数的发展与应用

1 10 11 100 101 110 111 1000 1001 1010 1011 1100

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

一 二 三 四 五 六 七 八 九 十

中学生理科丛书

数的发展与应用

刘达中 编写

广东教育出版社

中学生理科丛书

数的发展与应用

刘达中 编写

*

广东教育出版社出版发行
广东省新华书店经销
广东番禺印刷厂印刷
787×1092毫米32开本 5印张 100,000字
1987年10月第1版 1987年10月第1次印刷
印数1—2,450册
ISBN 7-5406-0141-8/G·140
书号 7449·356 定价 1.00元

序

数是数学的主要对象，式的问题实质上也是数的问题。而对数的认识又有一个过程，牵涉到复杂的理论问题和实际问题，在数的研究、讨论中又体现了重要的数学思想和数学方法。因此对数的概念及其发展获得比较清晰、系统的认识，是一项基础工作。

学生从小学到中学，长期以来都和数打交道，但因为这段历程很长，学到的知识很零散，而且囿于当时的知识水平和理解能力，课本不可能作深入的阐述。所以他们对于数的概念，特别是对于数的概念的发展，认识还是很朦胧的，很不完整的。因此让学生通过课外阅读、对数获得比较清晰、系统的认识，并接受一些数学思想和数学方法的教育，是很有意义的。

这本书收集了丰富的材料，针对中学生的实际，从理论和实际的结合上对这个问题作了深刻、系统的讲述，正好适合这方面的需要。

陈世麟

目　　录

引　言

在数学教师的带领下，同学们前进在数的康庄大道上。在小学阶段，逐步认识了正整数、零和正分数，先后进入了自然数、扩大的自然数和正有理数的领域。到了中学阶段，又逐步认识了负数、无理数和虚数，先后进入了有理数、实数和复数的领域。随着数的疆土的不断扩大，同学们所走的路子也越来越宽广了。

人类对数的认识，可追溯到野居穴处、钻木取火的原始时代。那时，人类对"自然数"已有朦胧的认识。从数的概念的初步形成，直到十九世纪实数理论的完成，这期间经历了一个很长的历史过程。然而，不论岁月如何漫长，卷帙如何浩繁，关于数的全部概念，都已经过调整压缩，出现在中小学数学教材之中。限于同学们当时的知识水平，在教科书上不可能用严谨的逻辑结构来建立数的理论，而只能采用直观的方法来描述数。并且，为了适应同学们的接受能力，在教科书中，数的概念出现的顺序与数的概念的发展历史是不尽相同的。在小学课本中，出现正整数的同时就出现了零。但在数的发展的历史上，零作为数被引入数的系统，却是比较晚的，它是在正分数被引进之后才与负数同时被引进的。

数的概念的产生也是交错的。人们还未完全认识负数时，就已有无理数的概念；在实数理论完整建立之前，已经产生了虚数的概念。而且，实数理论的建立比复数理论的建立还要晚。

这本小册子将通过有趣的历史资料，向同学们介绍人类在解决实际问题及解决数学本身的问题的过程中，是怎样逐步把数的概念发展起来和建立起相应的运算法则的，以及它们在中学数学中的主要的应用。为了叙述方便，我们还是按照中小学数学教科书中数的发展顺序来谈。

一、自然数、零、正分数

1. 自然数的概念的形成

许多呀呀学语的小孩，已会说出自然数列里前面的几个数。然而，在人类历史上，形成自然数的概念，创造出抽象的数，却经历了一个很长、很长的时期。

几十万年前的古人类，使用粗陋的石器工具获取猎物，并逐步学会了种五谷、养牲畜、耕田地。那时候，人们最关心的是有没有获得猎物、果实或鱼虾。有，就可分配给大家美餐一顿；无，就只好饿肚子了。这样，人类很早就有了“有”与“无”的概念。数的概念，就是从认识“有”中开始的。

“有”，是由一个个的个体组成的。例如，一群鹿，是由一只只的鹿组成。一堆野果，是由一个个的野果组成。白天能看到一个太阳，晚上有一个月亮，人长着一个脑袋……。这些现象，在人的脑子里反复了千千万万次，从而产生了“一”的概念。

