初中数学
基础知识概要

四川人民出版

初中数学

基础知识概要

四川人民出版社

一九八〇年·成都

封面设计：魏天禄

初中数学基础知识概要

四川人民出版社出版　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　宜宾地区印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 6,375 字数 157 千
1980年12月第一版　　1981年 1 月第二次印刷
印数：201,001—259,730册

书号：7118·502　　定价：0.46元

出版者的话

为了帮助社会青年系统掌握初中各科基础知识，为升学或参加四化建设作准备，我们出版了这套基础知识概要。本书亦可供应届初中毕业生配合教材和课堂学习使用，也可供中学教师指导学生复习时参考。

这套初中各科基础知识概要，是根据全日制十年制学校中学各科教学大纲（试行草案）和现行教材编成的。有语文、英语、数学、物理、化学等。书中讲了基本概念、基础知识，内容简明扼要，文字通俗易懂。对一些重要问题书中还作了一定的分析归纳，并有例题示范，同时附有一定数量的练习题，供读者选用。

本书由成都市教育局中学教研室数学组同志编写。由于时间仓促，书中缺点错误在所难免。我们热忱地欢迎读者批评指正。

一九八〇年九月

目　　录

代　　数

第一章　实　数

一、自然数：表示物体个数的1、2、3、4……等的每一个数都叫自然数。

1 是最小的自然数，但无最大的自然数。1 既不是合数，也不是质数。1 在实数中有重要作用。任意自然数相加和相乘，结果仍然是自然数。任何一个自然数都可以用它各数位上的数字和数位单位来表示，如：$39045=3\times10000+9\times1000+0\times100+4\times10+5$。

二、整数：负整数、零、正整数统称为整数。

“0”是整数。它既不属于正数，又不属于负数。

偶数：一切能被2整除的整数叫做偶数。一般表示为$2k$（k为自然数）。

奇数：不能被2整除的整数叫做奇数。一般表示为$2k-1$（k为自然数）。

任意整数的加、减、乘法运算的结果仍然是整数。

三、有理数：整数和分数统称有理数。

任一个有理数都可以表示成$\frac{q}{p}$（p、q为互质整数。$p\neq0$）。任何有理数的加、减、乘、除（除数不为零）运算的结果仍然是有理数。

四、无理数：无限不循环小数叫做无理数。

五、实数：有理数和无理数统称为实数。

1．分类

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数（自然数）
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
      - （正、负有限小数或无限循环小数）
  - 无理数（正负无限不循环小数）

2．数轴　规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴。实数和数轴上的点一一对应。

注意：定义中的方向、原点、长度单位三要素缺一不可。

3．相反数　在数轴原点的两侧，并且与原点距离相等的两个点所表示的两个数，叫做互为相反数。零的相反数为零。

两数互为相反数，它们的和为零。对任意实数a，它的相反数则为$-a$，有$a+(-a)=0$。

4．实数的绝对值　正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零。

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

注意：字母a既代表具体的数，更常代表一般的式。实数a的绝对值$|a|$是一个非负数，表示a在数轴上的对应点到原点的距离。

5．算术根　在实数范围内，一个正数的正的方根叫做算术根。二次算术根记为$\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）。一个数的算术根也是一个非负数。

6．实数大小的比较　数轴上右边的点所代表的数大于左边的点所代表的数。常用求差的方法比较两数的大小，即，若$a-b>0$，则$a>b$；若$a-b=0$，则$a=b$；若$a-b<0$，则$a<b$。

7．实数的运算法则

（1）四则运算法则如下表：

运算 \ 法则 \ 原数	同号		异号	
	符号	绝对值	符号	绝对值
加法	保持原号	相加	与绝对值较大加数的符号相同	大减小
减法	减去一个数等于加上它的相反数。			
乘法	正	相乘	负	相乘
除法	正	相除	负	相除

