主编　徐泽洲　项　坊　李金生

IMO

初中数学 奥林匹克读本

（最新修订本）

二年级

★源于基础

★高于课本

★启迪思维

★掌握方法

@

3.6-86

全国优秀畅销书　新增习题详解

江苏教育出版社

初中数学

奥林匹克读本

（最新修订本）

（二年级用）

主　　编　徐泽洲　须　功　李金生
编　　写　曹国钧　须　功　周勤保
　　　　　王会梅　陶树海　吉　星

江苏教育出版社

初中数学奥林匹克读本

（最新修订本）

（二年级用）

主编　徐泽洲等

责任编辑　眭双祥

出版发行：江　苏　教　育　出　版　社

（南京市马家街 31 号，邮政编码：210009）

网　　址：http://www.edu-publisher.com

经　　销：江　苏　省　新　华　书　店

照　　排：南京展望照排印刷有限公司

印　　刷：扬州鑫华印刷有限公司

（扬州市运河西路 215 号，邮政编码：225003）

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 10.5　字数 219 000

2000 年 9 月第 2 版　2001 年 7 月第 4 次印刷

印数 196 471－221 500 册

ISBN　7－5343－2677－X

G·2417　　　　定价：10.00 元

序

数学是一门重要的基础学科，它的重要性，按我自己肤浅的理解，曾经概括为下面三句话：数学是建设四化的武器，数学是其他学科的基础，数学是锻炼思维的体操.

要打好数学的基础，是应该从中、小学抓起的. 就中、小学阶段应该掌握的数学知识来说，看起来千变万化，但真正基本的东西其实并不是很多的. 对这些基本的内容通过认真而严格的训练，真正做到充分理解，并能熟练运用，就为今后进一步的学习和工作打下了良好的基础，也一定能逐步培养起学生对数学的爱好和兴趣，使他们变得更加聪明起来. 既减轻学习负担，又提高学习质量，促进中、小学生生动活泼地全面成长，不仅非常必要，也是完全可能的. 舍本求末，不注意基本知识的严格训练和真正掌握，不培养学生主动积极的思维能力，搞题海战术，用大量的难题、偏

题或怪题把学生压得透不过气来，只会束缚学生的聪明才智，带来摧残人才的恶果.

这么说，是不是对一部分学习优秀、对数学有兴趣并且确有余力的中、小学学生，不应该提出较高的要求并进行一些特殊的培养呢？当然不是这样，教师完全有责任根据因材施教的原则，帮助和促进这一部分学生在全面发展的基础上，并在不过分加重课外学习负担的前提下，进一步提高对数学的兴趣，在增进知识和提高能力这两方面都得到进一步的培养.这是学校教育的另一个重要任务，也是一件值得认真探索并总结经验的工作.

现在的这一套书，原先是“南通市青少年数学奥林匹克俱乐部”开展活动时所用的教材，也曾被其他一些地区开展类似的活动时所采用.实践表明它对提高中、小学生的数学思维能力起了积极的作用，一部分学生并已在全国性及国际性的数学竞赛中取得了优异的成绩.参加1989—1990年度美国小学数学邀请赛的70人全部获得一或二等奖，参赛的两个队均获得最高成就奖.刚进入高一的学生参加全国数学竞赛获三等奖，并以满分获江苏省高二数学竞赛一等奖，这就是突出的例子.现在本书在经过好几年的试用并不断修改完善后正式出版，不仅是过去这方面工作成果的一个结晶，也相信会对今后进一步开展有关的活动起到推动作用.

《初中数学奥林匹克读本》的出版，将与《小学数学奥林匹克读本》一起成为《中小学数学奥林匹克读本》丛书，这套丛书将是九年义务教育数学教程的很切合实际的实用性很强的配套读本.

这套由江苏教育出版社出版的书，是由我的故乡南通市的一批有多年实践经验并具有较高水平的中、小学数学教师编写的. 主编徐泽洲、李金生两位同志并执教于我的母校南通中学. 我为自己的故乡和母校有这样一批立志献身祖国基础数学教育事业的老师和同志们感到光荣和自豪，并预祝他们在已有成绩的基础上，再接再厉，为中、小学数学教育水平的提高作出更多的努力和更大的贡献.

