ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

极 值

陈传理 倪政勇

湖北教育出版社

内 容 提 要

本书首先讨论了常遇到的几类初等函数的极值问题，提出了有关多元函数的条件极值问题及处理中常用的初等方法；然后讲述了三角函数的极值以及怎样运用导数法、几何图形、解析法来研究极值；最后一章运用极值知识解决了一些实际例子。

本书叙述简明，通俗易懂，适合中学生自学，同时亦可供中学教师教学时参考。

中学数学丛书

极 值

陈传理 倪政勇

*

湖北教育出版社出版 湖北省新华书店发行

沔阳县印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 5.125印张 1插页 115,000字

1984年1月第1版 1984年1月第1次印刷

印数：1—19,800

统一书号：7306·51 定价：0.46元

出 版 说 明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》，本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版。

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识．这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》，根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》．我们认为，这个工作是很有意义的．于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划．

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深，编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量．

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和教学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师．编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有

所得.

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的.丛书中每本小册子既相对独立又互相联系，同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用.学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读.另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，便于同学们自学，同时对中学教师教学亦有一定的参考作用.

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好.同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见.

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

目　录

第一章　极值概述

我国富饶的台湾宝岛，山势巍峨，群峰挺秀，其地形剖面图如下（图1.1）：

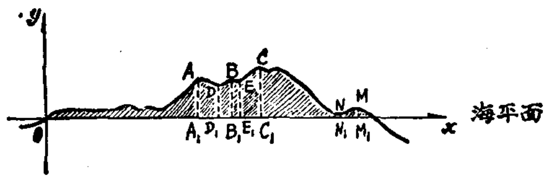

图　1.1

图中如 A、B、C 点处是山峰，D、E 点处是山谷．如图建立直角坐标系，地形曲线是以 x（长度）为自变量的函数 y（高度）$=f(x)$的图象．通常我们说在 A_1、B_1、C_1 处，函数 y 取得极大值；在 D_1、E_1 处，函数 y 取得极小值．极大值和极小值都叫做极值．A_1、B_1、C_1（或A、B、C）点叫极大值点，D_1、E_1（或 D、E）点叫做极小值点．可以看到，A 点比附近各点位置都要高，D 点比附近各点位置都要低．这样的函数曲线我们常常遇到，由此得到启发，给出极值的下述定义：

如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 的附近有定义，并且 $f(x_0)$的值比在 x_0 附近所有各点的函数值都大（或都小），那么称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$的**极大值**（**或极小值**），记作 $y_{max}=f(x_0)$（或 $y_{min}=f(x_0)$）①

① *max* 是英文极大 *maximum* 的简写

min 是英文极小 *minimum* 的简写

这一定义是严格意义上的极值定义，在高等数学里，极值概念有所扩充：

若函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义且连续，对于一点 x_0 有一邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 完全含于$[a, b]$内，使对于任意的 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 总有

$f(x)\leqslant f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 取得极大值；如果总有 $f(x)\geqslant f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 取得极小值.

在中学阶段，我们按前一定义理解.

理解极值概念，应注意以下几点：

(1) "极大"或"极小"，是指某一点 x_0 对应的函数值与附近所有点对应的函数值相比较而言，是函数在一个相当小的范围内 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 的性态，其中 δ 可以充分小. 鉴于这种"局部"性态，故也称局部极值.

(2) 函数极值是在一点附近小区间内定义的，因此一个函数在整个定义域内可能有多个极值，如函数 $y=2\sin 4x$ 其中 $x\in[0, 2\pi]$，在 $\frac{\pi}{8}$，$\frac{5\pi}{8}$，$\frac{9\pi}{8}$，$\frac{13\pi}{8}$点取得极大值 2；在 $\frac{3\pi}{8}$，$\frac{7\pi}{8}$，$\frac{11\pi}{8}$，$\frac{15\pi}{8}$点取得极小值 -2（图1.2）.

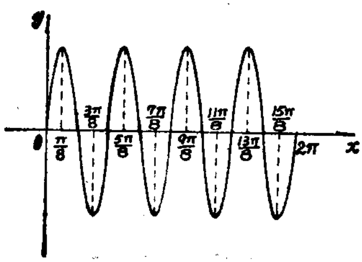

图 1.2

再如函数 $y=\sin x+\sin 2x$ 其中 $x\in[-\pi,\pi]$，在 -2.57 点取得极大值0.37，在0.94点取得极大值1.76，在 -0.94 点取得极小值 -1.76，在2.57点取得极小值 -0.37（图1.3）.

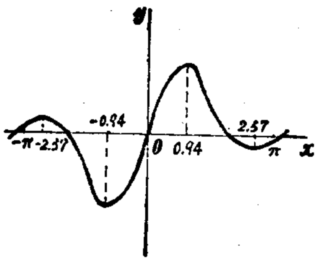

图 1.3

从整体来看，一个函数在某点的极大值可以小于在另外一点的极小值.