注意：除以一个数，等于乘上这个数的倒数。

（2）乘方：求相同因数的积的运算叫做乘方，乘方的结果叫做幂。

由定义得符号法则：正数的任何次幂为正，负数的偶次幂为正，负数的奇次幂为负，零的任何次幂为零。

（3）开方：如果$x^n=b$，则x叫做b的n次方根，求方根的运算叫开方。记为$\sqrt[n]{b}$。

当n为奇数时，$\sqrt[n]{b}$表示b的n次方根，此时b可为任何实数；当n为偶数时，$\sqrt[n]{b}$表示b的n次方根中正的一个，$-\sqrt[n]{b}$表示b的n次方根中负的一个，此时$b\geqslant0$。

注意：数“0”和“1”参加各种运算的结果和条件是什么？

8．运算定律（用公式表示）

(1)交换律：$a+b=b+a$，$a\times b=b\times a$。

(2)结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)。$$

(3)乘法对加法的分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$。

9．运算顺序。在有括号时，按“小、中、大”括号的顺序

运算其内的数（若括号前是负号，去掉括号和负号时，括号内的数要反号）；在无括号或在括号内，先算第三级（乘方、开方），再算第二级（乘、除），最后算第一级（加、减）；在同一级运算中，从左到右依次进行（如$3\times\frac{1}{3}\div3\times\frac{1}{3}\neq1$）。根据运算定律可以简化运算过程。

例1　计算：$|-1|-(\sqrt{2})^2+\sqrt{(-2)^2}-(-3)^2$
$-(-3)^3\div3+(-1)^n$（n为自然数）

解　原式$=1-2+2-9+3^3\times\frac{1}{3}+(-1)^n$

$=1-9+9+(-1)^n$

$=1+(-1)^n$

$=\begin{cases}2\ (n\text{为偶数})\\0\ (n\text{为奇数})\end{cases}$

注意：（1）按三、二、一级顺序运算，不许$(-\cancel{3}^{1})^3\times\frac{1}{\cancel{3}_{1}}=(-1)^3$；（2）互为相反数立即合并得零；（3）可先决定符号，再计算绝对值。

例2　计算：$0.2\div\frac{1}{3}-\left|1\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{3})\right|-0.5\div5+\frac{3}{7}\div(-2)$
$+|(-0.5)^2|-(-\frac{2}{5})\times(-\frac{5}{7})+(-0.5)^3$

解　原式$=\frac{1}{5}\times3-\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}-\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2$
$-\frac{2}{7}-(\frac{1}{2})^3$

$=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{3}{14}+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}-\frac{1}{8}$

$=(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8})+(\frac{3}{5}-\frac{1}{10})-(\frac{3}{14}+\frac{2}{7})$

$=-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$

注意：（1）算式中既有小数又有分数时，一般(特别是乘除法）先将小数化成分数。熟记：$0.5=\frac{1}{2}$、$0.2=\frac{1}{5}$、$0.25=\frac{1}{4}$、$0.75=\frac{3}{4}$、$0.125=\frac{1}{8}$；(2) 将分数除法转化成乘法运算；(3) 分数的加法中，将分母之间有倍数关系的分数先合并。

例3 计算：$\left|\dfrac{3\frac{1}{2}\div 2\frac{1}{3}\times 0.5\times\frac{3}{17}-0.125\div\frac{17}{3}}{-1.25\div 5\frac{2}{3}}\right|$

解 原式 $=\left|\dfrac{\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{17}-\frac{1}{8}\times\frac{3}{17}}{-\frac{5}{4}\times\frac{3}{17}}\right|$

$=\left|\dfrac{(\frac{3}{4}-\frac{1}{8})\times\frac{3}{17}}{-\frac{5}{4}\times\frac{3}{17}}\right|$

$=\left|\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{8}}{-\frac{5}{4}}\right|$

$=\left|\dfrac{6-1}{-10}\right|$

$=\left|-\dfrac{1}{2}\right|$

$=\dfrac{1}{2}$

注意：（1）充分利用运算定律，既可使运算简便，又易于准确。（2）先在绝对值符号内进行运算，最后去掉绝对值符号。

例4 计算：$2\times\sqrt{8}\div 2\times\sqrt{8}+\frac{117}{121}\div\frac{39}{55}\times(-5\frac{13}{15})$

解　原式$=2\times\sqrt{8}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{8}+\frac{13\times3\times3}{11\times11}\times\frac{11\times5}{13\times3}\times\frac{-11\times8}{5\times3}$

