中等数学自学丛书

初等代数

秦元勋 主编

贵州人民出版社

中等数学自学丛书

初 等 代 数

主 编

秦 元 勋

贵 州 人 民 出 版 社

责任编辑　何伊德
封面设计　胡朝惠
　　　　　邹　刚

中等数学自学丛书

初 等 代 数

秦元勋 主编

贵州人民出版社出版
（贵阳市延安中路5号）
贵州新华印刷厂印刷　　贵州省新华书店发行
787×1092毫米　32开本　17.75印张　382千字
1983年3月1版　　1983年3月第1次印刷
印数1——7500
书号7115·626　　定价1.36元

前　　言

为了帮助具有小学毕业程度的读者通过自学打好中等数学的基础，以便继续攻读大学程度的高等数学，我们编写了这套数学自学读物。

小学数学课的内容基本上是算术和一些简单图形的计算。在这个基础上有两个科目明显地分离出来，一个是初等代数，一个是初等几何。前者主要是方程式的建立与求解，以及由此而产生的数系的扩展。后者则主要是形的关系的研究并顺便对严格的逻辑推理作一示范。

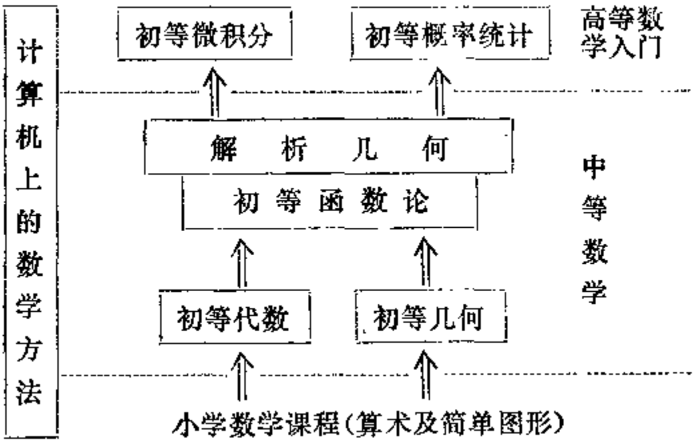
在初等代数和初等几何的基础上建立起初等函数论（三角函数为一特例）和解析几何。它们将初等代数与初等几何在高一级的观点统一起来，方程式的求解可以用图形求交点来代替，图形的关系可以化为代数的关系来求解。

初等函数论和解析几何为进入高等数学准备了条件。客观事物的运动规律有两种类型，一种是确定的过程；另一种是随机的过程。前者可用微分方程来描述，后者则要用概率统计的观点来描述。这样，作为高等数学入门编写了《初等微积分》和《初等概率统计》。

由于计算机的使用程度标志着数学工具现代化的水平，不论初级、中级、高级的数学都可以用计算机来加快解题的速度，因此还编写了《计算机上的数学方法》，讲解与使用计算机直接有关的数学方法与程序编置，使读者可以初步理

解如何用现代化的计算工具求解数学问题。

这套读物共有七册，为了有助于读者理解其结构体系，图解如下：



这套数学自学读物的编写工作是由秦元勋同志主持的。其中：《初等代数》、《初等几何》、《初等函数论》和《解析几何》由北京市一〇一中学数学组教师王树茗、丁祖娴、邢洁、杨鸿媛、李智秀、胡大同、李珍、郝树强、吕娴序、刘燧初等同志执笔编写，由秦元勋同志审改；《初等微积分》、《初等概率统计》和《计算机上的数学方法》则分别由秦元勋、安鸿志、刘尊全同志编著。

秦元勋

一九八二年十一月于北京

目　录

第一章

集合

集合是现代数学中的一个基本概念，借助于它可以把数学中一系列重要概念解释得更为准确和清楚。

§1. 什么是集合

举例来说，某一个学校的某一个班在某一个期间的全体同学（在这里假定在那个期间，那班学生没有转出，也没有转入，即那班的成员没有任何变动，以后类似提法都应作同样理解）就构成一个集合。该班学生在一次考试中成绩在90分以上的学生，80分以上不足90分的学生，70分以上不足80分的学生，60分以上不足70分的学生，还有不足60分的学生也各自构成一个集合。