同样，人有两只耳朵，两只眼睛，两只手，两条腿，在原始的“计数”中，“二”的概念也逐步形成了。

原始人最初只知道“一”和“二”两个数，如果要数的东西多于两个时，就笼统地用“许多”来表示。

为了生活的需要，原始人逐步学会运用古老的比较法来对某种物体的集合作量的估计。例如，一群人围猎结束分配

猎物时，如果每人一件但有些人分不到，就说明人比猎物多；如果每人拿一件猎物后还剩下一些猎物，就说明人比猎物少；如果刚好每个人都分到一件猎物，没有人分不到，也没有剩余猎物，就说明人与猎物一样多了。这样，人们经历了许许多多类似的“比较”，渐渐地又有了“多”、“少”和“一样多”的概念。而且在反复的比较中，逐步认识了不同的“多”，自然数的概念就这样开始孕育形成了。

随着生产工具的改进，生产逐步有了发展，具体的、简单的“一对一”的关系，越来越不足以表达某种事物集合的量的性质了。人们逐步学会运用刻痕、结绳等半具体、半抽象的方法来记数。

关于“结绳记数”，有一段有趣的故事。古波斯王一次打仗，命令将士们守一座桥，要守六十天。为了把“六十”这个数准确地表示出来，他用一根很长的皮条，在上面系了六十个扣，让将士们一天解一个扣，什么时候解完了，守桥的任务就算完成了。

据我国春秋战国时期的《易经》上记载，上古时期，我们的祖先就有“结绳而治”，即用在绳上打结的办法来记事查数了。

在世世代代的实践活动中，人们逐步采用某种符号来表示一道刻痕或一个绳结，用另一种符号来表示两道刻痕或两个绳结，用不同的符号来表示不同数目的刻痕或绳结，把数与具体事物的集合分离出来了。抽象的符号，成了具体事物集合数量的化身。这给人们对自然数的认识起了很重要的作用。

自然数的概念，就这样在漫长的历史年代中，逐步形成起来了。

2. 自然数的符号和计数系统

用刻痕和结绳的方法进行单调的计数，当数字很大时，就会失去其清晰性和准确性。人类创造数字符号弥补了这种缺陷。但如果对于每一个数都要创造一个新的符号，无疑地对于人们的记忆和使用，都是极不方便的。于是，人们逐步创造出，由表示较小数字的符号，组成表示较大数字的符号。

创造数字符号，也经历了漫长的历史过程。许多国家和民族，各自形成了自己的记数系统。

大约在两千五百年前，罗马人创造了罗马数字，它的七个基本符号是：

I(1)，V(5)，X(10)，L(50)，

C(100)，D(500)，M(1000)。

这些数字中，规定了符号I、X或C位于大数后面就作加数；位于大数的前面就作减数；把若干个罗马数字写成一列，它表示的数等于各个数相加的和。例如：

$\mathrm{III}=1+1+1=3$，$IV=5-1=4$，

$\mathrm{VI}=5+1=6$，$IX=10-1=9$，

$\mathrm{XIV}=10+4=14$，$XXXIX=10+10+10+9=39$，

$\mathrm{XLV}=(50-10)+5=45$，

$\mathrm{MCMXXCV}=1000+(1000-100)+(100-20)+5=1985$。

此外，还规定在数的上面画一横线，这个数就扩大一千倍。例如：

$\overline{\mathrm{C}}=100000$，$\overline{\mathrm{XVI}}=16000$。

罗马数字的实质是用尽可能少的几个符号，通过适当的组合组成所有数的符号．这种数的表示法称为加法制．由于这种数的符号太长，不易写、不易读，进行书面计算也特别麻烦，后人很少采用。

数的另一种表示法是位置制．我们所熟悉的、现在国际通用的阿拉伯数字就属于这一种．阿拉伯数字是用十个不同的符号来表示各数．其中九个符号是头九个自然数１，２，３，４，５，６，７，８，９．第十个符号是位置符号，它只在写数字时起填空作用，叫做零，用“０”表示．

在位置制记数法中，相同的数字在不同的位置上具有不同的数值．如阿拉伯数333表示三百三十三，三个３顺次表示300、30和３．而加法制的罗马数ＸＸＸ表示三十，每一个数字Ｘ都具有相同的数值10．

在用阿拉伯数字表示的数中，从右至左第一位的十个单位等于第二位的一个单位，第二位的十个单位等于第三位的一个单位。一般来说，任意一位的十个单位构成上一位的一个单位．这就是十进位制．