$=8-8$

$=0$

注意：分数及其乘法中，尽量先约分。

例5　设$a=\sqrt{5}$，b是a的小数部份，求$a-\frac{1}{b}$的值。

解　$\because a=\sqrt{5}$是无理数，即无限不循环小数，而$\sqrt{5}$的整数部份是2，由条件得$a=2+b$，$\therefore b=\sqrt{5}-2$。

$$\therefore\quad a-\frac{1}{b}=\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}$$

$$=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}+2}{5-4}=\sqrt{5}-\sqrt{5}-2$$

$$=-2$$

例6　比较下列各组数的大小：

(1)$-\frac{5}{6}$，$-\frac{6}{7}$，-0.8；(2)$\frac{1}{100}$，$-\pi$；(3)$\sqrt{10}$，π。

解　(1)$\because\ -\frac{5}{6}=-\frac{175}{210}$，$-\frac{6}{7}=-\frac{180}{210}$，$-0.8=-\frac{168}{210}$，

而$\left|-\frac{180}{210}\right|>\left|-\frac{175}{210}\right|>\left|-\frac{168}{210}\right|$

$\therefore\quad -0.8>-\frac{5}{6}>-\frac{6}{7}$。

另解：$-0.8-\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{168}{210}+\frac{175}{210}=\frac{7}{210}>0$，

$\therefore\quad -0.8>-\frac{5}{6}$。　①

又　$-\frac{5}{6}-\left(-\frac{6}{7}\right)=\frac{-175}{210}+\frac{180}{210}=\frac{5}{210}>0$

$\therefore\quad -\frac{5}{6}>-\frac{6}{7}$。　②

由①、②得$-0.8>-\frac{5}{6}>-\frac{6}{7}$

（2）$\because\ \frac{1}{100}>0$，而$-\pi<0$，$\therefore\ \frac{1}{100}>-\pi$

〔或$\frac{1}{100}-(-\pi)=\frac{1}{100}+\pi>0$，$\therefore\ \frac{1}{100}>-\pi$〕

（3）$\because\ \sqrt{10}=3.16\cdots\cdots$，$\pi$ 3.14……，而$0.06>0.04$

$\therefore\ \sqrt{10}>\pi$

〔或$\sqrt{10}-\pi\doteq 3.16-3.14=0.02>0$，$\therefore\ \sqrt{10}>\pi$〕

注意：（1）正小数的比较，从高数位到低数位进行。第一次出现相同数位上的数字较大的数就大于此数位上的数字较小的数。（2）负数中，绝对值较大的数反而较小。（3）分数的比较先要化为同分母的分数。（4）求差法比较大小是很有用处的方法。

习　题　一

1. 什么叫自然数、整数、有理数、无理数和实数？下面各数中，哪些属于这些数集：-8，$0.\dot{3}\dot{4}$，π，0，$3\sqrt{2}$，2.35，5，$-\frac{1}{3}$。

2. 什么叫数轴？数轴上的点与实数集有何关系？与有理数集呢？

3. 下列各式中，a在什么条件下才成立？

(1) $|a|=a$；(2) $|-a|=-a$；(3) $|a|=|-a|$；

(4) $a=-a$；(5) $-|a|=a$；(6) $|a|>a$。

4. 求值：

(1) $|a-b|$；(2) $-|-a|$；(3) $\frac{|a|}{a}$；(4) $|2a-5|$；

(5) $\sqrt{a^2}$；(6) $(\sqrt{a})^2$；(7) $\sqrt{(a-2)^2}$；(8) $\sqrt[3]{a^3}$；

5. a、b都是实数，

(1) 分析a与$2a$谁大？当$a\times b=0$时，a，b应该是什么数？

(2) a^2与a谁大？当$a\neq 0$时，a与$\frac{1}{a}$谁大？

6. 比较下列各组数的大小：

(1) π与$\frac{355}{113}$；(2) $-\sqrt{29}$与$-5\frac{4}{13}$。

7. 计算：

(1) $1\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-2\frac{7}{10}$； (2) $-1\frac{2}{3}\times\left(0.5-\frac{2}{3}\right)\div1\frac{1}{9}$；