李大潜

于复旦大学

1991.4.23晚

目　　录

代数部分

一　因式分解(一) ………………………………… 1
二　因式分解(二) ………………………………… 9
三　因式分解(三) ………………………………… 17
四　分式有意义及值为零的条件 ………………… 26
五　分式运算巧解 ………………………………… 35
六　部分分式及其应用 …………………………… 45
七　关于分式条件等式的证明 …………………… 56
八　算术平方根的非负性及应用 ………………… 65
九　$\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ 型的二重根式的化简 ………… 72
十　$\sqrt{a^2} = |a|$ 的应用 ………………………… 80
十一　根式大小的比较 …………………………… 86
十二　无理数整、小数部分的确定 ……………… 95
十三　巧用乘方、开方解题 ……………………… 102
十四　分母有理化的技巧 ………………………… 111

几何部分

十五　角的和差倍分 ……………………………… 121
十六　造全等 ……………………………………… 129

十七　尺规作图(初步) ………………………… 143
十八　等腰三角形和直角三角形 ……………… 149
十九　勾股定理及其应用 ……………………… 161
二十　几何中的不等量 ………………………… 172
二十一　平行四边形 …………………………… 183
二十二　梯形 …………………………………… 196
二十三　等边三角形 …………………………… 208
二十四　正方形 ………………………………… 220
二十五　中位线及其应用 ……………………… 233
二十六　对称 …………………………………… 247
二十七　黄金分割 ……………………………… 259
二十八　相似三角形 …………………………… 268
二十九　射影定理 ……………………………… 279
三十　面积和面积法证题 ……………………… 292
三十一　代数法证题 …………………………… 303
三十二　梅氏定理及塞瓦定理 ………………… 314

·代数部分·

一　因式分解(一)

地位与作用

因式分解是初等代数恒等变形的一种重要的基本的方法之一,它应用广泛,是解方程及代数式、三角式变形的有力工具.因式分解的方法较多,具有一定的技巧性,添拆项法就是其中的一种技巧性较强的方法.在因式分解中,当其他方法不奏效时,添拆项法往往可以“起死回生”.

知识与要点

1. 因式分解就是把一个多项式化为几个整式的积的形式,是多项式乘法的逆向变形.

2. 因式分解常用的方法主要有提取公因式法,公式法,十字相乘法,分组分解法.此外还有添项法和拆项法等.添项就是在原式添上两个符号相反绝对值相同的项;拆项就是将原式中的某些项拆成两项或更多项的代数和.

3. 在进行因式分解时,常需要通过添项或拆项,然后再分组分解,添拆项的目的是为恰当的分组构造条件,以便分解因式.

范例与思考

例 1 分解因式 x^5+x+1.

【分析】 这个三项式既没有公因式提取,也不能应用公式和直接分组分解.我们可以运用添项法,添上$-x^2$和x^2来创造分组分解的条件,使问题得到解决.

解: x^5+x+1

$=(x^5-x^2)+(x^2+x+1)$

$=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$

$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$.

【思考】 $x^{5n}+x^n+1$ 如何分解因式?

例 2 分解因式 $(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$

解: $(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$

$=(1+y)^2+2(1+y)x^2(1-y)+x^4(1-y)^2$

$-2(1+y)x^2(1-y)-2x^2(1+y^2)$

$=[(1+y)+x^2(1-y)]^2-(2x)^2$

$=[(1+y)+x^2(1-y)+2x][(1+y)+x^2(1-$

$y)-2x]$

$=(x^2+2x+1+y-x^2y)(x^2-2x+1+y-$

$x^2y)$

$=[(x+1)^2-y(x^2-1)][(x-1)^2-y(x^2-1)]$

$=[(x+1)^2-y(x+1)(x-1)][(x-1)^2-y(x$

$+1)(x-1)]$

$=(x+1)(x-1)(x+1-xy+y)(x-1-xy$

$-y)$.

说明：这道题用的是配方法，配方法是一种特殊的添项法.

例 3 分解因式 $3x^2 - x^4 - 1$.

【分析】 这个三项式不能直接采用提取公因式法、公式法、十字相乘法进行分解，所以只有设法创造条件分组分解. 但这个多项式只有三项，我们考虑运用拆项法，将 $3x^2$ 拆成 x^2 和 $2x^2$，然后再分组分解.

解：

$$\begin{aligned}&3x^2 - x^4 - 1\\ =\ &x^2 - x^4 + 2x^2 - 1\\ =\ &x^2 - (x^4 - 2x^2 + 1)\\ =\ &x^2 - (x^2 - 1)^2\\ =\ &(x + x^2 - 1)(x - x^2 + 1).\end{aligned}$$

例 4 分解因式 $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

【分析】 这道题我们可以将 $6x^2$ 拆成 $2x^2$ 和 $4x^2$，$11x$ 拆成 $8x$ 和 $3x$，使得分组后每组中两项系数之比相等，即 $1:2 = 4:8 = 3:6$，然后继续分解.

解：

$$\begin{aligned}&x^3 + 6x^2 + 11x + 6\\ =\ &(x^3 + 2x^2) + (4x^2 + 8x) + (3x + 6)\\ =\ &x^2(x + 2) + 4x(x + 2) + 3(x + 2)\\ =\ &(x + 2)(x^2 + 4x + 3)\\ =\ &(x + 2)(x + 1)(x + 3).\end{aligned}$$

【思考】 考虑例 4 的其他解法.