某一所图书馆在某一个时期的全部藏书，某一个动物园在某一个时期内所豢养的全部动物，太阳系中的所有行星，等等，也都各自构成一个集合。

以上所举的集合中所含有的个体，其数目都是有限的，这样的集合叫做有限集合。而在研究中所接触到的集合却不完全是这样。如全体自然数所构成的集合其中所含有的个体

（单个的自然数）就是无穷无尽的，这样的集合叫做无限集合。

一个集合中所含有的个体叫做那个集合的元素。

通常以大写的拉丁字母 A，B，C，D 等等代表集合，而以小写的拉丁字母 a，b，c，d 等等代表元素。对于 a 是集合 A 的元素的情形，用符号

$$a \in A$$

表示，读作“a 属于 A”。对于 b 不是集合 A 的元素的情形，用符号

$$b \notin A$$

表示，读作“b 不属于 A”。

例如，当 A 代表由全体自然数所构成的集合时，应该有：

$$1 \in A,\ 2 \in A,\ 3 \in A,\ \cdots\cdots$$

但是 $\frac{1}{2}$ 不是一个自然数，因此

$$\frac{1}{2} \notin A.$$

§2. 怎样说明一个集合

当我们以某一个集合作为谈论对象时，应该对它是怎样的一个集合作出确切的说明。在这方面有两个可供我们选用的方法：

其一是列举元素法。采用这种方法就要将该集合中的元素一个个地都说出来，凡是说到的当然都是该集合的元素，凡是没有说到的也就都不再认为是该集合的元素。

例1. 由 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 所构成的集合.

例2. 由水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星所构成的集合.

其二是描述特征法．采用这种方法就要将该集合的元素的共同特征陈述出来，凡是具有那种特征的个体当然都是该集合的元素，凡是不具有那种特征的也就都不再认为是该集合的元素.

例1. 小于11的自然数的集合.（对照列举元素法的例1）.

例2. 太阳系的大行星的集合.（对照列举元素法的例2）.

例3. 1978年5月10日14点正的北京市居民的集合.（这是一个有限集合，但是元素很多）.

例4. 大于100的自然数的集合.（这是一个无限集合）.

比较起来，显然列举元素法的局限性很大，要用它必须所要说明的集合不但有限而且元素不很多．描述特征法则不论集合元素的少还是多，有限还是无限，都可以用.

为了叙述上的简便，我们约定，今后用符号

$$\{\quad\}$$

代表集合．当用列举元素法说明一个集合时，即将所列举的元素一一写在此符号中．象上述列举元素法的例1就可写作：

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

而当用描述特征法说明一个集合时，即在此符号中先写上个体符号，而后写出陈述集合元素共同特征的语句．象上述描

述特征法的例 4 就可写作：

$$\{x|x\text{是自然数}, x>100\}$$

还有，以后在应用描述特征法时，常常用到的一些名词的涵义也应该在此作些必要的解释：

自然数：指从 1 开始逐次加 1 所得到的每一个数．

算术整数：指在小学算术课程中所讲到的整数，其中既包括自然数，也包括 0．

算术奇数：指算术整数中的单数，例如：1，3，5，7，9，……

算术偶数：指算术整数中的双数，例如：0，2，4，6，8，10，……

因数，整除：如果整数乙是整数甲与另一整数的乘积，则称甲是乙的因数，或称甲能整除乙．

素数（质数），合数：在大于 1 的自然数中，除了 1 和它自身之外再也没有其他自然数可以作为它的因数的叫做素数或质数，除了 1 和它自身之外还有其他自然数可以作为它的因数的叫做合数．素数的例：2，3，5，7，11，13，17，19，23，等等．合数的例：4，6，8，9，10，12，14，15，16，18，20，21，等等．1 既不是素数也不是合数．

算术分数：指小学算术课程中所讲述的分数．

算术数：是算术整数与算术分数的总称注．

§3. 集合的相同

假定 A 和 B 各是一个集合．如果 A 中的每一个元素都同时是 B 中的元素，反过来，B 中的每一个元素也都同时是 A

注：更准确的叫法应该是"算术有理数"．在本书对这两名称的涵义不作区分．

中的元素，那么我们就说A和B这两个集合是相同的，并且用式子

$$A=B$$

（读作"A和B相同"，也可以按照我们在数学学习中已经形成的习惯读作"A等于B"）来表示A，B之间的这种关系。

应该注意，这里关于"集合的相同"的解释是对§1关于"集合"的解释的重要补充。它指明集合这一概念所反映的只是一个集体由哪些个体所组成——两个集合只要由同一些个体所组成，就应该认为是相同的，也就是没有区别的，其他方面的差异，例如：这两个集合中的个体在排列方式上有怎样的不同，我们用描述特征法说明这两个集合所使用的语言是怎样的不一致，在判断这两个集合是否相同时，都用不着考虑。