十进制记数法的出现及广泛流传，是与人们生来就具有一个“天然计算器”——十个手指头分不开的．在古印度，曾经发生过这样的事：当人们计算大群牛羊的头数时，先叫几个人站成一排，然后由第一个人伸出他的手指头，让一只牲畜与他的一只手指头对应，１，２，３，……数到10后就放下手．这时，第二个人伸出一个手指头表示10个．接着，第一个人又伸出他的手指头，同样数到10后又放下．这时，第二个人伸出两个手指头表示20个．继续下去，当第二个人把十个手指头都伸出来时，已数到100了．这时，第二个人放下手，第三个人伸出一个手指头表示100个，……这样，

到数完的时候，就可以由几个人伸出的手指头的个数，知道所数的牛羊头数。在这样的计数中，不同位置上的人所伸出的手指头代表的数目是不同的。第一个人的一个手指头代表 1 个，第二个人的一个手指头代表10个，第三个人的一个手指头代表100个，……这就是“十进位记数法”的萌芽。

阿拉伯数字和十进位记数法的出现，是数学史上无与伦比的奇迹。使用很少的几个符号就能表示一切数目，使符号除了具有形态意义外，还有数位意义。马克思称赞这是最妙的发明之一。

我国是最早使用十进位制的国家。我国使用的数字，通过历史的演变，保留下来的有小写体和大写体两种：

小写体　一二三四五六七八九十

大写体　壹贰叁肆伍陆柒捌玖拾

大写体是目前使用的最繁的数码。也正因为它字体繁，不易涂改，可防弊误，所以会计上使用的票证以及货币等仍采用它来记数。

【趣题 1 】

用 3 根火柴摆数字。小华摆成“3、11、20”三个数。小罗接着摆出了“4、6、9、11、51”五个数。小华不示弱，又摆了个“1000”。可是，小罗又摆了个更大的数“5000”。你知道他俩是怎样摆的吗？

3. 自然数的定义和四则运算

我们知道，自然数就是 1 ， 2 ， 3 ，……但这只是自然

数的一种记号，还不是自然数的本身．到底什么是自然数呢？

同学们认识数“1”时，小学数学课本上画着一个女孩、一棵树、一个书包和一粒算盘珠．这些集合的共同特征，就是只由一个元素组成．我们把这类集合的“基数”记为“1”．

同样，在认识数“2”时，课本上画着两个孩子、两只鸭子、两艘船和两粒算盘珠．这些集合的共同特征，就是都由两个元素组成．我们把这类集合的“基数”记为“2”．同时，课本上还画了两段小棒，表示“2”是由“1＋1”得到的．

……

从对这些数的认识，我们可以给自然数下一个定义：

非空的有限集合的基数叫做自然数．

如果这个集合是空集，情况怎样呢？在数学课本第一册介绍自然数的同时，用对比法给出三个集合（图1），

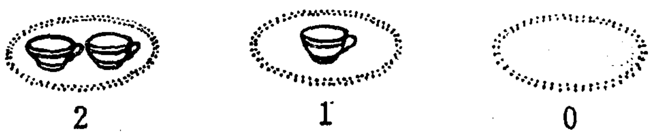


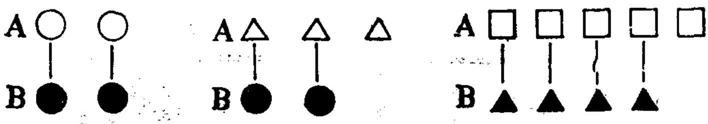
图1

这三个集合都以茶杯为元素．第一个集合包含两个茶杯，第二个集合包含一个茶杯，它们都是“非空”集合，基数分别是“2”、“1”．而第三个集合中一个茶杯也没有，它是一个“空集”．

空集的“基数”记作“0”．

0不是自然数．

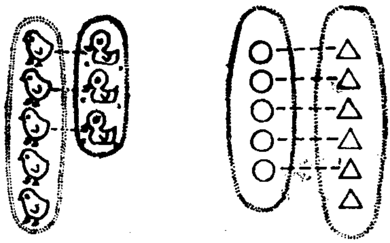
怎样比较自然数的大小呢？上面曾谈到原始人用对应的方法比较人数与猎物数的多少．为了使同学们有感性上的认识，在小学数学课本第一册中，给出了两个集合元素个数的同样多、一个比另一个多及一个比另一个少的图（图2）：