利用添拆项法分解因式，对于一个具体题目，究竟如何添拆，有时不易一下看出，具有一定的灵活性. 但对于用 -1 或 1 代替式中字母时，其值为零的一元多项式，还是可以找出一定的规律.

例 5 分解因式 $x^3 - 3x^2 + 4$.

解：用 -1 代替 x，得 $-1 - 3 + 4 = 0$，由此推出三个关

系式：

$$1=-3+4, \quad ①$$

$$-3=1-4, \quad ②$$

$$4=1+3. \quad ③$$

按照这三个关系式，可得出三种拆项法：

① 拆三次项 x^3 为 $-3x^3$ 和 $4x^3$，

$$\begin{aligned}
& x^3-3x^2+4 \\
=& -3x^3-3x^2+4x^3+4 \\
=& -3x^2(x+1)+4(x^3+1) \\
=& -3x^2(x+1)+4(x+1)(x^2-x+1) \\
=& (x+1)(-3x^2+4x^2-4x+4) \\
=& (x+1)(x^2-4x+4) \\
=& (x+1)(x-2)^2.
\end{aligned}$$

② 拆二次项 $-3x^2$ 为 x^2 和 $-4x^2$，

$$\begin{aligned}
& x^3-3x^2+4 \\
=& x^3+x^2-4x^2+4 \\
=& x^2(x+1)-4(x^2-1) \\
=& x^2(x+1)-4(x+1)(x-1) \\
=& (x+1)(x^2-4x+4) \\
=& (x+1)(x-2)^2.
\end{aligned}$$

③ 拆常数项 4 为 1 和 3，

$$\begin{aligned}
& x^3-3x^2+4 \\
=& x^3+1-3x^2+3 \\
=& (x+1)(x^2-x+1)-3(x^2-1) \\
=& (x+1)(x^2-x+1)-3(x+1)(x-1) \\
=& (x+1)(x^2-x+1-3x+3) \\
=& (x+1)(x^2-4x+4)
\end{aligned}$$

$= (x+1)(x-2)^2.$

【思考】 (1) 分解因式 $3x^2+2x-5$，用1代替式中的 x 得 $3+2-5=0$，由此推得

$$3=-2+5 \quad ①$$

$$2=-3+5 \quad ②$$

$$-5=-3-2 \quad ③$$

你能根据上面的三个关系式，用三种不同的拆项方法分解因式吗？

(2) x^3+2x^2-5x-6 能否按上述规律用拆项法分解因式？

例 6 分解因式 $x^4+x^3-3x^2-4x-4$.

解： $x^4+x^3-3x^2-4x-4$

$=(x^4+x^3-2x^2)-(x^2+4x+4)$

(将 $-3x^2$ 拆成 $-2x^2$ 和 $-x^2$)

$=x^2(x^2+x-2)-(x+2)^2$

$=x^2(x+2)(x-1)-(x+2)^2$

$=(x+2)(x^3-x^2-x-2)$

$=(x+2)[(x^3-2x^2)+(x^2-2x)+(x-2)]$

(将 $-x^2$ 拆成 $-2x^2$ 和 x^2，$-x$ 拆成 $-2x$ 和 x)

$=(x+2)[x^2(x-2)+x(x-2)+(x-2)]$

$=(x+2)(x-2)(x^2+x+1).$

训练与习题

将下列多项式分解因式：

① x^4+4；

② $5x^3+2xy^2+7y^3$；

③ x^3-9x+8；

④ $x^3+3x^2+3x-26$；

⑤ $a^4-27a^2b^2+b^4$；

⑥ $x^9+x^6+x^3-3$；

⑦ $x^6-y^6+x^4+x^2y^2+y^4$；

⑧ x^8+x^4+1；

⑨ $a^3b-ab^3+a^2+b^2+1$；

⑩ $a^4+2a^3+3a^2+2a+1$；

⑪ $2x^4-15x^3+38x^2-39x+14$；

⑫ $x^4+2x^3y-3x^2y^2-4xy^3-y^4$.