(3) $-2\frac{1}{2}+5\frac{3}{5}\div(-2)\times\left(-\frac{5}{14}\right)$；

(4) $-3-\left[-5-\left(1-0.2\times\frac{3}{5}\right)\div(-0.2)\right]$。

8. 计算：

(1) $(56-83)\times0+1\div1-0\div100-(9-3\times6)$；

(2) $\left\{\left[\left(-\frac{11}{48}-\frac{31}{80}\right)+\left(\frac{17}{24}+\frac{9}{40}\right)\right]\div3\frac{4}{5}\right\}\times\left(-1\frac{5}{7}\right)$。

9. 计算：

(1) $(-81)\div2\frac{1}{4}+\frac{4}{9}\div(-16)$；

(2) $|-5|-|-7^2|+\left|\frac{1}{3}\right|-|5\div(-6)|-\sqrt{(-3)^2}$；

(3) $1\frac{1}{2}\times\left[3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-1\right]-\frac{1}{3}\times\left[(-2)^2+|-4.5+3|\right]$；

(4) $\dfrac{-4\frac{1}{4}+4.25}{1-\frac{3}{4}}+\dfrac{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}}{(-6)\times8.5}$。

10. 计算：

(1) 已知 $|(a-1)|+(b+2)^2=0$，求实数a、b的值；

(2) $\left|\frac{3}{5}\div\left(-\frac{4}{5}\right)^2-\left[\left(10\sqrt{3}-12\sqrt{3}\right)\div\sqrt{6}+1\frac{2}{3}+\sqrt{2}\right]\right|$；

(3) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$

11. 已知：实数$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$，

求证：a，b互为倒数。

第二章 代 数 式

用运算符号（加、减、乘、除、乘方、开方）把数或表示数的字母连结而成的式子叫代数式。单独的一个字母或数也是代数

式。用数代替代数式中的字母计算所得的结果，叫代数式的值。代数式的分类如下：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

一、整　式

1．基本概念

有理式：只含加、减、乘、除、乘方运算的代数式叫做有理式。

有理整式：除式中不含字母的有理式叫有理整式，通常称为整式。如$\frac{1}{2}(a+b)h$，$\frac{4}{3}\pi R^3$，πr^2。

单项式：没有加、减运算的整式叫单项式。如$-3a^2b$（它是几次？系数是什么？）。3与$-a$是单项式吗？

多项式：几个单项式的代数和叫多项式。如$3a^2b-4ab^2+2b^3-1$。（它是几次几项式？它的常数项是什么？）

同类项：所含字母相同且相同字母的指数也分别相同的项叫同类项。如$3xy^2$与$-4xy^2$。（但$3xy^2$与$-4x^2y$就不是。）

2．整式运算

（1）加减法。实为合并同类项。有括号时先去括号再合并同类项。（怎样合并同类项？）去括号或加括号的法则同实数法则。

（2）乘法。主要依据是：

基本运算定律：交换律、结合律、乘法对加法的分配律。

幂的运算法则：同底幂相乘，底数不变，指数相加。

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（m、n为自然数）

单项式相乘：把系数和同底数的幂分别相乘，只在一个单项式中含有的字母，连同它的指数一起作为因式照写在积里。

单项式与多项式相乘：用单项式去依次乘多项式的每一项，再把所得积相加。

$$(-4x)(2x^2-3x)=-8x^3+12x^2$$

多项式与多项式相乘：用一个多项式中的每一项依次乘另一个多项式中的每一项后，再把所得的积相加。

$$(x+2y)(5a-3b)=5ax-3bx+10ay-6by=\cdots\cdots$$

（3）乘法公式。

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$（平方差公式）

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$（完全平方公式）

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$（立方和、立方差公式）

以上公式是特殊形式多项式相乘所得的共同规律。它较之于用一般乘法更简便。

（4）乘方。乘方运算的基础是幂的乘方和积的乘方。

幂的乘方法则是：底数不变，指数相乘。$(a^m)^n=a^{mn}$（m、n为自然数）

积的乘方法则是：各因式分别乘方，再把所得的幂相乘。$(ab)^n=a^nb^n$（n为自然数）

多项式的乘方，按乘方的意义和多项式相乘的法则进行。

（5）除法。除法运算的基础是同底幂相除，其法则是：底数不变，指数相减。$a^m\div a^n=a^{m-n}$（m，n为自然数，$m>n$）。

单项式相除：把系数和同底数的幂分别相除，作为商的因式，只在被除式里含有的字母连同它的指数也作为商的因式。
$12a^3b^2x\div(-3ab^2)=[12\div(-3)]\cdot a^{3-1}\cdot b^{2-2}\cdot x$