（同样多）　（3比2多）　（4比5少）

图2

在第二册中，又用集合对应的方法，给出了比较两个自然数大小的实例，介绍了“大于号”和“小于号”（图3）．



$5>3$　　$5<6$

大于号　　小于号

5大于3　　5小于6

图3

在感性认识的基础上，我们可以得到比较两个自然数的大小和相等的法则：

设非空有限集A、B的基数分别是a、b，

（1）若A的一个真子集的基数与B的基数相等，称a大于b，记作$a>b$；

（2）若A的基数与B的一个真子集的基数相等，称a小于b，记作$a<b$；

（3）若A与B的基数相等，称a等于b，记作$a=b$．

我们在明确了自然数的概念之后，就可以确立自然数四

则运算的意义了。

（1）加法

在小学数学课本第一册中，由图（图4）第一次给出了自然数的加法运算的例子：

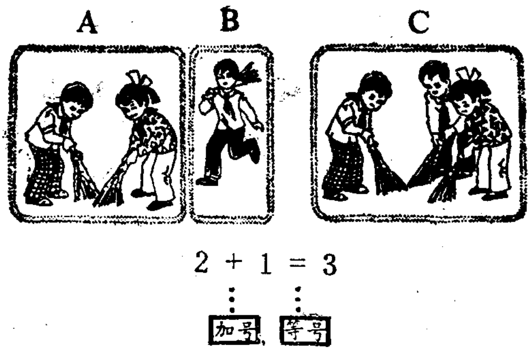


图4

这个例子说明了两个集合A和B（这两个集合里没有公共元素）并在一起组成了一个新的集合C。集合A和B的基数的和就是集合C的基数。

把上面的例子加以抽象，我们就可以引进如下的自然数的加法定义：

设A、B是两个非空有限集合，$A\cap B=\phi$。A、B的基数分别是a和b，记$C=A\cup B$，则C的基数c叫做a与b的和，记作$a+b=c$，a与b都叫做加数。求两个数的和的运算叫做加法。

（2）减法

在小学数学课本第一册中，由图（图5）第一次给出了自然数的减法运算的例子：

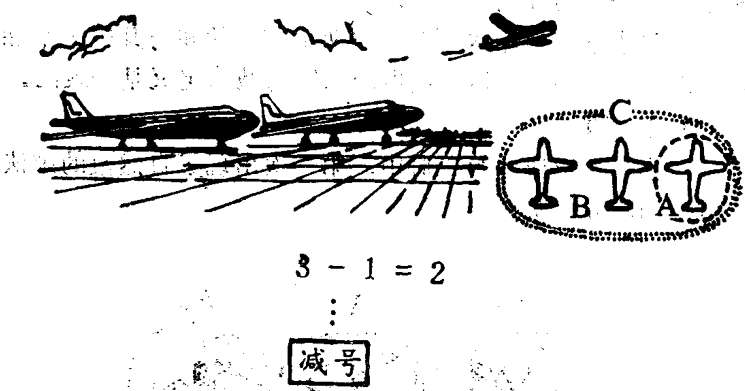


图 5

这个例子说明，所谓减法，就是从一个非空集合里拿去一部分元素，求还剩下多少个元素的一种运算.

一般地，我们可给自然数的减法定义如下：

设C、A是非空有限集合，$A \subset C$. C、A的基数分别为c、a，记$B = \overline{A}$，则B的基数b叫做c与a的差，记作$b = c - a$. c叫做被减数，a叫做减数. 求两数差的运算叫做减法.

从这个定义可以看出，自然数的减法运算不是总是可以施行的. 要能够得出差$c - a$来，必须而且只需基数为c的集合里含有一个基数为a的真子集.

从这个定义还可以看出，集合C是由集合A和集合B（即$\overline{A}$）合并而成的，$C = A \cup B$. 由加法的定义有：$c = a + b$. 所以，减法是加法的逆运算.

我们也可以不借助于集合的概念，而直接通过加法来对减法下定义：

a、c是两个自然数，如果存在自然数b，使$a + b = c$，那么b叫做c与a的差，记作$b = c - a$. c是被减数，a是减数. 求