提示与详解

① 解：

$$\begin{aligned}&x^4+4\\=&(x^4+4x^2+4)-4x^2\\=&(x^2+2)^2-(2x)^2\\=&(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).\end{aligned}$$

② 解：

$$\begin{aligned}&5x^3+2xy^2+7y^3\\=&5x^3-5xy^2+7xy^2+7y^3\\=&5x(x^2-y^2)+7y^2(x+y)\\=&5x(x+y)(x-y)+7y^2(x+y)\\=&(x+y)(5x^2-5xy+7y^2).\end{aligned}$$

③ 解：

$$\begin{aligned}&x^3-9x+8\\=&x^3-9x+9-1\\=&(x^3-1)-(9x-9)\\=&(x-1)(x^2+x+1)-9(x-1)\\=&(x-1)(x^2+x-8).\end{aligned}$$

④ 解：

$$\begin{aligned}&x^3+3x^2+3x-26\\=&(x^3-2x^2)+(5x^2-10x)+(13x-26)\end{aligned}$$

$$= x^2(x-2) + 5x(x-2) + 13(x-2)$$
$$= (x-2)(x^2+15x+13).$$

⑤ 解： $a^4 - 27a^2b^2 + b^4$
$$= (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) - 25a^2b^2$$
$$= (a^2 - b^2)^2 - (5ab)^2$$
$$= (a^2 + 5ab - b^2)(a^2 - 5ab - b^2).$$

⑥ 解： $x^9 + x^6 + x^3 - 3$
$$= (x^9 - 1) + (x^6 - 1) + (x^3 - 1)$$
$$= (x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) + (x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^3 - 1)$$
$$= (x^3 - 1)[(x^6 + x^3 + 1) + (x^3 + 1) + 1]$$
$$= (x^3 - 1)(x^6 + 2x^3 + 3)$$
$$= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + 2x^3 + 3).$$

⑦ 解： $x^6 - y^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4$
$$= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) + (x^4 + x^2y^2 + y^4)$$
$$= (x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^2 - y^2 + 1)$$
$$= [(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2](x^2 - y^2 + 1)$$
$$= [(x^2 + y^2)^2 - (xy)^2)](x^2 - y^2 + 1)$$
$$= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^2 - y^2 + 1).$$

⑧ 解： $x^8 + x^4 + 1$
$$= (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4$$
$$= (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2$$
$$= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$
$$= [(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2](x^4 - x^2 + 1)$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

⑨ 解： $a^3b - ab^3 + a^2 + b^2 + 1$
$$= (a^3b - a^2b^2 + ab) + (a^2b^2 - ab^3 + b^2) + (a^2 - ab + 1)$$
$$= ab(a^2 - ab + 1) + b^2(a^2 - ab + 1) + (a^2 - ab + 1)$$
$$= (a^2 - ab + 1)(b^2 + ab + 1).$$

⑩ 解： $a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$

$= (a^4 + a^3 + a^2) + (a^3 + a^2 + a) + (a^2 + a + 1)$

$= a^2(a^2 + a + 1) + a(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1)$

$= (a^2 + a + 1)(a^2 + a + 1)$

$= (a^2 + a + 1)^2.$

⑪ 解： $2x^4 - 15x^3 + 38x^2 - 39x + 14$

$= 2x^4 - 4x^3 - 11x^3 + 22x^2 + 16x^2 - 32x - 7x + 14$

$= 2x^3(x - 2) - 11x^2(x - 2) + 16x(x - 2) - 7(x - 2)$

$= (x - 2)(2x^3 - 11x^2 + 16x - 7)$

$= (x - 2)[(2x^3 - 7x^2) - (4x^2 - 14x) + (2x - 7)]$

$= (x - 2)[x^2(2x - 7) - 2x(2x - 7) + (2x - 7)]$

$= (x - 2)(2x - 7)(x - 1)^2.$

⑫ 解： $x^4 + 2x^3y - 3x^2y^2 - 4xy^3 - y^4$

$= (x^4 - y^4) + (3x^3y - 3xy^3) - x^3y - 3x^2y^2 - xy^3$

$= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) + 3xy(x^2 - y^2) - xy(x^2 + 3xy + y^2)$

$= (x^2 - y^2)(x^2 + 3xy + y^2) - xy(x^2 + 3xy + y^2)$

$= (x^2 + 3xy + y^2)(x^2 - xy - y^2).$

二　因式分解(二)

地位与作用

双十字相乘法顾名思义就是进行两次十字相乘，它是由基本的十字相乘法发展而成的，它对于广义的二次三项式的因式分解具有简洁、迅速、方便的功效. 换元法是一种重要的数学思想方法，它在恒等变形、求值、解方程等各类问题中具有广泛的应用. 在因式分解中运用换元法，可以使较为复杂的多项式得以简化，困难的因式分解问题得到转化. 因此掌握运用双十字相乘法和换元法，对于提高因式分解的技能技巧十分有益.

知识与要点

1. 运用双十字相乘法对 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$ 型的多项式分解因式的步骤：

① 用十字相乘法分解前三项组成的二次三项式.

② 在这个十字相乘图右边再画一个十字，把常数项分解为两个因数，填在第二个十字的右端，使这两个因数在第二个十字中交叉之积之和，等于原式中含 y 的一次项的系数 E，同时还必须与第一个十字中左列的两个因数交叉相乘，使其交叉之积之和等于原式中含 x 的一次项的系数 D.

2. 运用换元法分解因式，是将原多项式中的某一部分项