多项式除以单项式：多项式中的每一项分别除以这个单项式，再把所得的商相加，如 $(15x^2y-10xy^2)\div 5xy=15x^2y\div 5xy+(-10xy^2)\div 5xy=3x-2y$

多项式相除：(见例6)

例1 用代数式表示：a与b平方的和减去a与b和的平方，当$a=-3$，$b=-4$，求这个代数式的值。

解 这个代数式是$(a^2+b^2)-(a+b)^2$

$\because\ a=-3,\ b=-4$

$\therefore\ (a^2+b^2)-(a+b)^2=a^2+b^2-a^2-2ab-b^2=-2ab$

$=-2\times(-3)\times(-4)=-24$

注意：(1)两数平方的和与这两数和的平方是不同的。(除非两数中至少有一个为零)。(2)求代数式的值，只有先将代数式化简，然后代入数进行计算才更简便。(3)用代数式表示数字语言，是列方程解应用题的基础。

例2 计算：

(1) $3a^3b\cdot(-2ab)^3$

(2) $\left(-\frac{3}{2}a^3b^2\right)^2\div\left(\frac{3}{2}a^5b^4\right)$

解 (1) 原式$=3a^3b\cdot(-8a^3b^3)=-24a^6b^4$

(2) 原式$=\frac{9}{4}a^6b^4\div\frac{3}{2}a^5b^4=\left(\frac{9}{4}\times\frac{2}{3}\right)a^{6-5}b^{4-4}$

$=\frac{3}{2}a$

注意：运算顺序同实数的运算顺序。

例3 计算：$2x-|x-1|-\sqrt{(x+1)^2}-2(x^3-1)$

分析：解绝对值符号内含有字母的问题，关键是分别讨论字母为何值时才能去掉绝对值符号。根号内是完全平方式，先用绝对值符号表示其算术根。

(1)当$x\geqslant 1$时，$x-1\geqslant 0$，$x+1>0$，即$|x-1|=x-1$，

$\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|=x+1$

$\therefore$ 原式 $=2x-(x-1)-(x+1)-2(x^3-1)$

$=2x-x+1-x-1-2x^3+2=2-2x^3$

(2)当 $-1\leqslant x<1$ 时，$x-1<0$ $x+1\geqslant 0$

即 $|x-1|=-(x-1)$，$\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|=x+1$

$\therefore$ 原式 $=2x-[-(x-1)]-(x+1)+2-2x^3$

$=2x+x-1-x-1+2-2x^3$

$=2x-2x^3$

(3)当 $x<-1$ 时，$x-1<0$，$x+1<0$，

即 $|x-1|=-(x-1)$，$\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

$=-(x+1)$

$\therefore$ 原式 $=2x-[-(x-1)]-[-(x+1)]+2-2x^3$

$=2x+(x-1)+(x+1)+2-2x^3$

$=-2x^3+4x+2$

注意：(1)去绝对值符号的讨论方法是：令绝对值符号内的式子为零，分别找出此时字母的值(此例中为1和－1)。它们在数轴上的对应点将数轴分成若干部分（此例中分为三部分），当字母分别为其中每一部分的对应数值时（分点不能漏掉），绝对值符号内式子的正负即可知，从而绝对值符号可去掉。(2)绝对值符号具有括号作用。绝对值符号去掉后，要换上括号。(3)如果此题加一条件：$-1<x<2$，又如何解？

例4* 计算：$(a+b)^2(a-b)^2-(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

解　原式 $=[(a+b)(a-b)]^2-(a^4-b^4)$

$=(a^2-b^2)^2-a^4+b^4$

$=a^4-2a^2b^2+b^4-a^4+b^4$

$=2b^4-2a^2b^2$

*指选自初中课本第六册总复习题，下同。