（3）函数在某点取得极值，并不一定要求函数在这一点可导，只须在这一点有定义且连续，如函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 时不可导，但在这点有极小值0（如图1.4）.

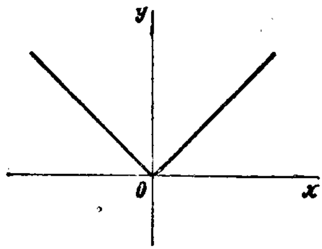

图 1.4

我们再回过头来观察台湾地形图1.1，可知在 C 点处是群山的最高峰，而在 A_1M_1 这段地形内 N 点处是地形最低处. 这样我们引入函数最大值（或最小值）的概念：

函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内有定义，如果在 $[a,b]$ 上的一点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$ 不小于（或不大于）函数在 $[a,b]$ 上其余各点处的函数值，那么称 $f(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**最大值（或最小值）**，记作 $y_{MAX}=f(x_0)$（或 $y_{MiN}=f(x_0)$）.

如图1.2中极大值即最大值，极小值即最小值；图1.3中在0.94点处取得最大值1.76，在 -0.94 点处取得最小值

-1.76.

显然研究最值问题，是在闭区间内进行的，在闭区间$[a, b]$上的最大值是区间端点处的函数值$f(a)$、$f(b)$及所有极大值中的最大者；最小值则是在$[a, b]$上的$f(a)$、$f(b)$及所有极小值中的最小者.

函数的最值与极值的联系与区别在于：

(1) 函数的最值是在整个区间上所有函数值相比较而得到的，而极值是在区间上某点（不包括端点）附近的函数值与这点的函数值相比较而得到的. 有时称最值为整体极值.

(2) 在整个区间内，极值可能有多个，而最大值或最小值只能有一个；极值可能没有，但连续函数在闭区间上总有最值：如函数$y=2$，在一切实数范围内，按严格意义讲，无极值，而2可以看作最大值或最小值；如函数$y=x^2$，在$[0, 2]$上无极值，但在左端点$x=0$处取最小值0，在右端点$x=2$处取最大值4（如图1.5）.

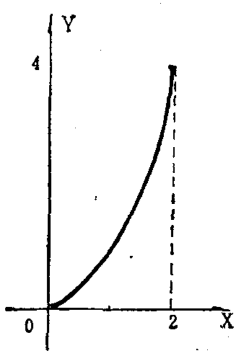

图 1.5

(3) 函数的最值可能在端点取得，但极值却不可能.

(4) 若函数在区间内部（除端点外）取得最值，则一定是极值.

(5) 连续函数在一个区间（开或闭）内若有且只有一个极值点，那么极大值即最大值，极小值即最小值.

在实际应用中，往往是需要求出最值. 如寻求最短距离、

最少时间、最省材料、最大亮度、最高工效、最大面积等等，我们一般求最值的步骤是：

(1) 根据题意建立在区间上的函数式 $y=f(x)$；

(2) 找出函数在区间内的一切极值点；

(3) 求出函数的所有极值点和端点处的函数值；

(4) 比较求出的函数值，其中最大（最小）者，就是最大（最小）值.

在某些情况下，可以根据题目条件，不通过建立函数式而直接求出最值.

可以看出，最值问题的研究一般是通过极值的研究进行的，我们主要研究极值问题. 极值问题在学习微积分后，得到了比较彻底的解决，但往往用初等方法来处理，使一些问题的解决更为简捷，所以我们从初等方法入手，着重研究一些常见的初等函数的极值，供中学生课外阅读.

第二章　几类初等函数的极值

§1．二次函数$y=ax^2+bx+c$

读者熟知二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象是一条抛物线，它的顶点 M（即图象上的峰顶或谷底），当 $a>0$ 时是曲线上的最低点（图 2.1甲）；当 $a<0$ 时是曲线上的最高点（图2.1乙）．即在（$-\infty$，$+\infty$）上，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的极值点是$x=-\dfrac{b}{2a}$，这时，$y_{极值}=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$．

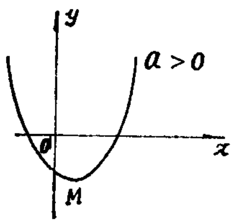

图　2.1甲

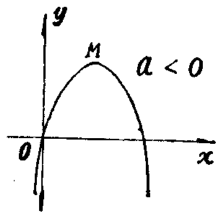

图　2.1乙

实际上，二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的极值可用不同的方法研究．

(1) 经配方，二次函数变形为

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

因为对于任意实数 x，我们有$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\geqslant0$．所以当 $x+\dfrac{b}{2a}=$

0 即 $x=-\dfrac{b}{2a}$时，$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$有极小值 0.

