqrt{7}$,

$$x=\frac{6\pm\sqrt{7}}{5}.$$

(6) $(7x+8)^2=\frac{3}{2}$,

$$7x+8=\pm\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$7x=-8\pm\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$x=\frac{-16\pm\sqrt{6}}{14}.$$

(7) $x=\pm b$.

(8) 若 $c\geqslant0$，则 $x=\pm\sqrt{c}$；若 $c<0$，则这方程无实数根．

『方法要领』 如何用直接开平方法解方程 $(ax+b)^2=c$（a,b,c 是常数，且 $a\neq0$）？

若 $c\geqslant0$，则一般步骤是：

$$(ax+b)^2=c\to ax+b=\pm\sqrt{c}\to ax=-b\pm\sqrt{c}\to x=\frac{-b\pm\sqrt{c}}{a}.$$

若 $c<0$，则此方程无实数根．

(7)的详细过程是：$x=\pm\sqrt{b^2}=\pm|b|=\pm b$.

例 8 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+2x-1=0$;　(2) $4x^2-4x-7=0$;

(3) $9x^2+24x+11=0$;　(4) $16x^2-40x+19=0$;

(5) $3x^2-\sqrt{2}x-20=0$;　(6) $(x-6)(x+7)=0$;

(7) $x(x-7)=0$;　(8) $x^2+px+q=0$.

解 (1)

$$x^2+2x=1,$$

$$x^2+2x+1=1+1,$$

$$(x+1)^2=2,$$

加二

$$x+1=\pm\sqrt{2},$$

所以，$x=-1\pm\sqrt{2}$.

(2) $4x^2-4x=7$,

$$4x^2-4x+1=7+1,$$
$$(2x-1)^2=8,$$
$$2x-1=\pm 2\sqrt{2},$$
$$2x=1\pm 2\sqrt{2},$$
所以，
$$x=\frac{1\pm 2\sqrt{2}}{2}.$$

(3)
$$9x^2+24x=-11,$$
$$9x^2+24x+16=-11+16,$$
$$(3x+4)^2=5,$$
$$3x+4=\pm\sqrt{5},$$
$$3x=-4\pm\sqrt{5},$$
所以，
$$x=\frac{-4\pm\sqrt{5}}{3}.$$

(4)
$$16x^2-40x=-19,$$
$$16x^2-40x+25=-19+25,$$
$$(4x-5)^2=6,$$
$$4x-5=\pm\sqrt{6},$$
$$4x=5\pm\sqrt{6},$$
所以，
$$x=\frac{5\pm\sqrt{6}}{4}.$$

(5)
$$3x^2-\sqrt{2}x=20,$$
$$x^2-\frac{\sqrt{2}}{3}x=\frac{20}{3},$$
$$x^2-\frac{\sqrt{2}}{3}x+\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2=\frac{20}{3}+\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2,$$
$$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2=\frac{121}{18},$$

$$x-\frac{\sqrt{2}}{6}=\pm\frac{11\sqrt{2}}{6},$$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{6}\pm\frac{11\sqrt{2}}{6},$$

所以，$$x_1=2\sqrt{2},$$

$$x_2=-\frac{5\sqrt{2}}{3}.$$

(6) $$x^2+x-42=0,$$

$$x^2+x=42,$$

$$x^2+x+\frac{1}{4}=42+\frac{1}{4},$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{169}{4},$$

$$x+\frac{1}{2}=\pm\frac{13}{2},$$

$$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{13}{2},$$

所以，$$x_1=6,$$

$$x_2=-7.$$

(7) $$x^2-7x=0,$$

$$x^2-7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2,$$

$$x-\frac{7}{2}=\pm\frac{7}{2},$$

$$x=\frac{7}{2}\pm\frac{7}{2},$$

所以，$$x_1=7,$$

$$x_2=0.$$

(8)
$$x^2+px=-q,$$
$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q,$$
$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}.$$

若 $p^2<4q$,则原方程无实数根;

若 $p^2\geqslant 4q$,则 $x+\frac{p}{2}=\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$,
$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

『方法要领』 如何用配方法解方程 $ax^2+bx+c=0$(a,b,c 是常数,且 $a\neq 0$)?

一般步骤是:$ax^2+bx+c=0\rightarrow ax^2+bx=-c\rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}\rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

若 $b^2-4ac<0$,则原方程无实数根;

若 $b^2-4ac\geqslant 0$,则 $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

例9 用公式法解下列方程:

(1) $2\sqrt{3}x^2-x-12\sqrt{3}=0$;　　(2) $3x^2+\sqrt{7}x=0$;

(3) $4x^2-5=0$;　　(4) $5x^2=0$;

(5) $x^2+10x+25=0$;　　(6) $x^2-\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}x$;

(7) $2(x^2+m)=m^2+(4-m)x$ (m 是常数);

(8) $a^2x^2-2abx-8b^2=0$ (a,b 是常数,且 $a\neq 0$).

解 (1) $x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 2\sqrt{3}\times(-12\sqrt{3})}}{2\times 2\sqrt{3}}$