例1. $\{0,1,2,3,4\}=\{3,1,0,2,4\}$

例2. 假定

$$M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$N=$不大于10的自然数的集合

则 $M=N$

例3. 假定

$P=\{x|x$是偶数，$x>0\}$

$Q=\{x|x=2a$，a为任意自然数$\}$

则 $P=Q$。

§4. 集合的包含、子集合

如果集合A中的每一个元素都同时是集合B中的元素，那么我们就说集合A**包含在**集合B**中**. 这种关系今后用式子

$$A \subseteq B$$

来表示。

例1. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right\} \subseteq \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\}$

例2. 假定

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

B = 小于 100 的自然数的集合

C = 自然数集

则以下关系都成立：

$A \subseteq B$， $A \subseteq C$， $B \subseteq C$。

例3. 假定

A = 自然数集

B = 非 0 的算术整数集

C = 算术整数集

D = 算术数集

则以下关系都成立：

$A \subseteq B$，$B \subseteq A$（注意：A和B彼此互相包含）

$A \subseteq C$，$B \subseteq C$，

$A \subseteq D$，$B \subseteq D$，$C \subseteq D$.

例 3 向我们具体地指明：$A \subseteq B$ 并不排斥$B \subseteq A$。如

果$A\subseteq B$和$B\subseteq A$同时成立，那种情形也正是上节所说的$A=B$。

可以用以下的图解形象地表示$A\subseteq B$的两种可能情形：

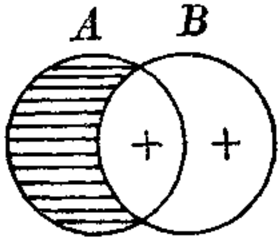


图 1-1

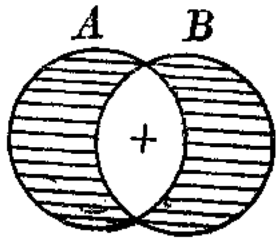


图 1-2

图中以两圆各表示一个集合，凡画阴影的地方都表示那里“空无一物”，凡画“+”号的地方都表示那里不空。这样图 1-1 就表示A的元素都是B的元素，但B的元素不都是A的元素，即$A\subseteq B$成立而$B\subseteq A$不成立的情形；图 1-2则表示A的元素都是B的元素，B的元素也都是A的元素，即$A\subseteq B$和$B\subseteq A$同时成立的情形，也即$A=B$的情形。

也可以用图解法表示三个集合中任何两个集合之间一个包含另一个的关系。象例 3 中的A，B、C，其间的关系可用图1-3表示。这一个图的中心区域为A、B、C所共有。由于A、B除这一区域外其他区域都是空的，所以$A\subseteq B$并且$B\subseteq A$，即$A=B$。

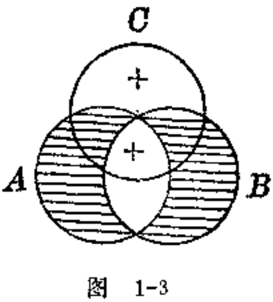


图 1-3

由于C除那一区域外还有另外一个区域（图中最高处）是不空的，所以A、B都包含在C中，但C却不包含在A、B的任何一个之中．当然，在使用图解法时，应该切记：不空区域的面积的大小并不标志那里所含有的元素的多少．在图1-3，C中有两个不空区域，其中与A、B共有的不空区域尽管画得范围狭隘，但是其中“人口众多”，无穷无尽的自然数全部聚集在这里；另一个不空区域尽管看去“幅员辽阔”，全境之内却只有一个“居民”，那就是0。

象这种画若干个圆形以直观地表明若干个集合之间相互关系的办法，通常称为“文氏图解法”，所画的图形即称“文氏图”注。

当$A \subseteq B$时，我们说A是B的**子集合**（简称“子集”）．

根据“$A \subseteq B$”的意义可知，当A是B的子集时，B也可能是A的子集．

对于$A \subseteq B$但是并不$B \subseteq A$（也就是$A \subseteq B$但是并不$A = B$）的情形，今后特别用符号

$$A \subset B$$

来表示．在这种情形下，我们说A是B的**真子集合**（简称“真子集”）．

A是B的真子集用文氏图表示即图1-1．

容易想到，当A是B的真子集时，B不可能再是A的子集，当然更不可能再是A的真子集．

以上例1和例2中的每一个包含关系都属于一个集合是另一个集合的真子集的情形．在例3，A和B都是C的真子

注：“文氏”指约翰·文恩（John venn 1834—1923）英国人，他首先提出了这种图解法。

集，A，B和C又都是D的真子集；但是，A和B中的任一个都只能说是另一个的子集，而不能说是另一个的真子集.