从而当 $a>0$ 时，函数

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\text{有极小值}\frac{4ac-b^2}{4a};$$

当 $a<0$ 时，函数

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\text{有极大值}\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

(2) 研究二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的极值，还可以用“判别式”法.

把方程 $y=ax^2+bx+c$ 写为

$$ax^2+bx+(c-y)=0 \qquad ①$$

显然，这个方程（关于 x）必须有实数根，其判别式必为非负数

即

$$b^2-4a(c-y)\geqslant 0,$$

就 y 解之得

$$4ay\geqslant 4ac-b^2. \qquad ②$$

若 $a>0$，由②，得

$$y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a},$$

就是

$$y_{min}=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

这时，将 y 值代入①容易求出 $x=-\dfrac{b}{2a}$.

若 $a<0$，由②，得

$$y\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a},$$

就是 $$y_{max}=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

这时，将 y 值代入①容易求出 $x=-\frac{b}{2a}$.

从以上几种方法我们都可以得到：

定理 1 函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的极值为：

(1) $a>0$ 时，

y 在极值点 $x=-\frac{b}{2a}$ 有极小值 $y_{min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

(2) $a<0$ 时，

y 在极值点 $x=-\frac{b}{2a}$ 有极大值 $y_{max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

还要指出，二次函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上只有一个极值点，故可知，它的极小值就是函数的最小值；它的极大值就是函数的最大值.

例 1 求下列函数的极值：

(1) $y=2x^2-3x+1$

(2) $y=-5x^2+x-3$

解：(1) $a=2>0$，所以当 $x=-\frac{-3}{2\times2}=\frac{3}{4}$ 时，

$$y_{min}=\frac{4\times2\times1-(-3)^2}{4\times2}=-\frac{1}{8};$$

(2) $a=-5<0$，所以当 $x=-\frac{1}{2\times(-5)}=\frac{1}{10}$ 时，

$$y_{max}=\frac{4\times(-5)(-3)-1^2}{4\times(-5)}=-2\frac{19}{20}.$$

如果是在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上求 $y=ax^2+bx+c$ 的最值，它的选取方法，通过以下图形可得到启发.

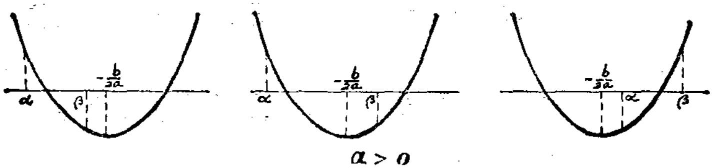

图 2.2 甲

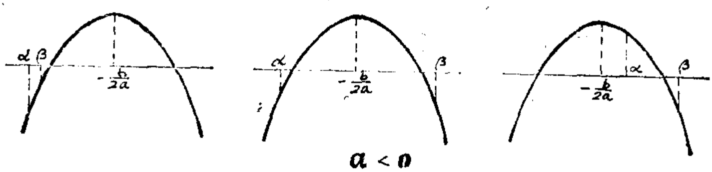

图 2.2 乙

于是得下表：

抛物线顶点横坐标 $-\frac{b}{2a}$ 的位置		最 大 值	最 小 值
$\alpha<\beta\leqslant-\frac{b}{2a}$	$a>0$	$f(\alpha)$	$f(\beta)$
	$a<0$	$f(\beta)$	$f(\alpha)$
$\alpha<-\frac{b}{2a}<\beta$	$a>0$	$f(\alpha)$，$f(\beta)$ 中的较大者	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$
	$a<0$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$f(\alpha)$，$f(\beta)$ 中的较小者
$-\frac{b}{2a}\leqslant\alpha<\beta$	$a>0$	$f(\beta)$	$f(\alpha)$
	$a<0$	$f(\alpha)$	$f(\beta)$

读者应该掌握研究二次函数的极值和最值的方法，记住二

次函数有关最值的结论，以便讨论其他函数的极值．

例 2 求函数 $y=x^2-4x+5 \quad x\in[0,3]$ 的最大值和最小值．

解： 首先考虑在区间 $(0,3)$ 上函数 y 的极值．

$\because \quad x=-\frac{b}{2a}=2$ 在 $(0,3)$ 内，

$\therefore$ 当 $x=-\frac{-4}{2\times 1}=2$ 时，$y_{min}=f(2)=1$．

但 $f(0)=5$，$f(3)=2$．

则 y 的最大值是 5，最小值是 1．

§2．整式函数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的极值

n 次整式函数

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的极值将在第六章§2内得到完全解决，本节只介绍几种求极值的初等方法．

1．双二次函数 $y=ax^4+bx^2+c$ 的极值

函数 $y=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$ 的定义域是 $x\in(-\infty,+\infty)$．利用配方法，得

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

因为对于任意实数 x，我们有 $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$．

问题归结为求 $a\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ 的极值．

不失一般性，就 $a>0$ 的情形来研究 y 的极值．