练 习 一

1. 下列各集合哪个是有限集？哪个是无限集？若是有限集，其中元素有多少？

(1) 小于18的算术整数的集合；

(2) 大于18的算术整数的集合；

(3) 不等于18的算术整数的集合；

(4) $\{x|x$是30的因数$\}$；

(5) $\{x|x$是1024的因数$\}$；

(6) $\{x|x$是算术整数，$100<x<1000\}$；

(7) $\{x|x$是算术数，$0<x<1\}$；

(8) 素数之中的偶数的集合.

2. 下面的写法哪一个正确，哪一个不正确？其中不正确的又为什么不正确？

(1) $7\in\{2,0,7,3,6\}$；

(2) $221\in$素数集；

(3) $\{1,2,3\}\in\{1,2,3,4,5\}$；

(4) $\{1,2,3\}\subset\{3,2,1\}$.

3. 利用符号“$\subseteq$”或“$\subset$”表明下列各情形A，B两集合之间的关系：

(1) $A=\{$4月份，5月份，6月份$\}$，
$B=\{$全年中各月份$\}$

(2) $A=\{x|x$是算术数，$x>4\}$，
$B=\{x|x$是算术整数，$x>4\}$

（3） $A=\{x|x$是自然数，$x\neq 7\}$，

$B=\{x|x$是自然数，$x<7\}$

（4） $A=\{x|x$是素数，$x\neq 6\}$，

$B=\{x|x$是素数，$x>1\}$

（5） $A=\{0\}$， $B=\{0\}$

4. 用文氏图表示以上各题中A和B的各种关系。

§5. 空 集 合

为了以后研究许多问题的方便，我们需要承认“空集合”也是集合的一种。

所谓空集合就是其中没有任何元素的集合。以后，我们常常简称它们为“空集”，并且用特定的符号ϕ或在这个符号上附以足码（如ϕ_1，ϕ_2等等）来表示它们。

这种集合很自然地被当作有限集。

在§1.所举的第一个例子中，若那班学生在那次考试中没有一个成绩不及格的，则全体不及格的学生所构成的集合就是一个空集。

几十年来人们津津乐道的“火星人”（即火星上的居民）现在已经证实根本不存在，这就是说由全体火星人所构成的集合是一个空集。

随着时间的推移，原来的不空的集合后来可能变成空的。全体活着的恐龙（在两亿年前曾经独霸世界的一种巨型爬行动物）所构成的集合就是这样。当然，相反的情形也是有的。能够代替人类进行某些脑力劳动的机器曾经在很长的

时期内只是某些科学工作者的幻想，那时，那种机器的集合仅仅是一个空集．但是，在今天，幻想已经转化成为现实，空集变得不空了。

人们在数学的学习与研究中，常常要和空集打交道．如“全体既比 4 大又比 5 小的自然数所构成的集合”，“全体大于 2 的偶素数（按：指既是偶数又是素数的数）所构成的集合”所说的都是空集。

在数学中使用空集这一概念时，要求人们承认以下两个论断：

（1）空集包含于任何集合中，即空集是任何集合的子集．用符号来表述，即：对于任意空集 ϕ 与任意集合 A，永远有

$$\phi \subseteq A$$

这个论断之所以必须承认，其理由在于：你如果不承认 ϕ 包含在某一集合中，那你就必须指明：有这样的个体，它在 ϕ 中（请别忘记 ϕ 中空无一物）但是不在 A 中．那当然是办不到的。

（2）任何两个空集必定相同，即空集事实上只有一个，用符号来表述，即：对于任意两空集 ϕ_1，ϕ_2，永远有

$$\phi_1 = \phi_2$$

这个论断是随着上一个来的．既然 ϕ_1 包含在任何集合中，当然也包含在 ϕ_2 中，按照同样的理由，ϕ_2 也包含在 ϕ_1 中．既然我们既承认 $\phi_1 \subseteq \phi_2$，又承认 $\phi_2 \subseteq \phi_1$，那就必须承认 $\phi_1 = \phi_2$．所谓“空集事实上只有一个”，说得通俗一点，就是“空集在事实上是无法区别的”，理由是：凡是空集都内部“一无所有”，我们没有办法具体指出它们彼此之间有什么不同。